Grupos cristalográficos hiperbólicos

Mikhail Belolipetsky, IMPA

Grupos

O **grupo** Γ é um conjunto com uma operação de composição $*$ que tem as seguintes propriedades:

- *associatividade:* para quaisquer elementos $a, b, c \in \Gamma$ temos $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- *existência do elemento neutro:* existe $e \in \Gamma$ tal que $e * a = a * e = a$, para todo $a \in \Gamma$.
- *existência do elemento simétrico:* para qualquer $a \in \Gamma$, existe $a' \in \Gamma$, tal que $a * a' = a' * a = e$, onde e é o elemento neutro.

Grupos

O **grupo** Γ é um conjunto com uma operação de composição $*$ que tem as seguintes propriedades:

- *associatividade:* para quaisquer elementos $a, b, c \in \Gamma$ temos $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- *existência do elemento neutro:* existe $e \in \Gamma$ tal que $e * a = a * e = a$, para todo $a \in \Gamma$.
- *existência do elemento simétrico:* para qualquer $a \in \Gamma$, existe $a' \in \Gamma$, tal que $a * a' = a' * a = e$, onde e é o elemento neutro.

GRUPOS $\longleftrightarrow$ **SIMETRIA**

Grupos cristalográficos

Seja $X = E^n$ o espaço Euclideano de dimensão n.

Um **grupo cristalográfico** Γ é um subgrupo do grupo das isometrias de X tal que:

- a ação $\Gamma \times X \to X$ é propriamente descontínua;
- X/Γ é compacto.

Grupos cristalográficos

Seja $X = E^n$ o espaço Euclideano de dimensão n.

Um **grupo cristalográfico** Γ é um subgrupo do grupo das isometrias de X tal que:

- a ação $\Gamma \times X \to X$ é propriamente descontínua;
- X/Γ é compacto.

Uma **região fundamental** da ação de Γ em X é um subconjunto fechado $R \subset X$ tal que

(i) $\bigcup_{g \in \Gamma} g(R) = X$ e

(ii) $\mathring{R} \cap g(\mathring{R}) = \emptyset \quad \forall g \in \Gamma$ não trivial, onde $\mathring{R}$ representa o interior de R.

Cada grupo cristalográfico tem uma região fundamental, que é um **polítopo**.

17 grupos cristalográficos de dimensão 2:

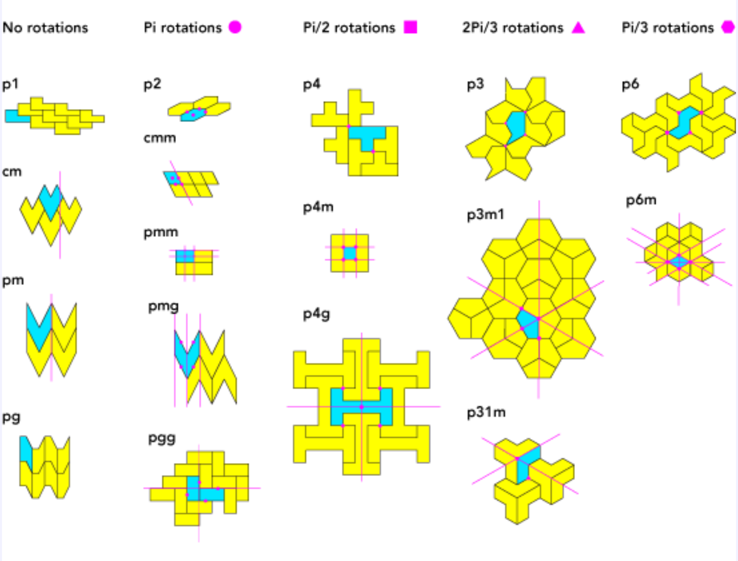


imagem da `http://web.media.mit.edu`

Grupos de espaço

Teorema 1. [Fedorov e Schoenflies, 1891] *Existem* 230 *grupos cristalográficos de dimensão* 3.

Grupos de espaço

Teorema 1. [Fedorov e Schoenflies, 1891] *Existem* 230 *grupos cristalográficos de dimensão* 3.

Teorema 2. [Bieberbach, 1910] *Dado n, há, a menos de equivalência, apenas um número finito de grupos cristalográficos n-dimensionais.*

Grupos de espaço

Teorema 1. [Fedorov e Schoenflies, 1891] *Existem* 230 *grupos cristalográficos de dimensão* 3.

Teorema 2. [Bieberbach, 1910] *Dado n, há, a menos de equivalência, apenas um número finito de grupos cristalográficos n-dimensionais.*

n	# de grupos	
4	4783	(Brown, Bülow, Neubüser et al., 1978)
5	222018	(Plesken e Schulz, 2000)
6	28934974	(Plesken e Schulz, 2000)
$\geqslant 7$	?, número cresce com n	

reticulado cúbico em dimensão 3:

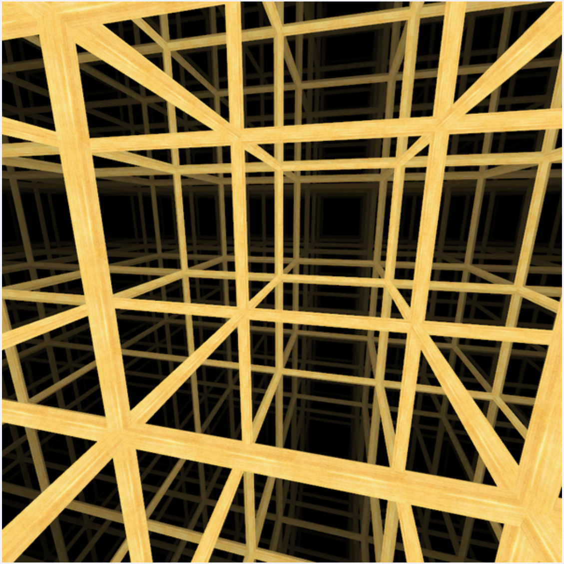


imagem da `wikipedia`

reticulado cúbico em dimensão 4:

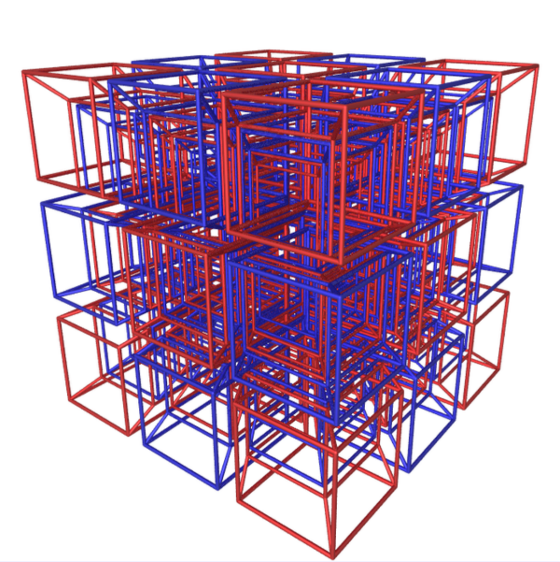


imagem da `wikipedia`

tesselação hiperbólica com ângulos retos:

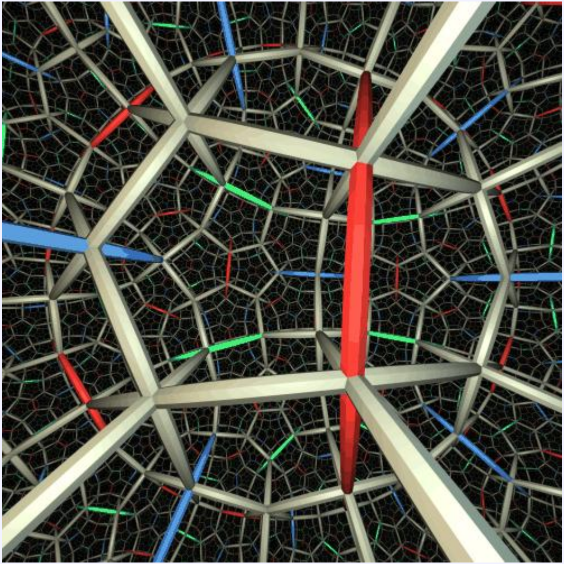


imagem do livro de Thurston

Definição

Seja $X = \mathbf{H}^n$ o espaço hiperbólico de dimensão n.

Um **grupo cristalográfico hiperbólico** Γ é um subgrupo do grupo das isometrias de X gerada pelas reflexões tal que:

- a ação $\Gamma \times X \to X$ é propriamente descontínua;
- X/Γ tem um volume finito.

Observação. Uma região fundamental de um grupo cristalográfico hiperbólico pode ser não compacta.

Grupos cristalográficos hiperbólicos

Grupos cristalográficos hiperbólicos

Teorema 3. [Vinberg, 1981] *Não há grupos cristalográficos hiperbólicos* **cocompactos** *em dimensões* $n \geqslant 30$.

Grupos cristalográficos hiperbólicos

Teorema 3′. [Vinberg, 1981] *Não há grupos cristalográficos hiperbólicos* **aritméticos** *em dimensões* $n \geqslant 30$.

Grupos cristalográficos hiperbólicos

Teorema 3′. [Vinberg, 1981] *Não há grupos cristalográficos hiperbólicos* **aritméticos** *em dimensões* $n \geqslant 30$.

Teorema 4. [Nikulin, 1981] *Para cada dimensão* $n \geqslant 10$, *existe apenas um número finito de grupos máximos cristalográficos aritméticos.*

Teorema da finidade

Teorema da finidade

Teorema 5. [Agol-B.-Storm-Whyte, 2008] *Existe apenas um número finito de grupos máximos cristalográficos aritméticos em todas dimensões.*

/utilizado trabalho anterior por Nikulin, Vinberg, Long, Maclachlan, Reid e Agol, entre outros.

ideia de prova:

Seja $\mathcal{O} = \mathbf{H}^n/\Gamma$.

$$\lambda_1(\mathcal{O})\,\mathrm{Vol}(\mathcal{O})^{2/n} \leqslant n \cdot \mathrm{Vol}_{\mathrm{conf}}(\mathcal{O})^{2/n} \qquad \text{(Li-Yau, 1982)}$$

ideia de prova:

Seja $\mathcal{O} = \mathbf{H}^n/\Gamma$.

$$\lambda_1(\mathcal{O})\,\mathrm{Vol}(\mathcal{O})^{2/n} \leqslant n \cdot \mathrm{Vol}_{\mathrm{conf}}(\mathcal{O})^{2/n} \qquad \text{(Li-Yau, 1982)}$$

- $\lambda_1(\mathcal{O}) \geqslant C(n)$ (pelo Vigneras, Burger, Sarnak);

ideia de prova:

Seja $\mathcal{O} = \mathbf{H}^n/\Gamma$.

$$\lambda_1(\mathcal{O})\,\mathrm{Vol}(\mathcal{O})^{2/n} \leqslant n \cdot \mathrm{Vol}_{\mathrm{conf}}(\mathcal{O})^{2/n} \qquad \text{(Li-Yau, 1982)}$$

- $\lambda_1(\mathcal{O}) \geqslant C(n)$ (pelo Vigneras, Burger, Sarnak);
- $\mathrm{Vol}(\mathcal{O}) \geqslant B(n)$ (pelo B., B.-Emery);

ideia de prova:

Seja $\mathcal{O} = \mathbf{H}^n/\Gamma$.

$$\lambda_1(\mathcal{O})\,\mathrm{Vol}(\mathcal{O})^{2/n} \leqslant n \cdot \mathrm{Vol}_{\mathrm{conf}}(\mathcal{O})^{2/n} \qquad \text{(Li-Yau, 1982)}$$

- $\lambda_1(\mathcal{O}) \geqslant C(n)$ (pelo Vigneras, Burger, Sarnak);
- $\mathrm{Vol}(\mathcal{O}) \geqslant B(n)$ (pelo B., B.-Emery);
- Se Γ é gerada pelas reflexões, $\mathrm{Vol}_{\mathrm{conf}}(\mathcal{O}) = \mathrm{Vol}(\mathbf{S}^n)$.

ideia de prova:

Seja $\mathcal{O} = \mathbf{H}^n/\Gamma$.

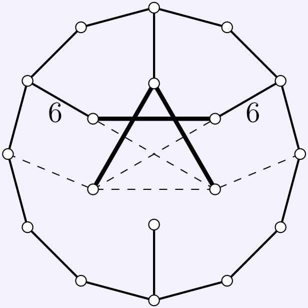
$$\lambda_1(\mathcal{O}) \operatorname{Vol}(\mathcal{O})^{2/n} \leqslant n \cdot \operatorname{Vol}_{\mathrm{conf}}(\mathcal{O})^{2/n} \qquad \text{(Li-Yau, 1982)}$$

- $\lambda_1(\mathcal{O}) \geqslant C(n)$ (pelo Vigneras, Burger, Sarnak);
- $\operatorname{Vol}(\mathcal{O}) \geqslant B(n)$ (pelo B., B.-Emery);
- Se Γ é gerada pelas reflexões, $\operatorname{Vol}_{\mathrm{conf}}(\mathcal{O}) = \operatorname{Vol}(\mathbf{S}^n)$.

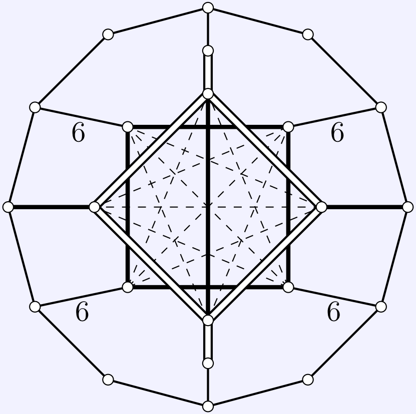
Observação. Este método pode também ser utilizado para se obter resultados eficazes.

exemplos 1:

$n = 12$:

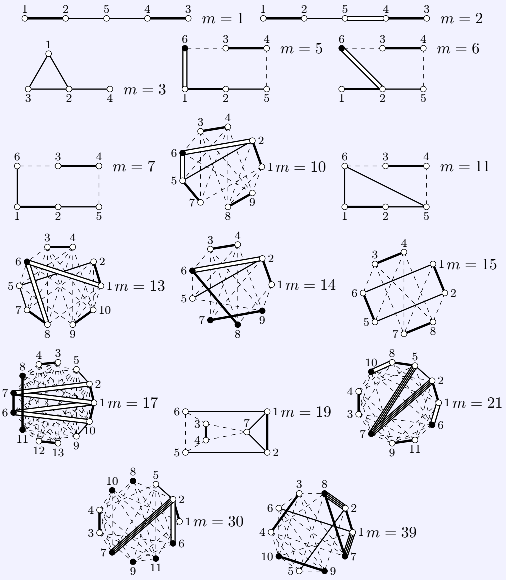


$n = 13$:



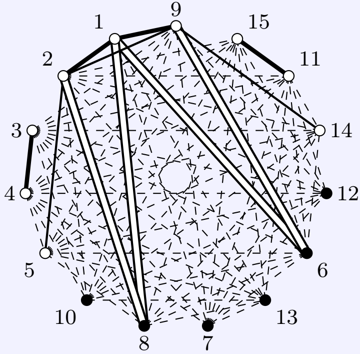
J. Mcleod, *Hyperbolic reflection groups associated to the quadratic forms* $-3x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$, Geom. Dedicata. **152** (2011), 1–16.

exemplos 2:



B. – Mcleod, *Reflective and quasi-reflective Bianchi groups*,
Transform. Groups, to appear.

exemplos 3:



B. – Mcleod, *Reflective and quasi-reflective Bianchi groups*, Transform. Groups, to appear.