

AGRA II: Aritmética, grupos y análisis
An ICTP-CIMPA Research School

EXPANSORES GEOMÉTRICOS

Mikhail Belolipetsky

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)
mbel@impa.br

UNIVERSIDAD S. ANTONIO ABAD, CUSCO, PERÚ, del 8 al 22 de Agosto de
2015

Prefacio

En esta parte vamos a estudiar las propiedades geométricas y topológicas de los espacios asociados a las secuencias de los subgrupos de congruencia. En particular, consideraremos algunos resultados de P. Buser, P. Sarnak, R. Brooks, M. Lackenby y M. Gromov en el contexto de expansores geométricos.

Capítulo 1

Expansores Geométricos

1.1. El plano y el espacio hiperbólico

1.1.1.

Vamos a usar principalmente el modelo del semiespacio superior para el *espacio hiperbólico*. En este modelo tenemos:

$$\mathbb{H}^3 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t > 0\}$$

con la métrica inducida por

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dt^2}{t^2}.$$

Con esta métrica, \mathbb{H}^3 se convierte en una variedad riemanniana completa con curvatura constante -1 . Tal variedad, que es además conexa y simplemente conexa, es única salvo isometrías.

Del mismo modo, el *plano hiperbólico* puede ser representado por el semiplano superior

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$$

con la métrica inducida por $ds^2 = (dx^2 + dt^2)t^{-2}$.

Observar que esta métrica en \mathbb{H}^2 es la restricción de la métrica hiperbólica en \mathbb{H}^3 al plano $y = 0$.

El grupo $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ es el cociente del grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ de todas las matrices 2×2 con entradas complejas y determinante 1 por el centro $\{\pm \mathrm{Id}\}$:

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) / \{\pm \mathrm{Id}\}.$$

Nosotros vamos a considerar frecuentemente elementos de un subgrupo Γ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ como matrices, e ignorar la diferencia entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ y $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Con la acción inducida por la transformación de Möbius

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d},$$

los elementos $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ actúan sobre la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y esta acción es biholomorfa.

La acción de cada $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ se extiende a \mathbb{H}^3 con la extensión de Poincaré:

γ = un producto del número par de las inversiones en los círculos y líneas en \mathbb{C} . (**Ejercicio:** Verificar este hecho.)

Ahora considera $\hat{\mathbb{C}}$ como la frontera $t = 0$ de \mathbb{H}^3 — la esfera en el infinito. Podemos extender cada línea/círculo en \mathbb{C} a un plano/hemisferio en \mathbb{H}^3 ortogonal a \mathbb{C} . El producto de las correspondientes reflexiones en los planos y las inversiones en hemisferios da lugar a la extensión de γ para \mathbb{H}^3 .

Podemos verificar que las reflexiones e inversiones son isometrías de la métrica hiperbólica en \mathbb{H}^3 y que ellas generan el grupo de isometrías $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$. Por eso con la extensión de Poincaré tenemos

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3),$$

el grupo de isometrías de \mathbb{H}^3 que preservan la orientación.

Para isometrías del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 tenemos también el isomorfismo

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2).$$

Las isometrías de \mathbb{H}^3 actúan transitivamente en los hemisferios y planos ortogonales a \mathbb{C} . Así que podemos enviar $\mathbb{H}^2 = \{y = 0 \text{ en } \mathbb{H}^3\}$ para cualquier otro plano de este tipo o hemisferio. Por tanto todos los hemisferios y planos en \mathbb{H}^3 , los cuales son ortogonales a \mathbb{C} con la restricción de la métrica hiperbólica de \mathbb{H}^3 , son modelos de \mathbb{H}^2 . Ellos dan el conjunto de *planos geodésicos* en \mathbb{H}^3 . Si dos de estos planos se cruzan en \mathbb{H}^3 , podemos definir el ángulo dihedral entre ellos. Este ángulo degenera a cero si los planos son tangentes en la esfera $\hat{\mathbb{C}}$ en el infinito. En otros casos, los planos tienen un único perpendicular común, cuya longitud define la *distancia* entre ellos.

Las líneas geodésicas en \mathbb{H}^3 son semicírculos y líneas rectas ortogonales a \mathbb{C} . La geometría de puntos, líneas, planos y sus relaciones de incidencia en el espacio hiperbólico es bien conocida. En particular, tenemos formulas trigonométricas para los triángulos hiperbólicos que son muy útiles. También tenemos fórmulas para calcular longitudes, áreas y volúmenes que luego usaremos. Los volúmenes son calculados con respecto al elemento de volumen hiperbólico dV inducido por la métrica. Para nuestro modelo de \mathbb{H}^3 , tenemos $dV = \frac{1}{t^3} dx dy dt$.

Ejercicios 1.1.1. 1. Pruebe que $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ actúa transitivamente sobre geodésicas en \mathbb{H}^3 .

2. Obtener la fórmula de la distancia entre un punto y un plano hiperbólico en \mathbb{H}^3 .

3. Obtener las fórmulas trigonométricas para un triángulo hiperbólico.

4. Calcular el área de un triángulo en \mathbb{H}^2 y el volumen de un simplex ideal (i.e. con todos los vértices en infinito) en \mathbb{H}^3 .

1.1.2.

Ahora vamos a considerar los *subgrupos* de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ y la geometría relacionada a ellos.

Para comenzar, para los elementos $\gamma \neq \text{Id}$ tenemos la siguiente clasificación:

- γ es *elíptico* si $\text{tr}(\gamma) \in \mathbb{R}$ y $|\text{tr}(\gamma)| < 2$;
- γ es *parabólico* si $\text{tr}(\gamma) = \pm 2$;
- γ es *loxodrómico* (o *hiperbólico*) en otro caso.

Tenemos las siguientes propiedades geométricas correspondientes a esta clasificación:

γ es parabólico $\iff \gamma$ tiene un único punto fijo en $\hat{\mathbb{C}} = \partial\mathbb{H}^3$.

Ejemplo. $\gamma : z \rightarrow z+1$ tiene matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y fija únicamente el punto $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$.

Podemos verificar que todos los otros elementos parabólicos son conjugados en $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ a este γ .

γ es elíptico $\iff \gamma$ tiene dos puntos fijos $p, q \in \hat{\mathbb{C}}$ y es una rotación alrededor de la geodésica $A_\gamma = [p, q] \subset \mathbb{H}^3$.

γ es hiperbólico $\iff \gamma$ tiene dos puntos fijos $p, q \in \hat{\mathbb{C}}$ y es un movimiento de tornillo a lo largo de la geodésica $A_\gamma = [p, q] \subset \mathbb{H}^3$.

La geodésica A_γ es llamada *eje* de un elemento elíptico o hiperbólico γ . Para elementos hiperbólicos tenemos la fórmula importante para el *desplazamiento* ℓ a lo largo del eje:

$$\cosh(\ell(\gamma)/2) = |\operatorname{tr}(\gamma)|/2. \quad (1.1)$$

Observe que sólo los elementos elípticos poseen puntos fijos en \mathbb{H}^3 .

El grupo $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{C})$ actúa transitivamente en los puntos de \mathbb{H}^3 , de modo que el estabilizador de cualquier punto en \mathbb{H}^3 es conjugado al estabilizador de $(0, 0, 1)$, que es $\operatorname{SO}_3(\mathbb{R})$ — un subgrupo compacto máximo de $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{C})$. Tenemos que

$$\mathbb{H}^3 \cong \operatorname{PSL}_2(\mathbb{C}) / \operatorname{SO}_3(\mathbb{R}),$$

como un *espacio simétrico*.

Igualmente, tenemos una acción transitiva de $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{C})$ en $\hat{\mathbb{C}}$, entonces los estabilizadores de los puntos en infinito son conjugados a

$$B = \operatorname{St}(\infty) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\},$$

el *subgrupo de Borel* de $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Cualquier subgrupo finito de $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{C})$ debe tener un punto fijo en \mathbb{H}^3 y así ser conjugado a un subgrupo de $\operatorname{SO}_3(\mathbb{R})$. Los subgrupos finitos de $\operatorname{SO}_3(\mathbb{R})$ son bien conocidos:

cíclicos (C_n), dihedrales (D_n) y los grupos de simetrías de poliedros regulares A_4 , S_4 o A_5 .

Definición 1.1.2. Sea Γ un subgrupo de $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{C})$:

- Γ es reducible si todos los elementos $\gamma \in \Gamma$ tienen un punto fijo común en $\hat{\mathbb{C}}$. Si Γ no es reducible, este es llamado irreducible.
- Γ es elemental si posee una órbita finita en $\mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}}$.

Observe que reducible implica elemental, pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo, un subgrupo elemental puede tener elementos parabólicos y elípticos.

Teorema 1.1.3. Cada subgrupo no elemental de $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{C})$ contiene una infinidad de elementos loxodrómicos tal que ningún par de estos elementos posee un punto fijo en común.

Definición 1.1.4. Un grupo kleiniano es un subgrupo discreto de $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Esta condición es equivalente a exigir que Γ actúa discontinuamente en \mathbb{H}^3 , que significa que para cada compacto $K \subset \mathbb{H}^3$ el conjunto $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma K \cap K\}$ es finito.

El estabilizador en Γ de un punto ξ en infinito puede conjugarse a un subgrupo de Borel B . Los subgrupos discretos de B son clasificados (*Ejercicio: Describelos*), el caso que es particularmente importante para la geometría da la siguiente definición:

Definición 1.1.5. *El punto $\xi \in \hat{\mathbb{C}}$ es una cúspide de un grupo kleiniano Γ si el estabilizador Γ_ξ contiene un grupo abeliano libre de rango 2.*

(En este caso $\Gamma_\xi \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \rtimes F$, F — un grupo finito.)

1.1.3.

Puesto que un grupo kleiniano actúa discontinuamente en \mathbb{H}^3 , podemos construir un *dominio fundamental* para esta acción. Por definición, un dominio fundamental es un subconjunto cerrado $\mathcal{F} \subset \mathbb{H}^3$ tal que:

- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \mathcal{F} = \mathbb{H}^3$;
- $\mathcal{F}^\circ \cap \gamma \mathcal{F}^\circ = \emptyset$, para todo $\gamma \neq \text{Id}$, donde \mathcal{F}° denota el interior de \mathcal{F} ;
- la frontera de \mathcal{F} tiene medida cero.

Podemos obtener un dominio fundamental para Γ usando la *construcción de Dirichlet*:

Para $P \in \mathbb{H}^3$ un punto tal que $\gamma(P) \neq P$ para todo $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}$, define

$$\mathcal{F}_P(\Gamma) := \{Q \in \mathbb{H}^3 \mid d(Q, P) \leq d(\gamma(Q), P) \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Ejercicio 1.1.6. *Muestre que $\mathcal{F}_P(\Gamma)$ es un dominio fundamental del grupo kleiniano Γ .*

Definición 1.1.7. *Un grupo kleiniano es llamado geoméricamente finito si él admite un dominio de Dirichlet con un número finito de lados.*

Los grupos geoméricamente finitos son finitamente generados.

Un grupo kleiniano tiene *covolumen finito* si posee dominio fundamental \mathcal{F} de volumen hiperbólico finito. En este caso, el covolumen de Γ es

$$\text{covol}(\Gamma) = \text{vol}(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{F}} dV.$$

Un grupo es llamado *cocompacto* si tiene un dominio fundamental compacto.

Proposición 1.1.8. *Sean $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ dos dominios fundamentales de un grupo kleiniano Γ . Entonces, si $\int_{\mathcal{F}_1} dV$ es finito, $\int_{\mathcal{F}_2} dV$ es también finito y son iguales.*

Si Γ es cocompacto, su covolumen es finito. En la otra dirección tenemos:

Teorema 1.1.9. *Si Γ tiene covolumen finito, entonces existe $P \in \mathbb{H}^3$ tal que $\mathcal{F}_P(\Gamma)$ tiene un número finito de lados. En particular, Γ es geoméricamente finito y finitamente generado.*

Sea Γ conteniendo un elemento parabólico γ . Podemos suponer que el punto fijo de γ es $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$. En este caso existe una *horobola*

$$H_\infty(t_0) = \{(x, y, t) \in \mathbb{H}^3 \mid t > t_0\}$$

tal que la acción de Γ en $H_\infty(t_0)$ es la misma que la acción de Γ_∞ :

$$\text{para } x, y \in H_\infty(t_0) \text{ existe } \delta \in \Gamma \mid \delta(x) = y \iff \delta \in \Gamma_\infty.$$

Entonces Γ_∞ actúa sobre $H_\infty(t_0)$, y como $\Gamma_\infty \subset B$ él actúa en la *horoesfera*, el borde de la horobola (i.e. $\{(x, y, t_0)\}$), como un grupo de transformaciones euclidianas. Así tenemos una descripción precisa de la acción de un grupo kleiniano en las cercanías de una cúspide.

Si Γ contiene un elemento parabólico podemos ver que Γ no es cocompacto. Además con la condición de covolumen finito podemos obtener un mejor resultado:

Teorema 1.1.10. *Sea Γ un grupo kleiniano de covolumen finito. Si Γ no es cocompacto, entonces Γ tiene que contener un elemento parabólico γ . Si ξ es el punto fijo de γ , entonces ξ es una cúspide. Además, existe sólo un número finito de las clases de Γ -equivalencia de cúspides y para esto sus vecindades horobolas pueden ser disjuntas.*

Si empezamos con $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ en lugar de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ buena parte de la discusión anterior permanece válida. Nos limitaremos a indicar la definición.

Definición 1.1.11. *Un subgrupo discreto de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ es llamado un grupo fuchsiano.*

1.1.4.

Para dar un ejemplo consideremos el grupo $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]) < \text{PSL}_2(\mathbb{C})$. Este es un ejemplo de un grupo kleiniano no cocompacto de covolumen finito. El grupo Γ tiene un dominio fundamental

$$\mathcal{F} = \{(x, y, t) \in \mathbb{H}^3 \mid x^2 + y^2 + t^2 \geq 1, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\}.$$

El covolumen de Γ puede ser calculado, y es igual a $\frac{|\Delta_k|^{3/2} \zeta_k(2)}{4\pi^2}$ donde $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, el discriminante $\Delta_k = -3$, y $\zeta_k(2) = 1,28519096\dots$ que es la función zeta de Dedekind del cuerpo k .

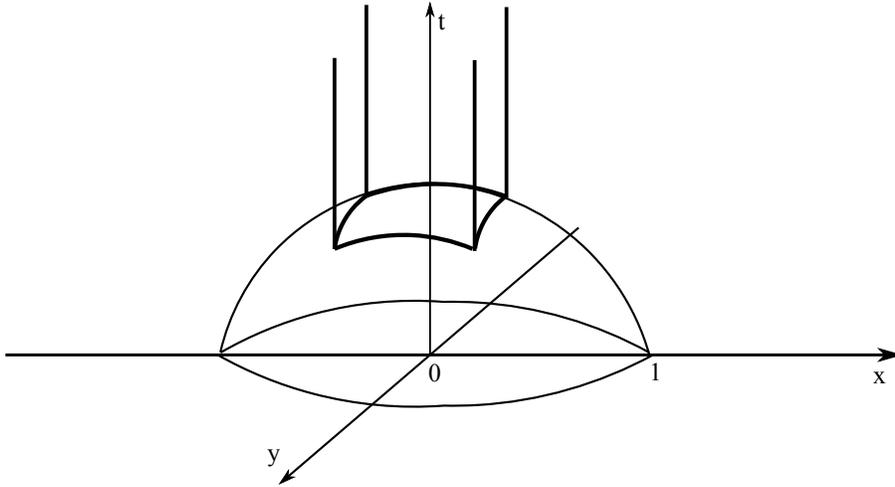


Figura 1.1: Un dominio fundamental de $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}])$.

El espacio cociente $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ tiene el espacio de cubrimiento de grado 12 que es homeomorfo al complemento del nudo “figura ocho” en la esfera. Este fue uno de los primeros ejemplos de motivación en la geometría hiperbólica de dimensión 3 estudiados por Riley y Thurston [R75, Th78]. Para otros ejemplos de dominios fundamentales de grupos del tipo $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-d}])$ podemos referir a [EGM].

1.1.5.

Una *variedad hiperbólica (sin borde) de dimensión n* es una variedad riemanniana M tal que cada punto en M tiene una vecindad isométrica a un abierto en \mathbb{H}^n . Si Γ es un grupo kleiniano sin torsión, entonces Γ actúa libremente en \mathbb{H}^3 y el cociente

$\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ es una 3-variedad hiperbólica orientable. Recíprocamente, cada 3-variedad hiperbólica orientable M puede ser obtenida como

$$M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^3,$$

con Γ un grupo kleiniano isomorfo al grupo fundamental $\pi_1(M)$.

Si Γ es un grupo kleiniano que puede tener elementos no triviales de orden finito, entonces el espacio $O = \Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ es una variedad singular denominada *orbifold*.

Otra vez, la misma terminología aplica para los grupos fuchsianos y variedades hiperbólicas de dimensión 2 y también para las dimensiones $n > 3$.

Por el lema de Selberg cada orbifold hiperbólico tiene un cubrimiento finito que es una variedad hiperbólica:

Lema 1.1.12 (Lema de Selberg). *Si Γ es un subgrupo finitamente generado de $GL_n(\mathbb{C})$, entonces Γ tiene un subgrupo sin torsión de índice finito.*

Ejercicio 1.1.13. *Dar una prueba del lema.*

Referimos a los libros [R06] y [MR03] para más información sobre la geometría hiperbólica y los grupos kleinianos.

1.2. Sístole y volumen

Sea \mathbb{H}^n el espacio hiperbólico de dimensión n (para nosotros principalmente $n = 2$ o 3), y \mathbb{B}_r^n una bola de radio r en \mathbb{H}^n . Como antes, $\text{vol}(\cdot)$ denota el volumen hiperbólico. La *sístole*, denotada $\text{sys}_1(\cdot)$, es la longitud de la geodésica cerrada no contráctil más corta (ver Figura 1.2).

Debido a la curvatura negativa

$$\text{vol}(\mathbb{B}_r^n) \geq C_n e^{k_n r}, \text{ para constantes } C_n, k_n > 0 \text{ y } r \gg 0.$$

Consideramos una variedad hiperbólica compacta $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^n$. Si $\ell = \text{sys}_1(M)$, entonces M tiene que contener una bola \mathbb{B}_r^n de radio $r = \frac{\ell}{2}$. (En general, el máximo r tal que para cualquier $x \in M$ la variedad riemanniana M contiene una bola $\mathbb{B}_r(x)$ es llamado el *radio de inyectividad* de M .)

Por tanto

$$\begin{aligned} \text{vol}(M) &\geq \text{vol}(\mathbb{B}_r^n) \geq C_n e^{k_n \ell/2}; \\ \text{sys}_1(M) &\leq C \log(\text{vol}(M)). \end{aligned}$$

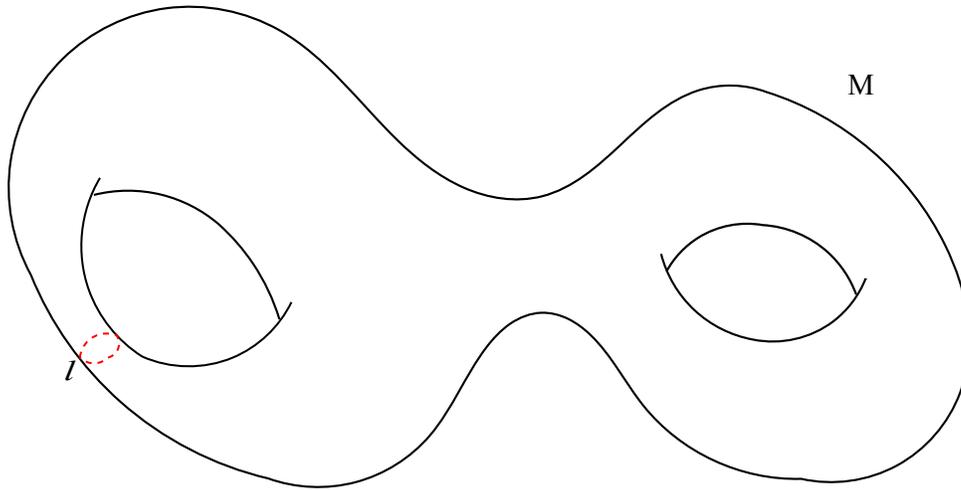


Figura 1.2: La sístole de la superficie M .

Así probamos

Lema 1.2.1. *La sístole de una variedad hiperbólica compacta M satisface*

$$\text{sys}_1(M) \leq C \log(\text{vol}(M)),$$

donde C es una constante positiva que sólo depende de la dimensión de M .

Ejercicio 1.2.2. *Calcula el valor de constante C en el lema.*

La pregunta importante es si esta desigualdad es asintóticamente óptima, i.e. si existen una constante $C' > 0$ y una secuencia de variedades M_i tal que

$$\text{vol}(M_i) \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad \text{sys}_1(M_i) \geq C' \log(\text{vol}(M_i)).$$

La respuesta es “sí”, pero sólo conocemos una manera de obtener tales secuencias. Para esto tenemos que utilizar los *expansores geométricos*.

Un primer ejemplo de una secuencia de expansores geométricos es

$$M_p = \Gamma(p) \backslash \mathbb{H}^2 \quad \text{con} \quad \Gamma(p) = \ker(\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})), \quad p \text{ primo.}$$

Tenemos que $M_p \rightarrow M$ es un cubrimiento de grado $|\text{PSL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = \frac{1}{2}p(p-1)(p+1)$.

Ejercicio 1.2.3. *Calcula el género y el número de cúspides de M_p .*

Vimos que, en particular, M y todos M_p son no compactos. Para tener la imagen geométrica más clara es mejor tener una secuencia de variedades compactas. Tales secuencias fueron construidas por Buser y Sarnak en [BS94].

Sean $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $\mathbb{D} = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$ el *álgebra de cuaterniones* sobre \mathbb{Q} generada por

$$1, i, j, k \text{ tales que } i^2 = a, j^2 = b, ij = -ji = k.$$

Elegimos a, b tal que la forma cuadrática

$$N(X) = \text{Norm}(x_0 + x_1i + x_2j + x_3k) = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2$$

no representa cero para $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Q}^4$, $X \neq 0$. Por ejemplo, podemos tomar $a = 2$, $b = 3$. En este caso \mathbb{D} es un álgebra de división (i.e. cada $X \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tiene un inverso $X^{-1} \in \mathbb{D}$).

Consideramos subgrupos

$$\tilde{\Gamma} = \{X \in \mathbb{D}(\mathbb{Z}) \mid N(X) = 1\} \quad \text{y} \quad \tilde{\Gamma}(p) = \{X \in \tilde{\Gamma} \mid X \equiv 1(p)\}.$$

Tenemos un isomorfismo de $\tilde{\Gamma}$ con un subgrupo de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ dado por

$$X = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 + x_1\sqrt{a} & x_2 + x_3\sqrt{a} \\ b(x_2 - x_3\sqrt{a}) & x_0 - x_1\sqrt{a} \end{pmatrix}.$$

Vamos a denotar las imágenes de $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\Gamma}(p)$ por Γ y $\Gamma(p)$, respectivamente. Entonces $\{\Gamma(p) < \Gamma\}_p$ primo es una secuencia de *subgrupos de congruencia* de Γ , como antes, pero ahora $\Gamma(p) \backslash \mathbb{H}^2$ es compacto para todo p . La última afirmación se deduce del hecho de que \mathbb{D} es un álgebra de división (ver [GGPS69, el apéndice para el capítulo 1] para una exposición buena, corta y clara de este material). Además, para $p > 2$ tenemos que $\Gamma(p)$ no tiene torsión (i.e. elementos elípticos de orden finito), entonces $S_p = \Gamma(p) \backslash \mathbb{H}^2$ son superficies riemannianas compactas.

Por la fórmula de Riemann–Hurwitz, el género es igual a

$$\begin{aligned} g(S_p) &= \frac{1}{2}p(p-1)(p+1) \frac{|\chi(\Gamma \backslash \mathbb{H}^2)|}{2} + 1 \\ &= p(p-1)(p+1)\nu + 1, \end{aligned}$$

donde $\nu = \nu(a, b)$ es una constante positiva definida por la característica de Euler de $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$.

Ahora vamos a estimar la sístole de S_p . Sea $p > 0$ un número primo y

$$\alpha = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \tilde{\Gamma}(p).$$

Tenemos que $p|x_j$ para $j = 1, 2, 3$, y

$$1 = N(\alpha) = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x_0^2 &\equiv 1(p^2); \\ x_0 &\equiv \pm 1(p^2). \end{aligned}$$

Si $\alpha \neq \pm 1$, entonces $x_0 \neq \pm 1$ (pues Γ no tiene elementos parabólicos), y por eso

$$|x_0| \geq p^2 - 1.$$

Entonces, si $\gamma \in \Gamma(p)$ y $\gamma \neq 1$, tenemos que

$$|\operatorname{tr}(\gamma)| \geq 2p^2 - 2.$$

En particular, esto confirma que $\gamma \in \Gamma(p)$ son hiperbólicos y entonces $S_p = \Gamma(p) \backslash \mathbb{H}^2$ es de hecho una superficie suave.

La fórmula (1.1) implica que

$$\ell(\gamma) > 2 \log (|\operatorname{tr}(\gamma)| - 1),$$

y entonces para $\gamma \in \Gamma(p)$,

$$\ell(\gamma) > 2 \log(2p^2 - 3).$$

Esto implica:

Teorema 1.2.4 (Buser–Sarnak [BS94]). *Para la secuencia de variedades S_p tenemos*

$$\operatorname{sys}_1(S_p) \geq \frac{4}{3} \log(g(S_p)) - C,$$

donde $C > 0$ no depende de p .

Este resultado fue posteriormente generalizado para otras variedades aritméticas de dimensión 2 y 3 por Katz, Schaps y Vishne [KSV07].

Ejercicios 1.2.5. 1. *Calcula la constante C .*

2. *Generaliza el resultado para variedades no compactas como M_p .*

Otra mirada a las sístoles de los espacios de recubrimiento proviene de la teoría geométrica de grupos. Según Gromov, podemos definir la noción de una *sístole de un grupo* finitamente generado por un conjunto X , de modo que si $\Gamma = \pi_1(M)$ tenemos que

$$\text{sys}_1(\Gamma, X) \simeq \text{sys}_1(M).$$

Más precisamente, sea M una variedad riemanniana compacta esférica (i.e. el recubrimiento universal de M es contráctil) y $\Gamma = \pi_1(M)$. Consideramos una secuencia de recubrimientos:

$$M_i \rightarrow M \text{ de grado } d_i.$$

Podemos considerar la secuencia correspondiente de subgrupos $\Gamma_i = \pi_1(M_i) < \Gamma$ de índice d_i . Ahora fijemos un conjunto de generadores $X \subset \Gamma$ y definimos $\text{sys}_1(\Gamma_i, X)$ como la mínima longitud de X -palabras de un elemento no trivial de Γ_i .

Propiedades:

- Si $\Gamma_i < \Gamma$ es un subgrupo normal, X genera un subgrupo libre de Γ y es simétrico (i.e. $X = X^{-1}$), entonces tenemos que $\text{sys}_1(\Gamma_i, X)$ es igual a la sístole del grafo de Cayley del grupo Γ/Γ_i con respecto a la proyección de los generadores de X .
- Para cualquier otro conjunto de generadores X' de Γ tenemos

$$C_1 \leq \frac{\text{sys}_1(\Gamma_i, X)}{\text{sys}_1(\Gamma_i, X')} \leq C_2,$$

donde $C_1, C_2 > 0$ no dependen de i .

Por esta propiedad podemos suprimir X de la notación de sístole cuando se estudia su comportamiento asintótico.

- Existen también dos constantes positivas D_1, D_2 que no dependen de i tales que

$$D_1 \leq \frac{\text{sys}_1(M_i)}{\text{sys}_1(\Gamma_i, X)} \leq D_2.$$

Ejemplos:

- (1) Si Γ es un grupo abeliano libre de rango n , entonces $\text{sys}_1(\Gamma_i) \lesssim d_i^{1/n}$ y esta desigualdad es óptima, i.e. existe una secuencia $\{\Gamma_i\}$ con $\text{sys}_1(\Gamma_i) \simeq d_i^{1/n}$.
- (2) Si Γ es un grupo nilpotente sin torsión de crecimiento polinomial de grado m , entonces $\text{sys}_1(\Gamma_i) \lesssim d_i^{1/m}$ y esta desigualdad es óptima.

- (3) Si Γ tiene crecimiento exponencial, entonces $\text{sys}_1(\Gamma_i) \lesssim \log(d_i)$. Un ejemplo de Γ de este tipo es $\Gamma = \pi_1(M)$ para una variedad riemanniana M de curvatura estrictamente negativa.

La desigualdad en el ejemplo (3) es asintóticamente óptima gracias al lema siguiente:

Lema 1.2.6. *Sea $\Gamma < \text{SL}_n(\mathbb{Z})$ con conjunto de generadores X y sean $\{\Gamma(p) < \Gamma\}$ sus subgrupos de congruencia módulo primos p . Entonces*

$$\text{sys}_1(\Gamma(p), X) \geq C \log p, \text{ con } C = C(X) \text{ una constante positiva.}$$

(En [G92], Gromov supone que Γ no tiene los elementos unipotentes pero esto no es necesario.)

Ejercicio 1.2.7. *Dar una prueba del lema.*

Los resultados de Buser–Sarnak y Katz–Schaps–Vishne son casos particulares de esta lema, pero notar que en estos casos ellos saben también el *valor de la constante* C . El lema también se aplica para subgrupos de congruencia de grupos *no aritméticos* finitamente generados. Infelizmente, la prueba del lema no da información para calcular C , sólo estimaciones muy aproximadas.

El famoso teorema (lema) de Milnor y Schwartz muestra que si un grupo Γ actúa geoméricamente en un espacio riemanniano X , entonces Γ es finitamente generado y quasi-isométrico con X , en particular, Γ y X tienen el mismo tipo de crecimiento. Este resultado explica la relación entre sístoles de espacios y de grupos.

Después de la clase, Andrzej Zuk mencionó el siguiente problema interesante:

Problema abierto 1.2.8. *¿Existen un espacio métrico M y una secuencia infinita de cubrimientos $\{M_i \rightarrow M\}$ tal que $\text{sys}_1(M_i) \geq C \log(\text{vol}(M_i)) - C'$ con $C > \frac{4}{3}$?*

1.3. Propiedades geométricas de las superficies de congruencia

1.3.1.

En esta sección vamos a investigar principalmente superficies riemannianas (sin frontera) de curvatura -1 . Sea S una superficie hiperbólica dada por $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$, con $\Gamma < \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ un subgrupo fuchsiano.

Sea Δ el operador de Laplace en S (entonces $\Delta(f) = -\operatorname{div} \operatorname{grad}(f)$), y sean $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \dots$ los autovalores de Δ . El primer autovalor positivo λ_1 es llamado el *gap espectral* de S . Podemos calcular este autovalor por la fórmula de Rayleigh:

$$\lambda_1(S) = \inf_f \frac{\int_S \|\operatorname{grad} f\|^2 dV}{\int_S f^2 dV}, \quad (1.2)$$

donde el ínfimo es tomado sobre las funciones f con soporte compacto en S y tal que $\int_S f dV = 0$. Aquí dV , grad , etc. son definidos usando la métrica hiperbólica que descende de \mathbb{H}^2 .

Es fácil ver que λ_1 se puede hacer arbitrariamente pequeño, incluso para superficies S de un género fijo.

Ejemplo 1.3.1. Consideremos una secuencia de superficies $\{S_i\}$ de género 2 con $\operatorname{sys}_1(S_i) = \ell(\gamma_i)$ y tal que γ_i separa S_i en dos partes. En este caso

$$\text{si } \ell(\gamma_i) \rightarrow 0 \text{ cuando } i \rightarrow \infty, \text{ tenemos } \lambda_1(S_i) \rightarrow 0.$$

Ciertamente, podemos tomar $f = f_i$ en (1.2) tal que $f_i = \text{const}$ fuera de una vecindad del collar de γ_i . En este caso $\int_{S_i} \|\operatorname{grad} f_i\|^2 dV$ es proporcional a $\ell(\gamma_i)$ y al mismo tiempo podemos tener $\int_{S_i} f_i^2 dV = 1$ (y $\int_{S_i} f_i dV = 0$). Entonces $\lambda_1(S_i) \leq c\ell(\gamma_i) \rightarrow 0$ por (1.2).

1.3.2.

Ahora sea M una variedad riemanniana compacta de dimensión n y con curvatura $-1 \leq \kappa \leq -a^2$ (“pinched negative”). Tenemos los siguientes resultados:

Teorema 1.3.2 (Cheeger [C70]).

$$\lambda_1(M) \geq \frac{1}{4} h(M)^2,$$

donde h es la constante isoperimétrica de Cheeger definida por

$$h(M) = \inf_N \frac{\operatorname{area}(N)}{\min(\operatorname{vol}(M_1), \operatorname{vol}(M_2))},$$

donde la hipersuperficie N tiene dimensión $n - 1$ y divide M en dos partes, M_1 y M_2 .

Teorema 1.3.3 (Buser [B82]).

$$\lambda_1(M) \leq c_1 h(M) + c_2 h(M)^2,$$

donde c_1 y c_2 son constantes positivas explícitas.

Observación 1.3.4. El teorema de Cheeger es verdad para cualquier variedad riemanniana compacta y tiene una generalización para las variedades no compactas; la constante $\frac{1}{4}$ en el teorema es óptima. En el teorema de Buser para dimensión 2 y curvatura -1 podemos tomar $c_1 = 2$, $c_2 = 10$, pero estos valores pueden no ser óptimos.

Teorema 1.3.5 (Brooks [Br92]).

$$\text{diam}(M) \leq C_1(h, r) \log \text{vol}(M) + C_2(h, r),$$

donde las constantes $C_1(h, r)$, $C_2(h, r) > 0$ dependen sólo de la constante isoperimétrica $h(M)$ y el radio de inyectividad $r(M)$.

La prueba del teorema de Brooks es corta y bonita:

Demostración. Sea $x \in M$, denotemos por $V(t, x)$ el volumen de una bola de radio t y centro x en M .

Si la curvatura de M es $\leq -a^2$ y $t \leq r$, el radio de inyectividad, podemos acotar $V(t, x)$ por debajo por el volumen de una bola de radio t en el espacio hiperbólico de curvatura constante $= -a^2$.

Ahora suponga que $t > r$. En este caso tenemos

$$\frac{V'(t, x)}{V(t, x)} \geq h,$$

mientras que $V(t, x) < \frac{1}{2} \text{vol}(M)$. (Esto es porque el cambio infinitesimal del volumen es el área de la frontera.)

Mediante la integración obtenemos

$$V(t, x) \geq e^{h(t-r)} V(r, x) \text{ hasta } V(t, x) = \frac{1}{2} \text{vol}(M),$$

que ocurre cuando

$$t = t_0 = \frac{1}{h} \left(\log(\text{vol}(M)) - \log(2) - \log(V(r)) \right) + r.$$

Entonces para cualquier $x, y \in M$ tenemos $\mathbb{B}_{t_0}(x) \cap \mathbb{B}_{t_0}(y) \neq \emptyset$, y esto implica $\text{diam}(M) \leq 2t_0$. \square

Ejercicio 1.3.6. Investigar $h(S)$ y $\text{diam}(S)$ para S en el Ejemplo 1.3.1.

1.3.3.

Ahora volvamos a las superficies de congruencia $\{M_p \rightarrow M\}$ con

$$M_p = \Gamma(p) \backslash \mathbb{H}^2 \text{ con } \Gamma(p) = \ker(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})).$$

Un problema fundamental abierto es

Conjetura 1.3.7 (Selberg [Se65]). $\lambda_1(M_p) \geq \frac{1}{4}$.

Si la conjetura es cierta, la estimación es óptima. Esta conjetura tiene muchas aplicaciones importantes, ver [S95] y las referencias allí.

Selberg mostró en el mismo artículo el siguiente resultado:

Teorema 1.3.8 (Selberg). *Tenemos* $\lambda_1(M_p) \geq \frac{3}{16}$.

Nosotros vamos a probar un resultado un poco más débil siguiendo a Sarnak y Xue [SX91] (ver también [S95]).

El grupo de transformaciones de recubrimiento $M_p \rightarrow M$ es $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Suponga que existe un autovalor λ *excepcional*, i.e. $0 \leq \lambda \leq 1/4$. Primero podemos ver que λ tiene que tener una *multiplicidad alta*. Sea V_λ el espacio propio que corresponde a λ . El laplaciano conmuta con las transformaciones de recubrimiento, entonces Δ actúa en V_λ , y por esto V_λ tiene que contener una representación irreducible no trivial de G . Por un teorema de Frobenius, cualquier representación irreducible no trivial de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ tiene dimensión $\geq (p-1)/2$. Llegamos a la conclusión que $\dim(V_\lambda) \geq (p-1)/2$. La idea es mostrar que un pequeño autovalor no puede tener una multiplicidad $m(\lambda, M_p)$ tan grande.

Sarnak y Xue mostraron que para $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$m(\lambda, M_p) \leq C_\epsilon |\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|^{1-2\nu+\epsilon}, \quad (1.3)$$

donde $\lambda = 1/4 - \nu^2$ ($0 \leq \lambda \leq 1/4$).

Ejercicio 1.3.9 (\star). *Dar una prueba de (1.3).*

La combinación de (1.3) con la desigualdad para $\dim(V_\lambda)$ y la información sobre $|G|$ implica:

$$p-1 \leq K p^{3(1-2\nu+\epsilon)}.$$

Para p suficientemente grande, eso es posible sólo si $3(1-2\nu+\epsilon) \geq 1$, lo cual implica que

$$\lambda_1(M_p) \geq \frac{5}{36} - \epsilon.$$

Para el último resultado de este tipo que da $\lambda_1(M_p) \geq \frac{975}{4096}$ ver [KS03]. Vigneras en [V83] probó que $\lambda_1(S_p) \geq \frac{3}{16}$ para cualquier superficie aritmética de congruencia, incluidas las superficies compactas de Buser y Sarnak. En [BS91], Burger y Sarnak probaron un resultado de este tipo para variedades hiperbólicas de dimensión $n \geq 3$, mostrando que $\lambda_1(M_p^n) \geq \frac{2n-3}{4}$. El caso general de la conjetura de Selberg es conocido como la *conjetura de Ramanujan generalizada*.

Ejercicio 1.3.10. Investigar $h(S_p)$ y $\text{diam}(S_p)$ para las superficies de Buser–Sarnak.

1.3.4.

Una idea de Kazhdan fue que podemos obtener estimaciones no triviales para $\lambda_1(M_p)$ usando solamente las informaciones sobre $\text{sys}_1(M_p)$ y $\dim(V_\lambda)$, pero Brooks [Br88] mostró que $\text{sys}_1(M_p) \sim \frac{4}{3} \log(|G|)$ no es suficiente para eso. Con cualquier constante $> \frac{4}{3}$ se podría dar una prueba completamente geométrica de $\lambda_1(M_p) \geq \delta > 0$.

En su artículo [Br92], Brooks caracteriza superficies de congruencia como:

- (a) cortas y gordas;
- (b) con simetrías interesantes.

La primera propiedad está relacionada con el diámetro y el sístole, mientras que la segunda es sobre el grupo $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Lo que es interesante aquí no es sólo el número de simetrías, sino también las representaciones del grupo.

Problema 1.3.11. Investigar cómo estas propiedades dependen del espacio simétrico \mathcal{X} , que en nuestro caso fue el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 .

1.4. La descomposición de Heegaard de la 3-variedad

En esta sección vamos a revisar algunos resultados de topología en dimensión 3. El objetivo es entender mejor la topología de 3-variedades de congruencia y por eso es necesario conocer algunos invariantes topológicos. Más información sobre este tema se puede encontrar, por ejemplo, en las notas de Scharlemann [Sch03] y Saito–Scharlemann–Schultens [SSS05]. Un recurso imprescindible para la topología de 3-variedades es las notas de Thurston [Th78].

Vamos asumir en toda la sección que M es una variedad topológica compacta orientable de dimensión 3 posiblemente con borde.

1.4.1.

Un teorema fundamental de Moise dice que toda 3-variedad M puede ser triangulada:

Teorema 1.4.1 (Moise, 1952). (1) *Cualquier 3-variedad compacta M es homeomorfa a un complejo simplicial finito.*

(2) *Si M es homeomorfa a dos complejos K y L , entonces el homeomorfismo $K \rightarrow L$ es isotópico a un homeomorfismo PL (lineal por partes).*

Supongamos que $(M, \partial M)$ y $(N, \partial N)$ son variedades compactas. Diremos que la inclusión $(N, \partial N) \hookrightarrow (M, \partial M)$ es *propia* si $\partial M \cap N = \partial N$.

La topología PL implica las siguientes propiedades:

- 1) Un punto en el interior de M posee una vecindad (cerrada) homeomorfa a un 3-bola.
- 2) Un arco α propiamente encajado en $(M, \partial M)$ tiene una vecindad homeomorfa a $\alpha \times \mathbb{D}^2$, donde \mathbb{D}^2 es un disco.
- 3) Si M es orientable y c es un círculo en el interior de M , entonces c tiene una vecindad homeomorfa a $c \times \mathbb{D}^2$.
- 4) Si M es orientable y S es una superficie orientable propiamente encajada en M , entonces S tiene una vecindad homeomorfa a $S \times I$, con $I = [0, 1]$.

Adjuntando una asa: Sea M una 3-variedad con borde.

- Adjuntando una 1-asa a M significa la construcción que define una variedad $M \cup_h (I \times \mathbb{D}^2)$, donde \mathbb{D}^2 es un disco y $h : (\partial I) \times \mathbb{D}^2 \rightarrow \partial M$ es un encaje.
- Adjuntando una 2-asa a M significa $M \cup_h (\mathbb{D}^2 \times I)$, donde $h : (\partial \mathbb{D}^2) \times I \rightarrow \partial M$ es un encaje.

Si h preserva la orientación, entonces M con un asa es orientable. Un *cubo con asas* de género g es una bola \mathbb{B}^3 con g 1-asas adjuntadas.

Proposición 1.4.2. *Si M es una 3-variedad compacta sin borde y K es una triangulación de M , entonces una vecindad cerrada $\eta(K^1)$ y su complemento $M \setminus \text{int}(\eta(K^1))$ son cubos con asas.*

Demostración. Sea $\Gamma = K^1$, un grafo finito conectado, y Γ' un árbol máximo de Γ . Entonces $\eta(\Gamma)$ puede ser obtenida adjuntando $e(K^1) - e(\Gamma')$ 1-asas a $\eta(\Gamma')$, que es una bola (aquí $e(\cdot)$ denota el número de aristas de un grafo).

Para $M \setminus \text{int}(\eta(K^1))$ tenemos que usar el mismo argumento para una triangulación de M dual a K . \square

Ejercicio 1.4.3. *Calcular el género de $\eta(K^1)$ en función de los números de vértices y aristas de K^1 .*

Corolario 1.4.4. *Sea M una 3-variedad compacta sin borde. Entonces $M = H_1 \cup_h H_2$, donde H_1 y H_2 son cubos con asas y $h : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$ es un homeomorfismo.*

Definición 1.4.5. *La descomposición $M = H_1 \cup_h H_2$ (o $M = H_1 \cup_S H_2$ con $S = \partial H_1 = \partial H_2$) es llamada la descomposición de Heegaard y el mínimo posible género de S es llamado el género de Heegaard de M .*

La única 3-variedad compacta sin borde de género de Heegaard igual a 0 es la 3-esfera, y las variedades de género 1 son los espacios lente. Los espacios hiperbólicos tienen el género de Heegaard ≥ 2 .

Definición 1.4.6. *Sea F una superficie cerrada no homeomorfa a la esfera \mathbb{S}^2 . Un cuerpo de compresión H es una 3-variedad obtenida de $F \times I$ adjuntando 2-asas a $F \times \{1\}$. Vamos a denotar $F \times \{0\}$ por $\partial_- H$ y $\partial H - F \times \{0\}$ por $\partial_+ H$. Sin asas adjuntadas, $F \times I$ es un cuerpo de compresión trivial.*

- Observaciones 1.4.7.**
- 1) Sea S una superficie cerrada y M la variedad obtenida de $S \times I$ adjuntando 2-asas y llenando 2-esferas por 3-bolas. Entonces M es un cubo con asas o un cuerpo de compresión.
 - 2) Una descomposición de Heegaard $H_1 \cup_h H_2$ es llamada *trivial* si H_1 o H_2 es un cuerpo de compresión trivial, i.e. homeomorfo a $S \times I$.
 - 3) También puede ser definida la descomposición de Heegaard de variedades con borde.

1.4.2.

Vamos a considerar las superficies en 3-variedades.

Definición 1.4.8. *Sea F una superficie.*

- Una curva γ simple cerrada en F es llamada no esencial si ella divide a F en dos partes, una de las cuales es un disco; caso contrario γ es esencial.

- Un arco α propiamente encajado en F es llamado no esencial si junto con un arco en ∂F delimita un disco, y en el caso contrario α es esencial.

Sea Γ una 1-variedad propiamente encajada en la superficie F . Si una componente de Γ es una curva simple no esencial, entonces una componente α de Γ encierra un disco en F que es disjunto de Γ . Esta curva α es llamada un *círculo interior* de Γ .

Definición 1.4.9. Sea T una superficie encajada en una 3-variedad M . La superficie T es llamada compresible si T encierra una 3-bola en M o existe una curva esencial simple cerrada $\gamma \subset T$ que encierra un disco D en M tal que $\text{int}(D) \cap T = \emptyset$. En caso contrario T es llamada no compresible.

El siguiente resultado es el famoso *teorema del lazo*:

Teorema 1.4.10 (Papakyriakopoulos, 1956). Sean M una 3-variedad, T una superficie propiamente encajada en M e $i : T \hookrightarrow M$ la inclusión. Si $i_* : \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(M)$ no es inyectiva, entonces T es compresible.

Corolario 1.4.11. Cualquier superficie propiamente encajada T en \mathbb{S}^3 es compresible.

Demostración. Si T no es homeomorfa a la esfera \mathbb{S}^2 entonces $i_* : \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^3)$ no es inyectiva, y por el teorema T es compresible. Si T es homeomorfa a \mathbb{S}^2 , entonces T encierra una 3-bola en \mathbb{S}^3 y T es compresible por la definición. \square

Sea T una superficie propiamente encajada en una 3-variedad M . Si existe un disco D en M tal que $D \cap T = \partial D$, entonces existe una 3-bola $B = D \times I$ tal que $B \cap T = \partial D \times I$. Sea

$$T' := (T - \partial D \times I) \cup D \times \{0, 1\}.$$

Esta construcción es llamada *2-cirugía en T a lo largo de D* . Tenemos

$$\chi(T') = \chi(T) + 2.$$

Definición 1.4.12. Una 3-variedad M es llamada reducible si M contiene una 2-esfera no compresible; caso contrario M es irreducible.

Sea M una 3-variedad reducible con esfera P que la reduce y con un disco D tal que $D \cap P = \partial D$. Podemos considerar superficie P' obtenida por 2-cirugía en P a lo largo de D . En este caso P' tiene dos componentes y una de éstas es también una esfera que reduce M .

Suponga que M_1 y M_2 son dos 3-variedades, y que S_i son 2-esferas que encierran 3-bolas B_i en M_i , $i = 1, 2$. La variedad $(M_1 - \text{int}(B_1)) \cup (M_2 - \text{int}(B_2))$, denotada por $M_1 \# M_2$, es llamada la *suma conexa* de M_1 y M_2 . El siguiente teorema muestra que cada 3-variedad es una suma conexa de variedades irreducibles.

Teorema 1.4.13 (Kneser, 1929; Milnor, 1957). *Sea M una 3-variedad compacta, orientable. Entonces $M = M_1 \# \dots \# M_n \# (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \dots \# (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)$, donde cada M_i es irreducible. Además, la descomposición es única salvo cambios de orden.*

1.4.3.

Ahora volvemos a las descomposiciones de Heegaard.

Definición 1.4.14. *Sea M una 3-variedad con una descomposición de Heegaard $M = H_1 \cup_S H_2$.*

- *La descomposición $H_1 \cup_S H_2$ es llamada estabilizada si tenemos dos discos propiamente encajados $D_i \subset H_i$, $i = 1, 2$ tales que ∂D_1 interseca ∂D_2 transversalmente en un punto.*
- *La descomposición es llamada reducible si tenemos dos discos propiamente encajados $D_i \subset H_i$ tales que $\partial D_1 = \partial D_2$; en el caso contrario la descomposición es irreducible.*

Observación 1.4.15. Una definición equivalente de la descomposición de Heegaard reducible dice que existe una 2-esfera P en M tal que $P \cap S$ es esencial en S y tiene sólo una componente.

Ejercicio 1.4.16. *Prueba la equivalencia de las definiciones.*

Proposición 1.4.17. *Sea $H_1 \cup_S H_2$ una descomposición de Heegaard estabilizada. Entonces ella es reducible o ella es una descomposición estándar de género uno de \mathbb{S}^3 .*

Demostración. Sean $D_i \subset H_i$ discos propiamente encajados tales que $|\partial D_1 \cap \partial D_2| = 1$. Sea B la unión de las vecindades bicollares de D_1 en H_1 y D_2 en H_2 . En este caso B es una 3-bola con el borde $P = \partial B$. Podemos mover un poco P de modo que ella cruce cada H_i en un hemisferio y la curva $\gamma = P \cap S$ separe de S un toro pinchado. Si γ es esencial en S entonces P es una esfera que reduce la descomposición. Si γ no es esencial, entonces S es un toro que divide M en dos toros sólidos cuyos meridianos se cruzan en un solo punto. Ésta es una descomposición de Heegaard de género 1 de \mathbb{S}^3 . □

Suponga que M es una 3-variedad con una descomposición de Heegaard $H_1 \cup_S H_2$ y M' es otra 3-variedad con una descomposición $H'_1 \cup_{S'} H'_2$. Entonces la variedad $M \# M'$ tiene una descomposición de Heegaard natural definida como sigue: Sea D un disco en S y D' un disco en S' . Definimos

$$H''_1 = H_1 \cup_{D=D'} H'_1 \text{ y } H''_2 = H_2 \cup_{D=D'} H'_2.$$

Podemos verificar que H''_1 y H''_2 son los cuerpos de compresión, y que

$$H''_1 \cup_{\partial_+ H''_1 = \partial_+ H''_2} H''_2$$

es una descomposición de Heegaard reducible de la variedad $M \# M'$. La pregunta natural es si es verdad que cualquier descomposición de Heegaard de una variedad reducible es reducible. La respuesta está dada por el conocido teorema de Haken:

Teorema 1.4.18 (Haken, 1968). *Sea M una 3-variedad reducible y $M = H_1 \cup_S H_2$ una descomposición de Heegaard. Entonces existe una esfera P que reduce M y tal que $P \cap S$ es un círculo, i.e. la descomposición de Heegaard es reducible.*

Idea de la prueba. Podemos suponer que P cruza uno de los cuerpos de compresión H_1 o H_2 sólo en discos. La idea es minimizar el número de los discos inductivamente para reducir al caso cuando tenemos sólo uno de ellos.

Sea P tal que cruza H_2 sólo en discos y consideremos la superficie $P_2 := P \cap H_1$. Apliquemos todas las posibles compresiones para P_1 y veamos qué ocurre con P : ella se convierte en una unión de 2-esferas; por lo menos una de las cuales es una esfera de compresión. Vamos a denotarla por P_2 . Ahora podemos repetir la misma operación con P_2 , etc. Es posible verificar que en cada paso el número de discos disminuye. \square

Observación 1.4.19. Otro método para probar el mismo teorema usa grafos (“spine”) de cuerpos de compresión.

Ejercicio 1.4.20 (\star). *Dar los detalles de la prueba.*

1.5. Los cubrimientos de congruencia de una 3-variedad aritmética

En esta sección vamos a investigar el comportamiento del género de Heegaard en las secuencias de expansores geométricos.

Primero tenemos que definir estos tipos de variedades en dimensión 3. Sea $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^3$, con $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathcal{O}_d) < \text{PSL}_2(\mathbb{C})$, donde \mathcal{O}_d denota el anillo de los enteros del

cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $d \in \mathbb{Z}_{>0}$. Estos grupos Γ son llamados los *grupos de Bianchi*. Por ejemplo, para $d = 1$ tenemos $\mathcal{O}_d = \mathbb{Z}[i]$, los enteros Gaussianos, y $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]) < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ es el *grupo de Picard*. Uno de estos grupos fue considerado en el ejemplo en Sección 1.1.4.

Ahora, similarmente a la Sección 1.2, tomemos una secuencia

$$M_{\mathcal{P}} = \Gamma(\mathcal{P}) \backslash \mathbb{H}^3 \text{ con}$$

$$\Gamma(\mathcal{P}) = \ker(\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_d) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_d/\mathcal{P})), \mathcal{P} \text{ es un ideal primo en } \mathcal{O}_d.$$

Esto da una secuencia de cubrimientos $M_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ de grados finitos. Para los ideales \mathcal{P} con la norma suficientemente grande las variedades $M_{\mathcal{P}}$ son suaves. Como en el caso de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, todas ellas son no compactas pero completas y con volúmenes finitos. Para definir variedades compactas de este tipo necesitamos otra vez usar álgebras de cuaterniones (ver [MR03]).

Lema 1.2.6 implica que para $\|\mathcal{P}\| \gg 1$,

$$\mathrm{sys}_1(M_{\mathcal{P}}) \geq C \log(\|\mathcal{P}\|).$$

En [BCW04], Bachman, Cooper y Whyte probaron un resultado interesante que da una estimación del género de Heegaard g de una variedad hiperbólica compacta dependiendo de su radio de inyectividad r :

$$g \geq \frac{\cosh(r)}{2}.$$

Ya que en el caso compacto $r(M) = \mathrm{sys}_1(M)/2$, la combinación de estos resultados implica que existe una constante $\gamma > 0$ tal que para \mathcal{P} suficiente grande tenemos

$$g(M_{\mathcal{P}}) \geq \mathrm{vol}(M_{\mathcal{P}})^{\gamma}.$$

El siguiente resultado muestra que podemos tomar $\gamma = 1$, que es asintóticamente óptima. Este teorema fue probado por Lackenby (2006) e independientemente por Gromov (2009). Las pruebas usan algunos resultados importantes de geometría diferencial.

Teorema 1.5.1 ([L06], [G09]). *El género de Heegaard de variedades compactas congruencia $M_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ satisface*

$$C_1 \mathrm{vol}(M_{\mathcal{P}}) \leq g(M_{\mathcal{P}}) \leq C_2 \mathrm{vol}(M_{\mathcal{P}}),$$

donde C_1, C_2 son constantes positivas que dependen sólo de M .

Demostración. Sea $M = M_1 \cup_S M_2$ una descomposición de Heegaard de la 3-variedad M con género $g = g(S)$ que es igual al género de Heegaard de M . Podemos asumir que $g \geq 2$.

La superficie de Heegaard S define un *sweepout* S_t , $t \in [0, 1]$, de M (i.e. una aplicación continua $f : [0, 1] \times S \rightarrow M$ tal que $f(t) = S_t$, S_0 y S_1 son grafos, S_t es isotópico a S por todos $0 < t < 1$ y $\text{Im}(f) = M$). Supongamos que S_{t_0} tiene área máxima entre las superficies S_t , $t \in (0, 1)$. El ínfimo de estas áreas entre todos los posibles sweepouts S_t es llamado *área mínmax* de S . Por Pitts y Rubinstein [PR85], en este caso existe una *superficie mínima* F en M que tiene área igual al área mínmax y el género $g(F) \leq g(S)$.

Sean h_{ij} las componentes de la segunda forma fundamental de F y R_{ij} las componentes de la curvatura seccional de M . Por el teorema de Gauss–Bonnet y la fórmula de Gauss tenemos

$$\int_F R_{12} + h_{11}h_{22} - h_{12}^2 ds = 2\pi\chi(F).$$

Como F es una superficie mínima, $h_{11} + h_{22} = 0$, y al ser M hiperbólica, $R_{12} = -1$, entonces:

$$\begin{aligned} \int_F -1 - h_{11}^2 - h_{12}^2 ds &= 2\pi\chi(F); \\ \int_F 1 ds &= \int_F -h_{11}^2 - h_{12}^2 ds - 2\pi\chi(F) \leq -2\pi\chi(F) = 4\pi(g(F) - 1); \\ \text{área}(F) &\leq 4\pi(g(F) - 1) \leq 4\pi(g(S) - 1). \end{aligned}$$

Entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un sweepout S_t^ϵ tal que el área máxima de superficies en S_t^ϵ es $\leq 4\pi(g - 1) + \epsilon$.

Sea G la superficie de S_t^ϵ que divide M en dos partes iguales (tal superficie siempre existe por continuidad). Por la definición de la constante de Cheeger tenemos:

$$\begin{aligned} h(M) &\leq \frac{\text{área}(G)}{\text{vol}(M)/2} \leq \frac{8\pi(g - 1)}{\text{vol}(M)} + \frac{2\epsilon}{\text{vol}(M)}; \\ g &\geq \frac{h(M)\text{vol}(M)}{8\pi} - \frac{\epsilon}{4\pi} + 1. \end{aligned}$$

Ahora recordamos que para las variedades de congruencia $\lambda_1(M_{\mathcal{P}}) \geq c_1$ (por [BS94]) y entonces por la desigualdad de Buser (ver Teorema 1.3.3), $h(M_{\mathcal{P}}) \geq c_2 > 0$. Esto implica $g \geq C_1 \text{vol}(M_{\mathcal{P}})$.

La desigualdad opuesta es fácil: Es suficiente levantar una triangulación de M para $M_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ y ver que la descomposición de Heegaard de $M_{\mathcal{P}}$ definida por esta triangulación tiene el género $\leq c_3 \text{grado}(M_{\mathcal{P}} \rightarrow M) = C_2 \text{vol}(M_{\mathcal{P}})$ (con $C_2 = c_3 \text{vol}(M)$). \square

Ejercicio 1.5.2. *Generalice este resultado para las 3-variedades de congruencia no compactas.*

Ejercicio 1.5.3. *Investigue las propiedades de descomposiciones de Heegaard obtenidas en la prueba del teorema.*

Con las ideas similares Gromov mostró:

Teorema 1.5.4 ([G09]). *Para cualquier aplicación suave genérica $F : M_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}$ existe una fibra de F con suma de números de Betti $\geq C \text{vol}(M_{\mathcal{P}})$.*

Podemos comparar esta *desigualdad de fibra complicada* con la definición de los grafos expansores. La conclusión es que las secuencias de 3-variedades de congruencia pueden ser consideradas como *expansores geométricos* (o topológicos) de dimensión tres.

Problema abierto 1.5.5. *¿Hay un análogo de esta propiedad para las variedades aritméticas en dimensiones superiores?*

Agradecimientos. Me gustaría agradecer a Maria Campana Ramia, a Emilio Lauret, a Plinio Pino Murillo y al referí por haber revisado este texto.

Bibliografía

- [BCW04] D. Bachman, D. Cooper, M. White, Large embedded balls and Heegaard genus in negative curvature, *Algebr. Geom. Topol.* **4** (2004), 31–47
- [Br88] R. Brooks, Injectivity radius and low eigenvalues of hyperbolic manifolds, *J. Reine Angew. Math.* **390** (1988), 117–129.
- [Br92] R. Brooks, Some relations between spectral geometry and number theory, en *Topology'90* (Columbus, OH, 1990), Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., Vol. 1, de Gruyter, Berlin, 1992, pp. 61–75.
- [BS91] M. Burger, P. Sarnak, Ramanujan duals. II, *Invent. Math.*, **106** (1991), 1–11.
- [B82] P. Buser, A note on the isoperimetric constant, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **15** (1982), 213–230.
- [BS94] P. Buser, P. Sarnak, On the period matrix of a Riemann surface of large genus, With an appendix by J. Conway and N. Sloane, *Invent. Math.* **117** (1994), 27–56.
- [C70] J. Cheeger, A lower bound for the smallest eigenvalue of the laplacian, en *Gunning, "Problems in Analysis" Annals of Math. Studies 31* (Princeton University Press, 1970), pp. 195–199.
- [EGM] J. Elstrodt, F. Grunewald, and J. Mennicke, *Groups Acting on Hyperbolic Space*, Harmonic Analysis and Number Theory, Springer Monogr. Math., Springer, Berlin, 1998.
- [GGPS69] I. M. Gel'fand, M. I. Graev, and I. I. Pyatetskii-Shapiro, *Representation theory and automorphic functions*, Generalized Functions, vol. 6, Academic Press Inc., Boston, MA, 1990. Translated from the Russian by K. A. Hirsch; Reprint of the 1969 edition.

- [G92] M. Gromov, Systoles and intersystolic inequalities, en *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle* (Luminy, 1992), 291–362, Sémin. Congr. **1**, Soc. Math. France, Paris, 1996.
- [G09] M. Gromov, Singularities, expanders and topology of maps. Part 1: Homology versus volume in the spaces of cycles, *Geom. Funct. Anal.* **19** (2009), 743–841.
- [KSV07] M. Katz, M. Schaps, U. Vishne, Logarithmic growth of systole of arithmetic Riemann surfaces along congruence subgroups, *J. Diff. Geom.* **76** (2007) 399–422.
- [KS03] H. Kim and P. Sarnak, Refined estimates towards the Ramanujan and Selberg conjectures, *J. American Math. Soc.* **16** (2003), 175–181.
- [L06] M. Lackenby, Heegaard splittings, the virtually Haken conjecture and property (τ) , *Invent. Math.*, **164** (2006), 317–359.
- [MR03] C. Maclachlan, A. W. Reid, *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, Grad. Texts in Math. **219**, Springer, New York, 2003.
- [PR85] J. Pitts, J. H. Rubinstein, Existence of minimal surfaces of bounded topological type in three-manifolds. Miniconference on geometry and partial differential equations (Canberra, 1985), 163–176.
- [R06] J. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds. Second edition*, Grad. Texts in Math. **149**, Springer, New York, 2006.
- [R75] R. Riley, A quadratic parabolic group, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **77** (1975), 281–288.
- [S95] P. Sarnak, Selberg’s eigenvalue conjecture, *Notices Amer. Math. Soc.* **42** (1995), 1272–1277.
- [SX91] P. Sarnak, X. X. Xue, Bounds for multiplicities of automorphic representations, *Duke Math. J.* **64** (1991), 207–227.
- [SSS05] T. Saito, M. Scharlemann and J. Schultens, *Lecture notes on generalized Heegaard splittings*, ArXiv preprint math.GT/0504167.
- [Sch03] M. Scharlemann, Heegaard splittings of 3-manifolds, in *Low dimensional topology: lectures at the Morningside Center of Mathematics*, ed. Benghe Li, Shicheng Wang, Xuezhi Zhao, 25–39, International Press, 2003.
- [Se65] A. Selberg, On the estimation of Fourier coefficients of modular forms, *Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. VIII, Amer. Math. Soc., 1965, pp. 1–15.

- [Th78] W. Thurston, *The geometry and topology of three-manifolds*, Princeton Univ. Math. Dept. Lecture Notes (1979), available at <http://msri.org/publications/books/gt3m/>
- [V83] M.-F. Vignéras, Quelques remarques sur la conjecture $\lambda_1 \geq \frac{1}{4}$, in: *Seminar on number theory, Paris 1981–82 (Paris, 1981/1982)*, *Progr. Math.*, **38**, Birkhäuser Boston, 1983, 321–343