

КЛЕТКИ КАЖДАНА-ЛЮСТИГА В БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУППАХ КОКСТЕРА

М. В. Белолипецкий¹ и П. Э. Ганнелс²

Аннотация. Мы предлагаем две гипотезы, которые могут быть использованы для описания клеток Каждана-Люстига в произвольных бесконечных группах Кокстера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Группы Кокстера определяются порождающими и соотношениями вида $\langle s_1, \dots, s_n \mid s_i^2 = 1, (s_i s_j)^{m_{i,j}} = 1 \ (i, j = 1, \dots, n) \rangle$. Числа $m_{i,j} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ составляют матрицу Кокстера, которая определяет группу с точностью до изоморфизма. Наиболее важными группами Кокстера с точки зрения приложений являются группы Вейля и аффинные группы Вейля. Так, например, симметрическая группа S_n имеет представление $\langle s_1, \dots, s_n \mid s_i^2 = 1 \ (i = 1, \dots, n), (s_i s_{i+1})^3 = 1 \ (i = 1, \dots, n-1) \rangle$ и реализуется как группа Вейля типа A_{n-1} . Более подробно с группами Кокстера можно познакомиться по книге [H].

Понятие *клеток* было введено Кажданом и Люстигом в работе [KL] для изучения представлений групп Кокстера и их алгебр Гекке. Впоследствии обнаружилось, что эти клетки имеют отношение к различным, казалось бы не связанным между собой, областям математики. Некоторые конкретные примеры и ссылки можно найти в заметке [G].

В данной работе нас интересует комбинаторное строение клеток в бесконечных группах Кокстера. Примерами таких групп являются уже упоминавшиеся выше аффинные группы Вейля, а также группы Вейля гиперболических алгебр Каца–Мури. В гиперболическом случае клетки изучались сравнительно мало, некоторые результаты в этом направлении можно найти в работах [Bed] и [Bel]. Используя многочисленные вычислительные эксперименты, нам удалось сформулировать гипотезы, описывающие строение клеток в бесконечных группах Кокстера. Одним из основных новых понятий, необходимых для наших гипотез, является *комбинаторная жесткость* (см. определение в §4). Может оказаться, что это понятие имеет самостоятельный интерес. Нам удалось проверить гипотезы для аффинных групп малого ранга (см. [BG2] и §5) и доказать их для некоторых специальных случаев (см. [BG1] и §4). Последние, в частности, включают в себя прямоугольные группы Кокстера рассмотренные ранее в работе [Bel]. Доказательство гипотез в общем случае в настоящий момент является открытой проблемой.

Key words and phrases. группа Кокстера, алгебра Гекке, клетки Каждана-Люстига, выделенные инволюции.

¹ при поддержке EPSRC, грант EP/F022662/1.

² при поддержке NSF, грант DMS 08-01214.

2. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КЛЕТОК

Пусть W — группа Кокстера с фиксированной системой порождающих S . Рассмотрим вещественное векторное пространство V размерности $|S|$ с базисом $\{\alpha_s \mid s \in S\}$ и определим симметричную билинейную форму на V с помощью

$$B(\alpha_s, \alpha_t) = -\cos(\pi/m(s, t)), \quad s, t \in S.$$

Для каждого $s \in S$ мы можем задать линейное преобразование $\sigma_s : V \rightarrow V$ по формуле

$$\sigma_s(\lambda) = \lambda - 2B(\alpha_s, \lambda)\alpha_s.$$

Преобразование σ_s отображает α_s в $-\alpha_s$ и фиксирует гиперплоскость H_s в V , ортогональную α_s относительно B . Таким образом, σ_s является отражением в пространстве V . Можно показать, что соответствие $s \rightarrow \sigma_s$ продолжается до точного представления W в $\text{GL}(V)$, которое называется *стандартной геометрической реализацией* группы W .

Нам понадобится также *конус Титса* $\mathcal{C} \subset V$. Каждая гиперплоскость H_s разбивает V на два полупространства. Пусть H_s^+ обозначает замкнутое полупространство на котором элемент α_s^* , двойственный к α_s , принимает неотрицательные значения. Пересечение $\Sigma_0 = \bigcap H_s^+$, $s \in S$, является замкнутым симплицеальным конусом в V . Замыкание объединения образов Σ_0 под действием W снова является конусом в V . Этот конус \mathcal{C} и называется конусом Титса. Известно, что $\mathcal{C} = V$ в том и только том случае когда группа W конечна. Для бесконечных групп W конус Титса значительно меньше всего пространства V и, следовательно, является более удобной моделью для визуализации действия группы.

При некоторых дополнительных условиях можно определить действие W на сечении конуса Титса. В частности, таким образом можно описать действие аффинных и гиперболических групп Кокстера ранга 3 на, соответственно, аффинной плоскости и плоскости Лобачевского. Рассмотрим, например, аффинную группу W типа \tilde{A}_2 . Эта группа порождается тремя инволюциями s_1, s_2, s_3 с соотношениями $(s_i s_j)^3 = 1$ для всех $i \neq j$. Пространство $V = \mathbb{R}^3$, и конус Титса \mathcal{C} отождествляется с его верхним полупространством $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$. Легко проверить, что действие W сохраняет плоскость $M := \{z = 1\}$, и что образы Σ_0 пересекают M по равносторонним треугольникам:

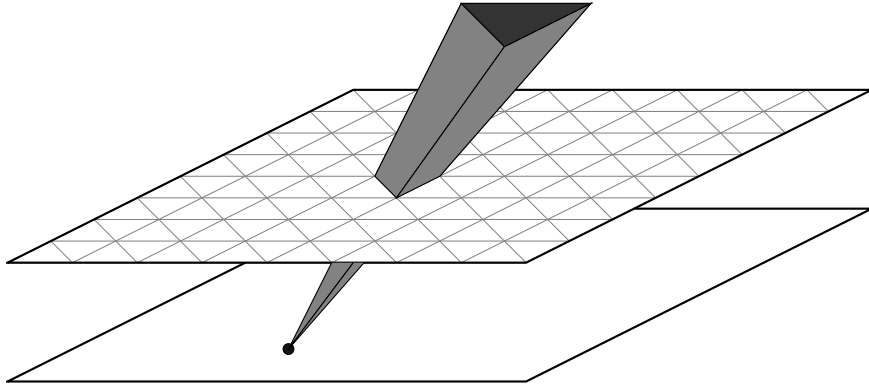
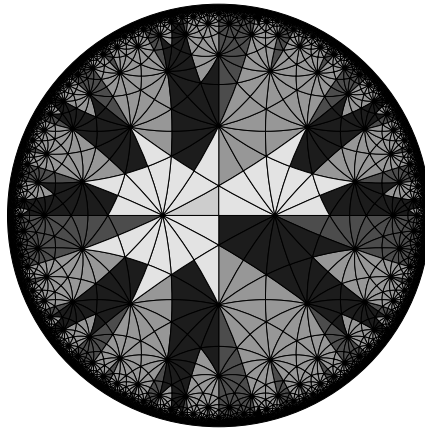


Рис. 1. Сечение конуса Титса

Из нашего построения ясно, что группа W типа \tilde{A}_2 реализуется как группа изометрий аффинной плоскости, порожденная отражениями в сторонах равностороннего

треугольника. Обобщение этой конструкции приводит к *треугольным группам*. Рассмотрим треугольник Δ с углами $\pi/p, \pi/q, \pi/r$ ($p, q, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) на сфере, в аффинной плоскости, или в плоскости Лобачевского (в зависимости от $1/p + 1/q + 1/r > 1, = 1$, или < 1). Группа W_{pqr} изометрий соответствующего пространства, порожденная отражениями в сторонах Δ , является (конечной, аффинной, или гиперболической) группой Кокстера. В нашем предыдущем примере $W = W_{333}$ — аффинная группа типа \tilde{A}_2 . На рисунке 2 показано замощение плоскости Лобачевского соответствующее группе W_{237} (группа Гурвица). Раскраска треугольников на рисунке соответствует разбиению W на клетки Каждана-Люстига, к определению которых мы переходим в следующем параграфе.

Рис. 2. W_{237}

3. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим группу Кокстера W с системой порождающих S . Любой элемент $w \in W$ можно представить как произведение (слово) $s_1 \dots s_N$, $s_i \in S$. Такое представление называется приведенным, если его длину нельзя уменьшить используя соотношения в группе. Элемент w может иметь разные приведенные представления, но легко показать, что все они имеют одинаковую длину. Таким образом, мы можем определить на группе W функцию длины $l : W \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, которая ставит в соответствие элементу $w \in W$ длину его (некоторого) приведенного представления в системе порождающих S (см. [Н, гл. 1.6]). Другое важное понятие, которое можно определить с помощью приведенных представлений, это *частичный порядок Шевалле-Брюа* \leq на группе W . Для данного слова $s_1 \dots s_N$ определим его *подслово* как (возможно пустое) произведение вида $s_{i_1} \dots s_{i_M}$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_M \leq N$. Тогда $y \leq w$ если некоторое представление y является подсловом некоторого приведенного представления w . Можно показать, что определенное таким образом отношение \leq является частичным порядком на группе (см. [Н, гл. 5.9]).

Пусть \mathcal{H} обозначает алгебру Гекке группы W над кольцом $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ полиномов Лорана от переменной $q^{1/2}$. Эта алгебра является свободным \mathcal{A} -модулем с базисом

T_w , $w \in W$ и умножением, определенным по формулам

$$\begin{aligned} T_w T_{w'} &= T_{ww'}, \text{ если } l(ww') = l(w) + l(w'), \\ T_s^2 &= q + (q-1)T_s, \text{ для } s \in S. \end{aligned}$$

На ряду с базисом $(T_w)_{w \in W}$ в \mathcal{H} можно задать другой базис $(C_w)_{w \in W}$, предложенный Кажданом и Люстигом в работе [KL]. Этот новый базис обладает рядом важных свойств и является особенно полезным для описания представлений W и \mathcal{H} . Элементы C_w выражаются через T_w по формулам

$$C_w = \sum_{y \leq w} (-1)^{l(w)-l(y)} q^{l(w)/2-l(y)} P_{y,w}(q^{-1}) T_y,$$

где $P_{y,w}$ — так называемые *полиномы Каждана–Люстига*. Эти полиномы не равны нулю тогда и только тогда, когда $y, w \in W$ удовлетворяют условию $y \leq w$, равны 1, если $y = w$, и во всех остальных случаях имеют степень $\deg(P_{y,w}) \leq d(y, w) = (l(w) - l(y) - 1)/2$. В случае когда $\deg(P_{y,w}) = d(y, w)$ старший коэффициент полинома $P_{y,w}$ обозначается через $\mu(y, w) = \mu(w, y)$, во всех остальных случаях (в том числе когда y и w не сравнимы по отношению к \leq) положим по определению $\mu(y, w) = \mu(w, y) = 0$. Если $\mu(y, w) \neq 0$, будем писать $y \dashv w$.

Используя полиномы $P_{y,w}$, на группе W можно определить частичные порядки $\leq_L, \leq_R, \leq_{LR}$. Для $w \in W$ определим два подмножества S :

$$\mathcal{L}(w) = \{s \in S \mid sw < w\}, \quad \mathcal{R}(w) = \{s \in S \mid ws < w\}.$$

Отношение $y \leq_L w$ означает, что существует цепочка $y = y_0, y_1, \dots, y_n = w$ в W , такая что $y_i \dashv y_{i+1}$ и $\mathcal{L}(y_i) \not\subset \mathcal{L}(y_{i+1})$ для всех $0 \leq i < n$. Отношение \leq_R определяется через \leq_L : $y \leq_R w$, если $y^{-1} \leq_L w^{-1}$. Наконец, $y \leq_{LR} w$ означает, что существует цепочка $y = y_0, y_1, \dots, y_n = w$, такая что для всех $i < n$ либо $y_i \leq_L y_{i+1}$, либо $y_i \leq_R y_{i+1}$. Легко проверить, что эти отношения задают частичные порядки на группе W . Соответствующие им отношения эквивалентности на W обозначаются через $\sim_L, \sim_R, \sim_{LR}$. Классы эквивалентности по отношению к \sim_L (соотв., \sim_R, \sim_{LR}) называются *левыми клетками* (соотв. *правыми* и *двусторонними клетками*) в W . Из определения следует, что левые и правые клетки обладают сходными свойствами, поэтому мы как правило будем иметь дело только с одним из этих двух типов клеток.

Вернемся к рисунку 2, на котором показаны клетки в группе W_{237} . Мы видим пять двусторонних клеток, которые соответствуют пяти оттенкам серого цвета на рисунке. Чтобы определить левые клетки нужно рассмотреть связные объединения треугольников одного цвета. Заметим, что рисунок дает основание ожидать, что группа W_{237} имеет бесконечное число левых клеток.

Рассмотрим операцию умножения на C -базисе \mathcal{H} . Имеет место формула

$$C_x C_y = \sum_z h_{x,y,z} C_z, \quad h_{x,y,z} \in \mathcal{A}.$$

Определим $a(z)$ как наименьшее целое число, такое что $q^{a(z)/2} h_{x,y,z} \in \mathcal{A}^+$ для всех $x, y \in W$, где $\mathcal{A}^+ = \mathbb{Z}[q^{1/2}]$. Пусть $\mathcal{D}_i = \{z \in W \mid l(z) - a(z) - 2\delta(z) = i\}$, где $\delta(z)$ обозначает степень полинома $P_{e,z}$, $l(z)$ — функция длины на W и $a(z)$ — определенная выше функция a . Множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ состоит из *выделенных инволюций* группы W определенных Люстигом в [L2, 1.3].

Люстиг доказал [L2], что в аффинных группах имеет место взаимнооднозначное соответствие между выделенными инволюциями и левыми (правыми) клетками. Этот

глубокий результат имеет важные следствия и приложения. Одной из основных целей нашего исследования является описание этого соответствия в явной форме, так что, зная только выделенные инволюции, можно было бы точно описать строение клеток в группе. Другой связанный с этим вопрос состоит в поиске алгоритма для нахождения выделенных инволюций. В следующем параграфе мы сформулируем две гипотезы, дающие ответы на эти вопросы, и приведем ряд результатов в поддержку этих гипотез.

4. ГИПОТЕЗЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Нам потребуется несколько дополнительных обозначений и определений. Пусть $w \in W$. Будем писать $w = x.y$, если $w = xy$ и $l(w) = l(x) + l(y)$. Обозначим через $Z(w)$ множество всех $v \in W$, таких что $w = x.v.y$ для некоторых $x, y \in W$ и $v \in W_I$, где $I \subset S$ и W_I конечна. (Напомним, что параболическая подгруппа W_I — это подгруппа W , порожденная элементами из I .) Элемент $v \in Z(w)$ будем называть *максимальным* в w , если он не является собственным подсловом никакого другого $v' \in Z(w)$, для которого $w = x'.v'.y'$ и $x' \leq x, y' \leq y$. Пусть $Z = Z(W)$ обозначает объединение всех $Z(w)$, $w \in W$; $\mathcal{D}_f := \mathcal{D} \cap Z$ — множество выделенных инволюций конечных параболических подгрупп W и $\mathcal{D}_f^\bullet := \mathcal{D}_f \setminus (S \cup \{1\})$. Заметим, что каждое из этих множеств конечно.

Элемент $w = x.v.y$ будем называть *жестким* в v , если (i) $v \in \mathcal{D}_f$, (ii) v максимален в w , и (iii) для любого приведенного представления w вида $x'.v'.y'$ с $a(v') \geq a(v)$ имеют место равенства $l(x) = l(x')$ и $l(y) = l(y')$. Это понятие *комбинаторной жесткости* играет важную роль в дальнейших построениях. Его смысл можно проиллюстрировать на графе Келли группы W . Максимальным выделенным инволюциям конечных подгрупп соответствуют “длинные циклы” в графе Келли. Комбинаторная жесткость означает, что такой цикл невозможно сместить в представлении w в ту или другую сторону:

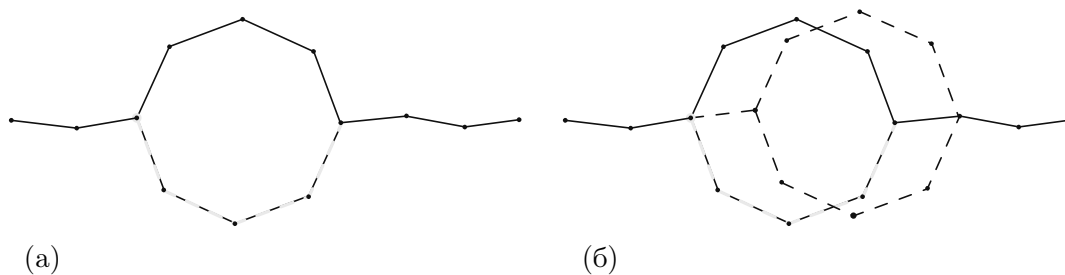


Рис. 3. Жесткие (а) и нежесткие (б) элементы на графе Келли

Например, в треугольной группе W_{333} типа \tilde{A}_2 элемент $w = s_3s_1s_2s_1s_3$ — жесткий в $v = s_1s_2s_1$, а $w' = s_2s_3s_1s_2s_1s_3s_2$ — нежесткий в v .

Наши гипотезы формулируются следующим образом:

Гипотеза 1. (“выделенные инволюции”) Пусть $v = x.v_1.x^{-1} \in \mathcal{D}$ с $v_1 \in \mathcal{D}_f^\bullet$ и $a(v) = a(v_1)$, и пусть $v' = s.v.s$, $s \in S$. Тогда если svv_1 является жестким в v_1 , то $v' \in \mathcal{D}$.

Гипотеза 2. (“базовые эквивалентности”) Пусть $w = y.v_0$ с v_0 максимальным в w .

(а) Возьмем $u = x.v_1.x^{-1} \in \mathcal{D}$, удовлетворяющий $a(u) \leq a(v_0)$, $w' = w.u$ и $a(w') = a(w)$. Тогда существует элемент v_0' , такой что $v_0 = v_0'.v_0'$, $v_0'xv_1$ жесткий

- в v_1 для всех v'_{01} , таких что $v_0 = v''_0 \cdot v'_{01}$ и $l(v'_{01}) = l(v_{01})$, $\mathcal{R}(w'v_{01}^{-1}) \subsetneq \mathcal{R}(w)$, и $\mu(w, w'v_{01}^{-1}) \neq 0$, а значит $w \sim_R w'v_{01}^{-1} \sim_R w'$.
- (б) Пусть $w'' = w \cdot v_1$ с $v_1 \in \mathcal{D}_f$ не максимальным в w'' и $a(w'') = a(v_0)$. Тогда можно записать $w = y \cdot v_{01} \cdot v_{02} \cdot v_{03}$, так что $v_{03} \cdot v_1$ максимален в w'' , $\mathcal{R}(w''v_{02}^{-1}) \neq \mathcal{R}(w)$, и $\mu(w, w''v_{02}^{-1}) \neq 0$. В этом случае снова имеем $w \sim_R w''v_{02}^{-1} \sim_R w''$.

Гипотеза 1 позволяет индуктивно строить выделенные инволюции в бесконечной группе W , используя инволюции ее параболических подгрупп. Гипотеза 2, в свою очередь, позволяет, используя выделенные инволюции, получать эквивалентности в группе. Заметим, что общеизвестный метод для получения аналогичных результатов состоит в вычислении полиномов Каждана–Люстига. Кроме трудоемкости, недостатком этого подхода является то, что он не дает никакой информации о том, какого вида элементы могут задавать выделенные инволюции или удовлетворяют эквивалентностям. Для бесконечных групп Кокстера, в которых полный перебор не возможен, этот недостаток является критическим. Заметим, что наша гипотеза 2 не дает все эквивалентности в группе, но, как показывает следующий результат, полученных с ее помощью эквивалентностей должно быть достаточно для описания клеток.

Теорема 1. [BG1] *Если бесконечная группа Кокстера W удовлетворяет гипотезам 1 и 2, а также двум гипотезам Люстига, то:*

- (1) Множество выделенных инволюций в W состоит из $v \in \mathcal{D}_f$ в объединении с инволюциями, которые получаются из них с помощью гипотезы 1.
- (2) Отношения, полученные с помощью гипотезы 2, определяют разбиение W на правые клетки.
- (3) Отношения, полученные с помощью гипотезы 2 и ее аналога для отношения \sim_L , определяют разбиение W на двусторонние клетки.

Гипотезы Люстига, которые используются в теореме, — это так называемая “гипотеза положительности” и гипотеза о комбинаторной интерпретации функции $a(z)$. Гипотеза положительности в настоящий момент доказана для широкого класса бесконечных групп Кокстера, который включает в себя аффинные группы. С другой стороны, недавно были обнаружены примеры групп, для которых гипотеза касающаяся функции $a(z)$ не верна. Есть основание ожидать, что утверждение теоремы 2 справедливо и для таких групп, но нуждается в другом доказательстве. Точные формулировки гипотез и доказательство теоремы можно найти в работе [BG1].

Нам удалось доказать гипотезы 1 и 2 в случае, когда выполнены некоторые дополнительные условия. В результате были получены следующие две теоремы.

Теорема 2. [BG1] *Пусть $v = x \cdot v_1 \cdot x^{-1} \in \mathcal{D}$ с $v_1 \in \mathcal{D}_f^\bullet$, $a(v) = a(vs)$ и $\mathcal{L}(vs) \setminus \mathcal{R}(vs) \neq \emptyset$. Тогда, если элемент $v' = s \cdot v \cdot s$ жесткий в v_1 , то $v' \in \mathcal{D}$.*

Теорема 3. [BG1] *Пусть $w = x \cdot v_0 = t_n \dots t_1 \cdot s_l \dots s_1$ с $t_i, s_i \in S$, $v_0 = s_l \dots s_1 \in \mathcal{D}_f$ — элемент максимальной длины в конечной параболической подгруппе $W_I \leq W$, максимальный в w и $a(w) = a(v_0)$; $u = y \cdot u_0 \cdot y^{-1} \in \mathcal{D}$ с $u_0 \in \mathcal{D}_f$, такой что $a(u) = a(u_0) = l$; и $w' = w \cdot u \cdot v_{01}$ с $v_{01} = s_1 \dots s_{l-1}$ имеет $a(w') = a(w)$ и $\mathcal{R}(w') \subsetneq \mathcal{R}(w)$.*

Предположим, что

- (1) Для каждого $v_j = t_j \dots t_1 v_0 t_1 \dots t_j$, $j = 0, \dots, n-1$ и $t = t_{j+1}$ или $t = t_{j-1}$, если $t_{j-1} \notin \mathcal{R}(v_j)$, имеем $a(v_j t) = a(v_j)$, $\mathcal{L}(v_j t) \setminus \mathcal{R}(v_j t) \neq \emptyset$ и $t v_j t$ жесток в v_0 .

(2) Для каждого $u_j = s_{j-1} \dots s_1 u s_1 \dots s_{j-1}$, $j = 1, \dots, l-1$ с $u_1 = u$, имеем $a(u_j s_j) = a(u_j)$, $\mathcal{L}(u_j s_j) \setminus \mathcal{R}(u_j s_j) \neq \emptyset$ и $s_j u_j s_j$ жесток в u_0 ;

Тогда $\mu(w, w') \neq 0$ и $w \sim_R w'$.

Дополнительное условие $\mathcal{L}(vs) \setminus \mathcal{R}(vs) \neq \emptyset$ в теореме 2 может показаться на первый взгляд незначительным, однако это не так. В частности, условия (1) и (2) в теореме 3 появляются как следствие этого дополнительного ограничения. Доказательство теорем 2 и 3 в работе [BG1] существенным образом использует результаты из двух неопубликованных писем Люстига и Спрингера [LS]. Один из возможных подходов к доказательству наших гипотез в общем случае состоит в развитии идей этой переписки.

Хотя условия теорем 2 и 3 выполняются далеко не всегда и не для всех групп W , эти теоремы все же позволяют получить ряд интересных результатов. Мы рассмотрим несколько примеров в следующем параграфе, некоторые другие приложения даны в работе [BG1].

5. КЛЕТКИ В АФФИННЫХ ГРУППАХ РАНГА 3

Аффинные группы ранга 3 имеют тип \tilde{A}_2 , $\tilde{B}_2 (= \tilde{C}_2)$ или \tilde{G}_2 (см. [Н, глава 4]). Клетки в этих группах были описаны Люстигом в работе [L1]. Как будет показано ниже, те же самые результаты можно сравнительно легко получить используя гипотезы из §4.

Тип \tilde{A}_2 : Группа W порождается инволюциями s_1, s_2, s_3 с соотношениями $(s_1 s_2)^3 = (s_2 s_3)^3 = (s_3 s_1)^3 = 1$. Имеем:

$$\mathcal{D}_f = \{1, s_1, s_2, s_3, s_1 s_3 s_1, s_3 s_2 s_3, s_2 s_1 s_2\}, \quad \mathcal{D}_f^\bullet = \{s_1 s_3 s_1, s_3 s_2 s_3, s_2 s_1 s_2\}.$$

Применяя гипотезу 1 с $v = v_1 = s_1 s_3 s_1$, получаем $v' = s_2 v s_2 \in \mathcal{D}$. Заметим, что на этом процесс обрывается, так как элементы $s_1 s_2 v$ и $s_3 s_2 v$, которые получаются на следующем шаге, не являются жесткими в v . Поступая аналогичным образом с двумя другими инволюциями из \mathcal{D}_f^\bullet , мы в итоге приходим к

$$\mathcal{D} = \{1, s_1, s_2, s_3, s_1 s_3 s_1, s_3 s_2 s_3, s_2 s_1 s_2, s_2 s_1 s_3 s_1 s_2, s_1 s_3 s_2 s_3 s_1, s_3 s_2 s_1 s_2 s_3\}.$$

Таким образом, группа W типа \tilde{A}_2 имеет 10 левых (правых) клеток. Используя гипотезу 2 и геометрическое представление группы, несложно получить, что разбиение W на клетки выглядит как показано на рисунке 4(a), где двусторонние клетки соответствуют областям одного цвета, а левые клетки соответствуют связным компонентам двусторонних клеток. Это в точности совпадает с результатом в [L1]. Заметим, что для получения выделенных инволюций и клеток в этом случае нам достаточно теорем 2 и 3 и, следовательно, результат не зависит от гипотез 1, 2.

для групп типа \tilde{A}_2 выполнены условия теорем 2, 3 и, следовательно, наши гипотезы в этом случае доказаны.

Тип \tilde{B}_2 : Группа W порождается инволюциями s_1, s_2, s_3 с соотношениями $(s_1 s_2)^2 = (s_2 s_3)^4 = (s_1 s_3)^4 = 1$.

$$\mathcal{D}_f^\bullet = \{s_1 s_2, (s_2 s_3)^2, (s_1 s_3)^2\}.$$

Гипотеза 1 дает

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \{ & 1, s_1, s_2, s_3, s_1 s_2, s_3 s_1 s_2 s_3, s_1 s_3 s_1 s_2 s_3 s_1, s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2, \\ & s_2 s_3 s_2 s_3, s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1, s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3, s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3 s_2, \\ & s_1 s_3 s_1 s_3, s_2 s_1 s_3 s_1 s_3 s_2, s_3 s_2 s_1 s_3 s_1 s_3 s_2 s_3, s_1 s_3 s_2 s_1 s_3 s_1 s_3 s_2 s_3 s_1 \}. \end{aligned}$$

Разбиение группы на клетки, полученное с помощью гипотезы 2, приведено на рисунке 4(б). Это разбиение довольно легко получить, если внимательно проследить за циклами, соответствующими выделенным инволюциям на замощении плоскости. Результат снова соответствует описанию клеток в [L1]. Заметим, что в этом случае условия теоремы 2 снова выполняются для всех элементов \mathcal{D} , однако условия теоремы 3 выполнены не всегда. Таким образом, мы можем получить выделенные инволюции с помощью теоремы 2, но не можем проверить, что мы получили все выделенные инволюции в W , без использования результатов Люстига или наших гипотез.

Тип \tilde{G}_2 : Группа W порождается инволюциями s_1, s_2, s_3 с соотношениями $(s_1 s_2)^2 = (s_3 s_1)^3 = (s_2 s_3)^6 = 1$.

$$\mathcal{D}_f^\bullet = \{s_1 s_2, s_3 s_1 s_3, (s_2 s_3)^3\}.$$

Применение гипотезы 1 в этом случае требует некоторых усилий в связи с большим количеством возможных вариантов. Для получения списка инволюций мы использовали компьютер. Более подробно реализация алгоритмов и их применение к другим аффинным группам описаны в [BG2]. После всех вычислений, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \{ & 1, s_1, s_2, s_3, s_1 s_2, \\ & s_3 s_1 s_2 s_3, s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2, s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3, s_1 s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1, s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_2, \\ & s_3 s_1 s_3, s_2 s_3 s_1 s_3 s_2, s_3 s_2 s_3 s_1 s_3 s_2 s_3, s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3 s_2 s_3 s_2, \\ & s_3 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3 s_2 s_3 s_2 s_3, s_1 s_3 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1, \\ & s_2 s_3 s_2 s_3 s_2 s_3, s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1, s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3, s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3 s_2, \\ & s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3 s_2 s_3, s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3 s_2 s_3 s_2, \\ & s_1 s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3 s_2 s_3 s_1, s_2 s_1 s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3 s_2 s_3 s_1 s_2, \\ & s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3 s_2 s_3 s_2 s_1 s_3, \\ & s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3 s_2 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2, \\ & s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3 s_2 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_3, \\ & s_1 s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3 s_2 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_3 s_1\}. \end{aligned}$$

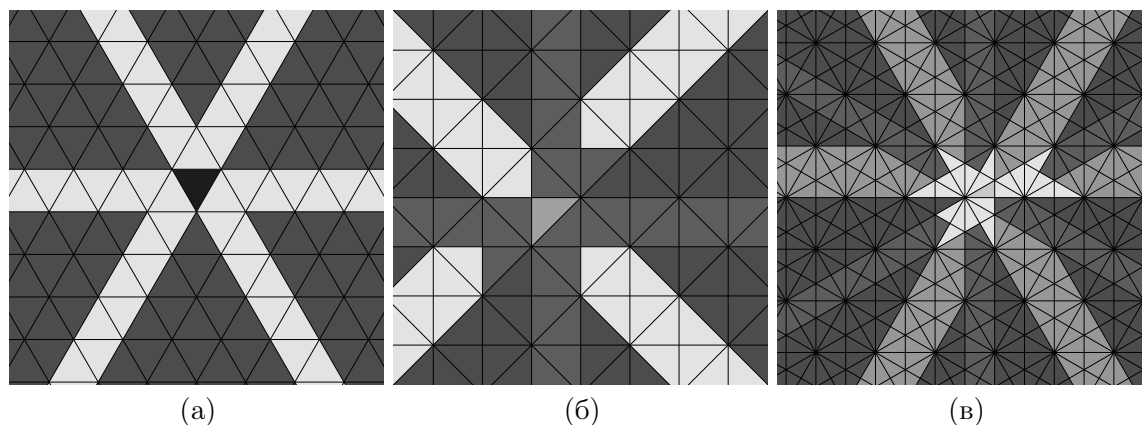
Следовательно, группа W типа \tilde{G}_2 имеет 28 левых (правых) клеток. Мы оставляем заинтересованному читателю проверку того, что гипотеза 2 позволяет получить разбиение W на клетки, показанное на рисунке 4(в). В этом случае условия как теоремы 3 так и теоремы 2 выполнены не всегда. Например, мы имеем

$$\mathcal{L}(s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3 s_2 s_3 s_1) \setminus \mathcal{R}(s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 s_2 s_3 s_1 s_3 s_2 s_3 s_1) = \emptyset.$$

Следовательно, наш метод в этом случае базируется на недоказанных гипотезах, но результаты тем не менее совпадают с [L1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Bed] R. Bédard, Left V-cells for hyperbolic Coxeter groups, *Comm. Algebra*, **17** (1989), 2971–2997.
- [Bel] M. V. Belolipetsky, Cells and representations of right-angled Coxeter groups, *Selecta Math.*, *N. S.* **10** (2004), 325–339.
- [BG1] M. V. Belolipetsky, P. E. Gunnells, Cells in Coxeter groups, I, [arXiv:1012.0489v1](https://arxiv.org/abs/1012.0489v1) [math.RT].
- [BG2] M. V. Belolipetsky, P. E. Gunnells, Cells in Coxeter groups, II, in preparation.
- [G] P. E. Gunnells, Cells in Coxeter groups, *Notices of the AMS* **53** (2006), 528–535.
- [H] J. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge studies in advanced mathematics 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [KL] D. Kazhdan, G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, *Invent. Math.* **53** (1979), 165–184.

РИС. 4. Клетки в \tilde{A}_2 , \tilde{B}_2 и \tilde{G}_2

- [L1] G. Lusztig, Cells in affine Weyl groups, *Algebraic Groups and Related Topics*, Adv. Stud. Pure Math., **40**, Kinokuniya and North-Holland, Amsterdam, 1985, pp. 255–287.
- [L2] G. Lusztig, Cells in affine Weyl groups, II, *J. Algebra*, **109** (1987), 536–548.
- [LS] G. Lusztig, T. A. Springer, Correspondence, 1987.

IMPA, ESTRADA DONA CASTORINA 110, 22460-320 RIO DE JANEIRO, BRAZIL

E-mail address: mbel@impa.br

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS, UNIVERSITY OF MASSACHUSETTS, AMHERST, MA 01003, USA

E-mail address: gunnells@math.umass.edu