Métodos Matemáticos em Finanças - 2005

Lista de Exercícios # 1

Entregar até às 19:00 do dia 17/03/2005.

1. Seja B_t o movimento Browniano bi-dimensional e seja $D(0,r)$ o disco de centro 0 e raio r em $\mathbb{R}^2$. Calcule $P^0[B_t \in D_r]$. (P^0 se refere ao movimento Browniano partindo de $x = 0$.)

2. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ um filtro *completo* (i.e. $\mathcal{F}_t$ contém todos os elementos de $\mathcal{F}$ de medida nula.) Sejam X e Y processos estocásticos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Mostre que se $Y = \{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ é uma modificação de $X = \{X_t\}_{t\in[0,T]}$, e X_t é $\mathcal{F}_t$-mensurável, então Y_t também o é.

3. (a) Mostre que se τ_1 e τ_2 são tempos de parada então $\tau_1 \wedge \tau_2$ também o é.

   (b) Seja τ um tempo de parada e $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t>0}\}$ um martingal contínuo à direita. Mostre que $\{(X_{t\wedge\tau}, \mathcal{F}_t)\}_{t>0}\}$ também é um martingal.

4. (a) Seja $(W_1(t), \cdots, W_n(t))_{t\geq 0}$ o movimento Browniano n-dimensional. Mostre que

$$\sum_{j=1}^{m} \sigma_{i,j} W_j \approx \mathcal{N}(0, \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}^2 t)$$

   (b) Complete a demonstração do item (1) do Lema 2.25 (pág. 23) do Korn & Korn.

5. Problema 3, página 76 - Korn & Korn.