Métodos Matemáticos em Finanças -

Lista de Exercícios # 4

Entregar até às 19:00 do dia 29/04/2005.

Nesta lista continuremos assumindo as hipótese introduzidas em aula sobre os ativos do mercado. Conforme definido em aula, seja $H(t) = \gamma(t)Z(t)$ onde $\gamma(t) = \exp(-\int_0^t r(s)ds)$,

$$Z(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t ||\theta(s)||^2 ds - \int_0^t \theta(s)^T dW_s\right) \ ,$$

com $\theta(t) = \sigma^{-1}(t)(b(t) - r(t)\mathbf{1})$.

1. Partindo da formula que obtivemos em aula p/ uma obrigação contigenciada

$$\widehat{p} = E\left(H(T)B + \int_0^T H(t)g(t)dt\right)$$

   complete os detalhes que levam a fórmula do preço $X_C(t)$ no instante $t \leq T$ de uma opção de compra europeia com vencimento em T e strike K:

$$X_C(t) = P_1(t)\Phi(d_+(t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-(t)) \ ,$$

   onde

$$d_\pm = \frac{\ln(P_1(t)/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \ .$$

2. Repita o item anterior para o caso de uma opção de venda.

3. Mostre que o preço $X_C(t)$ de uma opção de compra europeia possui as seguintes propriedades:

   (a) $X_C(t)$ decresce com t

   (b) $X_C(t)$ cresce com r

   (c) $X_C(t)$ cresce com $P_1(t)$

   (d) $X_C(t)$ cresce com σ para $\sigma > 0$.

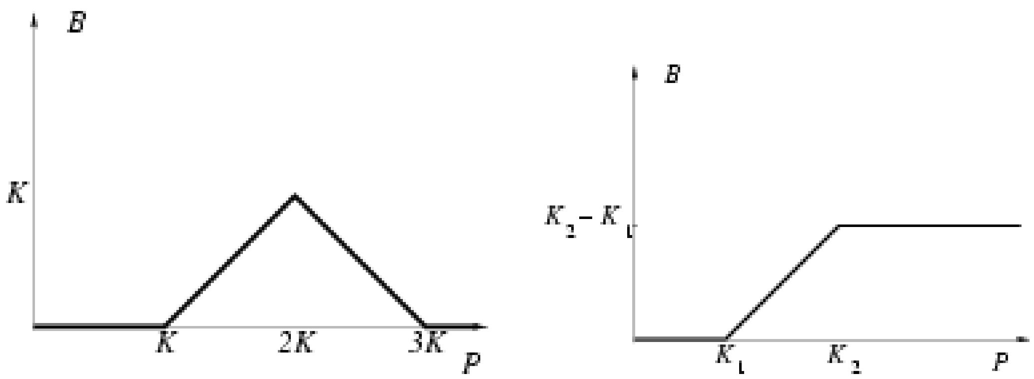
4. Usando as hipóteses do modelo de Black-Scholes determine o preço justo das opções abaixo, dadas pelos seus diagramas de "payoff"mostrados nas figuras a seguir.

   (a) "butterfly spread". Veja Figura 1(a).

   (b) "bull spread"com preços de base $K_1 < K_2$. Veja Figura 1(b).

5. Considere o caso de uma opção de compra europeia do item 1 acima e coloque (por simplicidade) $P_0(0) = 1$. Mostre que $\varphi_0(t) = -Ke^{-rT}\Phi(d_-(t))$, $\varphi_1(t) = \Phi(d_+(t))$ nos dá uma estratégia auto-financiada para o preço $X_C(t)$ verificando que

$$dX_C(t) = \varphi_0(t)dP_0(t) + \varphi_1(t)dP_1(t) \ .$$



(a) Butterfly spread

(b) Bull spread