Métodos Matemáticos em Finanças - 2005

Lista de Exercícios # 5

Entregar até às 19:00 do dia 10/05/2005 (terca-feira).

Nesta lista continuaremos assumindo as hipótese introduzidas em aula sobre os ativos do mercado. Conforme definido em aula, seja $H(t) = \gamma(t)Z(t)$ onde $\gamma(t) = \exp(-\int_0^t r(s)ds)$,

$$Z(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t ||\theta(s)||^2 ds - \int_0^t \theta(s)^T dW_s\right) \ ,$$

com $\theta(t) = \sigma^{-1}(t)(b(t) - r(t)\mathbf{1})$.

1. Considere o modelo de Black-Scholes clássico com b, r, σ constantes e somente um ativo com risco. Obtenha explicitamente o processo de portfolio que replica o preço da opção do tipo call Europeia e identifique tais termos na fórmula de Black-Scholes.

2. Considere a medida ν definida nos Borelianos de $[0, +\infty)$ dada por $\nu(a, b] = \arctan(b) - \arctan(a)$ para $0 \leq a \leq b \leq +\infty$. Mostre que ν é absolutamente continua com relação a medida de Lebesgue e calcule a derivada de Radon-Nikodym de ν com relação à medida de Lebesgue.

3. O objetivo dos próximos exercícios é provar o Teorema de Girsanov para o caso particular em que θ é constante e W_t é o movimento Browniano unidimensional. Para isto seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espaço de probabilidade com $(W_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, o movimento Browniano. Definimos
$$W_t^Q \stackrel{\text{def}}{=} \theta t + W_t \qquad 0 \leq t \leq T \ .$$
e denotamos por $\mathbb{Q}$ a probabilidade neutra ao risco oassociada a $E^{\mathbb{Q}}(Y) \stackrel{\text{def}}{=} E^(YZ(T))$. Mostre (sem usar Girsanov) que $(W_t^Q - W_s^Q)$ tem distribuição $N(0, t-s)$ se $0 \leq s < t < T$.

   Sugestão: Mostre que
$$E^{\mathbb{Q}}[e^{i\xi(W_t^Q - W_s^Q)}] = e^{-\xi^2(t-s)/2}\sqrt{t-s}$$
   e use o fato que se X é v.a. com
$$\widehat{X}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} E[e^{-iX\xi}] = e^{-(\lambda\xi^2)/2}\sqrt{\lambda} \ ,$$
   então X tem uma distribuição $N(0, \lambda)$.

4. Mostre que se $0 < s < t < r < u < T$ então os incrementos $(W_t^Q - W_s^Q)$ e $(W_u^Q - W_r^Q)$ são independentes com respeito a medida $\mathbb{Q}$. Sugestão: Use o fato que se X e Y são v.a. *gaussianas* não-correlacionadas, então elas são independentes.

5. Usando o método da medida neutra ao risco, determine o preço justo de uma opção europeia do tipo "asset or nothing"ou seja com payoff $P_1(T)$ se $P_1 \geq K$ e zero se $P_1 < K$, onde $K > 0$ é o valor de strike. Mostre que este valor corresponde a derivada em relação ao strike K do preço de uma opção do tipo call europeia.