Métodos Matemáticos em Finanças - 2005

Lista de Exercícios # 2
e
Guia de Estudos

Entregar até às 19:30 do dia 01/04/2005.

Esta lista se refere às aulas de 17/03 e 22/03

1. Seja $\{W_t\}_{t\geq 0}$ o movimento Browniano unidimensional em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ com $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ o filtro Browniano correspondente.
   (a) Mostre que $\tau_a(\omega) = \inf\{t \geq 0 | W_t(\omega) = a\}$, $\omega \in \Omega$, é um tempo de parada [1] em relação a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.
   (b) Verifique que se $\tau_a \neq +\infty$ então $W_{\tau_a} = a$.
   (c) Explique porque o *último* tempo em que W_t passa por a não pode ser um tempo de parada.
   (d) Mostre que $\{W_{t+\tau_a} - W_{\tau_a}\}$ também é movimento Browniano.
   (e) Mostre que $\mathbb{P}[\tau_a < t] = 2\mathbb{P}[W_t > a]$.
2. Com a notação do item anterior, verifique que os seguintes processos são $\{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}$-martingais: $\left\{W_t^2 - t\right\}_{t\geq 0}$ e $\left\{\exp(\sigma W_t - (\sigma^2 t/2))\right\}_{t\geq 0}$
3. Seja X um processo de Itô unidimensional e $f(x,t)$ uma função de classe C^2 definida para $x, t \in \mathbb{R}$. Obtenha o Lema de Itô para $\{Y_t = g(X_t, t)\}_{t\geq 0}$ com base no Lema de Itô para processos da forma $Z_t = f(\mathbf{X}_t)$ onde $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_t\}_{t\geq 0}$ é um processo de Itô bidimensional.
4. Sejam X e Y processos de Itô unidimensionais com
$$\begin{aligned} dX &= adt + bdW \\ dY &= \alpha dt + \beta dW \ , \end{aligned}$$
   e W movimento Browniano unidimensional. Mostre que XY também é um processo de Itô com
$$d(XY) = (X\alpha + Ya + b\beta)dt + (X\beta + Yb)dW \ .$$
   Como voce modificaria o resultado acima no caso em que Y é unidimensional, mas W é k-dimensional e X é n-dimensional?
5. Seja agora W_t o movimento Browniano m-dimensional. Mostre que
$$Z(t) = \exp(\int_0^t (A(u) - \frac{1}{2}||S(u)||^2)du + \int_0^t S(u)dW(u))$$
   satisfaz a equação diferencial
$$dZ = Z(t)(A(t)dt + S(t)^T dW(t)) \ , \tag{1}$$
   onde A e S são processos estocásticos vetoriais com as dimensões apropriadas (especifique as hipóteses em A e S). Verifique tb que $Y(t) = yZ(t)$ satisfaz $Y(0) = y$.
   Mostre também que $Y(t)$ é a única solução da equação (1) com condição $Y(0) = y$.
6. Prove usando o Lema de Itô que
   (a)
$$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s ds$$
   (b)
$$\int_0^t W_s^2 dW_s = \frac{1}{3}W_t^3 - \int_0^t W_s ds$$

[1] No conjunto de medida zero onde $W_t \neq a$ para todo $t \geq 0$ podemos definir τ_a como $+\infty$