Matemática e Finanças: O homem que calculava e negociava

Max O. Souza & Jorge P. Zubelli

9 de novembro de 2006

Outline

Modelo de Arrow-Debreu

Vamos considerar uma economia com N ativos $s_1, s_2, \ldots, s_N$ e M possíveis estados. Um investidor toma uma posição inicial e, após um período, um estado é escolhido e a posição do investidor é liquidada.
O modelo fica totalmente especificado, a partir de

$$\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_N)^t \in \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times M},$$

- $\mathbf{p}$ é o vetor de preços
- p_i o preço dos ativo s_i
- D é a matriz de fluxos de caixa.

No modelo de Arrow-Debreu, estamos supondo que D é conhecida por todos, mas que o estado final da economia **não** é conhecido *a priori*.

Interpretação da Matriz D

Para cada ativo s_i temos após um periodo um fluxo D_{ij} se o estado da economia é j.
Exemplo: Se o meu ativo s_r é um ativo sem risco e sem pagamento de juros temos $D_{r,j} = 1$ para qualquer dos estados $j = 1, \cdots, M$. Ou seja, linha r é $(1, \cdots, 1)$.

Definição

Um portfólio de ativos é um vetor

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)^t \in \mathbb{R}^N,$$

onde $\theta_i > 0$ *significa que o investidor está comprado no ativo e* $\theta_i < 0$ *significa que o investidor está vendido no ativo.*

No modelo de Arrow-Debreu, estar vendido num ativo significa tomar emprestado uma certa quantidade deste ativo e vendê-lo a preço presente.

Definição

Um portfólio de arbitragem é um portfólio satisfazendo uma das duas condições abaixo:

1. $$\theta \cdot \mathbf{p} = 0, \quad \theta^t D \geq 0 \quad \textit{e, para algum } j, \quad \theta \cdot D_{\cdot,j} > 0$$

2. $$\theta \cdot \mathbf{p} < 0, \quad \theta^t D \geq 0$$

No primeiro caso, o portfólio não tem custo inicial, não oferece risco de prejuízo e ainda oferece um possibilidade real de lucro. No segundo caso, o portfólio dá lucro imediato, sem risco de prejuízo no futuro.

Teorema

Se existe um vetor de números positivos π, tal que

$$\mathbf{p} = D\pi, \tag{1}$$

então não existem portfólios de arbitragem.

A partir do vetor

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_M)^t$$

podemos definir

$$\hat{\pi}_j = \frac{\pi_j}{\sum_{k=1}^{M} \pi_k}.$$

Seja

$$(1 + R)^{-1} = \sum_{k=1}^{M} \pi_k.$$

Vamos ver qe R representa a taxa de juros da economia.

Ativo sem risco

Suponha que exista um ativo que garanta o pagamento de R$ 1,00, qualquer que seja o estado. O vetor de fluxo de caixa de um ativo assim seria $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{1\times M}$. Supondo que vale (1), temos então, se denotarmos o preço do ativo sem risco por p_{sr} que

$$p_{sr} = \sum_{k=1}^{M} \pi_k = (1+R)^{-1}$$

Portanto, R pode ser associado à taxa de juros sem risco vigente na economia em questão.

Rescrevendo (1), temos

$$p_i = \frac{1}{1+R} \sum_{j=1}^{M} D_{ij}\hat{\pi}_j = \frac{1}{1+R}\mathbb{E}(D_i),$$

onde $\mathbb{E}$ é o valor esperado com respeito à medida de probabilidade dada por $\{\hat{\pi}_j\}$.

Corolário

Suponha que o mercado não admita portfólios de arbitragem e que exista empréstimo sem risco a taxa R. Então existe uma medida de probabilidade no conjunto de estados tal que o valor justo do ativo é o valor esperado dos seus fluxos de caixa descontado pela taxa R.

Terminologia A medida mencionada no corolário acima é geralmente conhecida como *Medida Neutra ao Risco* ou *Medida Martingal*.

Nota A probabilidade neutra ao risco **não** está associada à probabilidade freqüêncial observada na economia.

Mais ainda, podemos escrever

$$\sum_{j=1}^{M} \hat{\pi}_j \left(\frac{D_{ij}}{p_i} - 1 \right) = R.$$

Ou seja, sob a probabilidade neutra ao risco, o retorno esperado de qualquer ativo é R.

Replicação

Definição

Dizemos que um portfólio $(\theta_1, \ldots, \theta_K)$ de ativos $S_1, \ldots, S_K$ replica o ativo S, se o fluxo de caixa do portfólio e do ativo S são os mesmos, qualquer que seja o estado da economia.

Proposição (Lei do Preço Único)

Em um mercado sem oportunidade de arbitragem, se um ativo admite um portfólio replicador, então o preço justo do ativo é o mesmo do seu portfólio replicador.

No que se segue, veremos algumas aplicações da Lei do Preço Único.

Contrato a Termo

Definição

Um contrato a termo é um acordo de compra de um ativo S por um valor acordado K ao fim de um certo período.

Vamos de chamar de Q o preço justo deste contrato. Então

$$Q = S - \frac{K}{1+R}.$$

É conveniente escolher K de forma que $Q = 0$. Neste caso o *preço a termo* é dado por $F = (1+R)P \quad (K = F \Rightarrow Q = 0)$.

Definição

Uma opção de compra (Call) sobre o ativo S é um documento que dá o direito, mas não a obrigação, ao seu detentor de comprar uma unidade do ativo S pelo preço K—dito o strike—no tempo T, que é o tempo de expiração da opção.

Definição

Uma opção de venda (Put) sobre o ativo S é um documento que dá o direito, mas não a obrigação, ao seu detentor de vender uma unidade do ativo S pelo preço K—dito o strike—no tempo T, que é o tempo de expiração da opção.

Porque o uso opções? Pequeno histórico:

- Usadas na forma de contratos por séculos.
- Holanda Sec. XVII. Plantadores de tulipas necessitavam de segurança em relação a flutuações dos preços. Contratos para vender tulipas por um preço dado.
- Londres Sec. XVIII. Porém faltavam instrumentos p/ garantir cumprimento dos contratos....
- Regulamentação em 1930.
- Início dos anos 70 o uso de opções ganhou importância econômica.
- 1973 CBOE.

Pequeno histórico. Cont.

- Atualmente mercado de *derivativos* (ou seja instrumentos derivados de bens primários) ultrapassa em muito o valor do mercado primário.
- Merton (1969) e (1971). Seleção de portfolios sob incerteza.
- Black-Scholes (1973) Pricing of options and corporate liabilities.
- 1997 Nobel de economia p/ Merton e Scholes.

Paridade Put-Call

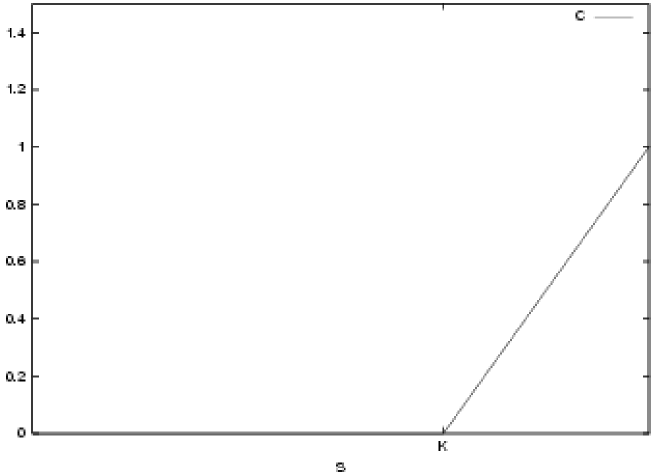
Vamos mostrar que vale a relação:

$$P = C - S + \frac{K}{1+R}.$$

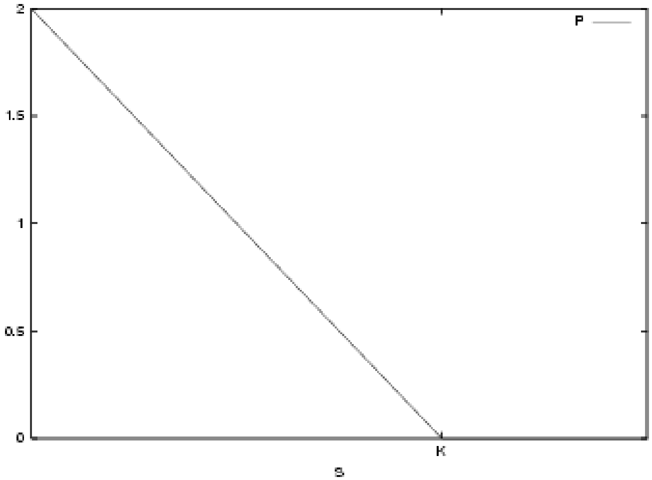
Vamos considerar a posição no lado esquerdo da equação: comprado numa opção de compra e em $K/(1+R)$ no banco e vendido no ativo. Se no tempo de expiração, o valor for menor que K, então a opção de compra não é exercida, temos K no banco e estamos vendidos no ativo, o que corresponde exatamente ao fluxo de caixa de uma opção de venda nesse caso. Se o preço do ativo for maior do que K, exercemos a opção de compra usando os K reais disponíveis no banco e retornamos o ativo vendido, ficando com uma posição zerada.

Contrato A TERMO

Nas figuras abaixo vemos geometricamente uma replicação de um contrato a termo através dos gráficos do valor de vencimento de uma posição comprada em opções de compra e vendida em opções de venda.

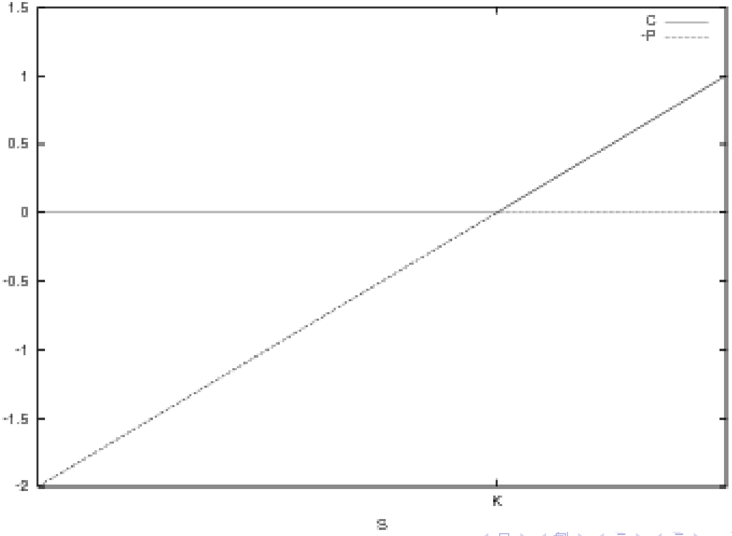


CALL



PUT

Contrato a Termo



Exemplo de Aplicação da Teoria:

Financiamento da firma: Acionistas + Empréstimos Bancários.
$S = S(t)$ valor total de uma firma: Soma do valor de suas ações e do débito com o banco.

Exemplo de Aplicação da Teoria:

Financiamento da firma: Acionistas + Empréstimos Bancários.
$S = S(t)$ valor total de uma firma: Soma do valor de suas ações e do débito com o banco.
Ao fim de um periodo $t = T$ ela deve pagar um *bond* ao banco com valor de face K. O restante é pago aos acionistas. Payoff para os acionistas: $(S(T) - K)^+$
Caberá ao banco: $\min(S(T), K) = K - (K - S(T))^+$.

Exemplo de Aplicação da Teoria:

Financiamento da firma: Acionistas + Empréstimos Bancários.
$S = S(t)$ valor total de uma firma: Soma do valor de suas ações e do débito com o banco.
Ao fim de um periodo $t = T$ ela deve pagar um *bond* ao banco com valor de face K. O restante é pago aos acionistas. Payoff para os acionistas: $(S(T) - K)^+$
Caberá ao banco: $\min(S(T), K) = K - (K - S(T))^+$. Por não arbitragem: (para $t < T$)

$$S(t) = E(t) + D(t)$$

(a identidade acima é fundamental em contabilidade)
$S(t) =$ valor total da firma.
$E(t) =$ valor para os acionistas (*equity*).
$D(t) =$ débito $=$ valor do bond devido aos bancos.

Exemplo de Aplicação da Teoria:

Financiamento da firma: Acionistas + Empréstimos Bancários.
$S = S(t)$ valor total de uma firma: Soma do valor de suas ações e do débito com o banco.
Ao fim de um periodo $t = T$ ela deve pagar um *bond* ao banco com valor de face K. O restante é pago aos acionistas. Payoff para os acionistas: $(S(T) - K)^+$
Caberá ao banco: $\min(S(T), K) = K - (K - S(T))^+$. Por não arbitragem: (para $t < T$)

$$S(t) = E(t) + D(t)$$

(a identidade acima é fundamental em contabilidade)
$S(t) =$ valor total da firma.
$E(t) =$ valor para os acionistas (*equity*).
$D(t) =$ débito $=$ valor do bond devido aos bancos. Note que $E(t)$ é o preço de uma call sobre S com strike K e vencimento T
$D(t) = K/(1+R)^{T-t} - P(t)$ onde $P(t)$ é o valor de uma put.

Modelo Binomial

Vamos considerar uma economia com dois ativos e dois possíveis estados, i.e, $N = M = 2$ no modelo de Arrow-Debreu.
Vamos supor que haja empréstimo à taxa R—um ativo sem risco.
O ativo de risco tem preço P e fluxos de caixa $P \times U$ no estado I e $P \times D$ no estado II, com $D < U$.

Vamos supor que vale não-arbitragem para essa economia. Nesse caso, temos que ter

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{1+R}\{\hat{\pi}_1 PU + \hat{\pi}_2 PD\} \\
\hat{\pi}_1 &+ \hat{\pi}_2 = 1.
\end{aligned}
$$

Que pode ser rescrito como

$$
\begin{aligned}
\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2 &= 1 \\
\hat{\pi}_1 U + \hat{\pi}_2 D &= 1 + R
\end{aligned}
$$

cuja solução é

$$
\hat{\pi}_1 = \frac{1+R-D}{U-D} \quad \text{e} \quad \frac{U-(1+R)}{U-D}.
$$

Note que temos soluções positivas se, e somente se,

$$D < 1 + R < U.$$

Essa condição está diretamente relacionada com não-arbitragem. De fato, se $1 + R \geq U$, uma posição vendida no ativo de risco com uma contrapartida comprada num depósito remunerado garante um fluxo de caixa não-negativo, com possibilidade de um fluxo positivo. Por outro lado, se $1 + R \leq D$, uma posição comprada no ativo e um empréstimo correspondente, também garante fluxos não-negativos, como possibilidade de fluxo positivo. Nos dois casos, temos uma arbitragem.

Pagamento contigenciado ao estado

Considere um ativo que tem fluxo de caixa D_1 no estado I e D_2 no estado II.

Um argumento de não arbitragem nos dá que o preço justo desse ativo seria

$$V = \frac{1}{1+R}\{\hat{\pi}_1 D_1 + \hat{\pi}_2 D_2\}$$

Em palavras: O preço justo (hoje) do contrato contingenciado é o valor esperado do fluxo de caixa com relação à medida neutra ao risco descontado a taxa de juros.

Exemplo

Considere uma Call no ativo de risco com $PD < K < PU$. Nesse caso os possíveis fluxos de caixa são

$$D_1 = PU - K \quad \text{e} \quad D_2 = 0.$$

Portanto, o valor justo desta call, V_{call}, é dado por

$$V_{\mathrm{call}} = \frac{1}{1+R}\frac{1+R-D}{U-D}(PU-K)$$

Hedging e Replicação

Considere um portfólio $\theta = (\theta_1, \theta_2)^t$, com θ_1 unidades do ativo de risco a um preço P e θ_2 unidades em depósito remunerado—a um preço de $1/1+R$.
O valor do portfólio vai ser então

$$\theta_1 PU + \theta_2 = D_1, \qquad \text{no estado I;}$$
$$\theta_1 PD + \theta_2 = D_2, \qquad \text{no estado II.}$$

Resolvendo para θ_1 e θ_2, temos

$$\theta_1 = \frac{D_1 - D_2}{PU - PD} \quad \text{e} \quad \theta_2 = \frac{UD_2 - DD_1}{U - D}$$

Logo, o valor do portfólio será

$$V = \theta_1 P + \frac{\theta_2}{1+R}$$

i.e.

$$V = \frac{1}{1+R}\{\hat{\pi}_1 D_1 + \hat{\pi}_2 D_2\}.$$

Moral Em alguns mercados, temos uma probabilidade neutra ao risco se, e somente se, podemos construir portfólios replicadores. Nesse caso, podemos precificar ativos através da Lei do Preço Único.

Definição

Um mercado com N ativos e M estados é dito completo se, para todo vetor de fluxo de caixa $(D_1, \ldots, D_M)^t$, existe um portfólio $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)^t$, cujo fluxo de caixa no estado j é D_j.

Em outras palavras,

$$\theta^t D = \mathbf{E}^t, \quad \mathbf{E} \in \mathbb{R}^M$$

tem sempre solução.
Isso será o caso quando

$$\mathrm{posto} D^t = M.$$

Proposição

Suponha uma economia sem arbitragem. O mercado é completo se, e somente se, existe um único vetor de preços de estado satisfazendo (1), ou seja,

$$\mathbf{p} = D\pi,$$

Prova

Suponha que o mercado é completo. Então, temos

$$\mathrm{posto}(D^t) = M \Rightarrow \mathrm{nul}(D) = 0.$$

Portanto D é injetora e, assim, a equação $D\pi = \mathbf{p}$ tem, no máximo, uma única solução.
CONTINUA ...

Por outro lado, suponha que o mercado não seja completo. Nesse caso,

$$\mathrm{posto}(D^t) < M \Rightarrow \mathrm{posto}(D) < M$$

Isso quer dizer, que existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^M$ satisfazendo $D\mathbf{v} = 0$. Mas então, se π é um vetor de preço de estados, temos que

$$D(\pi + \rho\mathbf{v}) = \mathbf{p}.$$

Como π tem entradas positivas, tomando ρ suficientemente pequeno temos que $\pi + \rho\mathbf{v}$ tem entradas positivas. Assim, os preços de estado não são únicos.

O Modelo Trinomial

Considere uma economia com dois ativos, $N = 2$ e três possíveis estados $M = 3$, com fluxos de caixas PU, PM e PD, $D < M < U$ e empréstimo sem risco a taxa R.
Temos então

$$\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2 + \hat{\pi}_3 = 1$$
$$U\hat{\pi}_1 + M\hat{\pi}_2 + D\hat{\pi}_3 = 1.$$

Mais uma vez, temos soluções positivas apenas se

$$D < 1 + R < U.$$

As soluções positivas são segmentos de reta com extremos

$$\hat{\pi}_1 = \frac{1+R-D}{U-D}, \quad \hat{\pi}_2 = 0 \quad \text{e} \quad \hat{\pi}_3 = \frac{1+R-D}{M-D}$$

e

$$\hat{\pi}_1 = 0, \quad \hat{\pi}_2 = \frac{M-(1+R)}{M-D} \quad \text{e} \quad \hat{\pi}_3 = \frac{1+R-D}{M-D} \qquad (M \geq 1+R);$$

ou

$$\hat{\pi}_1 = \frac{1+R-M}{U-M}, \quad \hat{\pi}_2 = \frac{U-(1+R)}{U-M} \quad \text{e} \quad \hat{\pi}_3 = 0 \qquad (M < 1+R).$$

Como

$$V = \frac{1}{1+R}\{\hat{\pi}_1 D_1 + \hat{\pi}_2 D_2 + \hat{\pi}_3 D_3\}$$

Programação linear Máximo de V ocorre nos pontos extremos

Exemplo

Considere um *call* com strike K satisfazendo $PM < K < PU$.
Nesse caso, os fluxos de caixa são: $PU - K$ no estado I, e zero nos estados II e III.
Assim, se $M \geq 1 + R$, temos que

$$V_{\text{call}} = \frac{\hat{\pi}_1}{1+R} D_1 \begin{cases} V^+ & \frac{1+R-D}{(1+R)(U-D)}(PU - K) \\ V^- & 0 \end{cases}$$

Se, $M < 1 + R$, temos em vez:

$$V_{\text{call}} = \frac{\hat{\pi}_1}{1+R} D_1 \begin{cases} V^+ & \frac{1+R-D}{(1+R)(U-D)}(PU - K) \\ V^- & \frac{1+R-M}{(1+R)(U-D)}(PU - K) \end{cases}$$

Interpretação Financeira

Podemos interpretar esses limites nos preços dos ativos em termos de aversão ao risco: um comprador vai sempre oferecer V^- (Bid) para não estar correndo risco. Por outro lado, para não incorrer em riscos, um vendendor vai estar sempre pedindo V^+ (Ask). No caso de uma negociação por V, com $V^- < V < V^+$, existe risco tanto para o comprador quanto para o vendedor.

Modelo Binomial

Como antes, dois ativos e dois estados, mas $N+1$ datas de negócio.
Vamos denotar por S_n o preço do ativo de risco em $t = t_n$. A dinâmica de preços do ativo é dada por

$$S_{n+1} = H_{n+1} S_n, \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

onde

$$H_n = \begin{cases} U & \text{com probabilidade } p, \\ D & \text{com porbabilidade } q, \end{cases}$$

com $p + q = 1$.

Entretanto, já vimos que as probabilidade freqüênciais não são releventes para uma precificação correta do ativo. Vamos supor que exista uma medida neutra ao risco e que, nessa medida, em cada período o valor correto do ativo é o valor esperado do fluxo de caixa no próxio período. Mais precisamente

Hipótese Martingal Existe uma medida de probabilide para H_n tal que

$$S_n = \frac{1}{1+R}\mathbb{E}(S_{n+1}|S_n),$$

que pode ser escrita como

$$1 = \frac{1}{1+R}\{UP_U + DP_D\}, \quad P_U + P_D = 1.$$

A unica solução do sistema acima é dada por

$$P_U = \frac{1+R-D}{U-D}, \quad P_D = \frac{U-(1+R)}{U-D}, \quad D < 1+R < U.$$

Logo temos o seguinte resultado

Proposição

Dados parâmetros U, D e R, satisfazendo $D < 1 + R < U$, existe uma única medida de probabilidade neutra ao risco para H_n e, conseqüentemente, para a os espaço de caminhos de preço do ativo de risco.

Precificação via Medida Neutra ao Risco

Suponha um payoff $F(S)$. Vencimento em $t = t_N$.
Vamos denotar por S_n^j o preço do ativo no tempo $t = t_n$, que teve j choques de preço dados por U. Vamos escrever também $V_n^j = V(S_n^j)$, onde $V_n(S_n)$ denota o preço do contrato no tempo $t = t_n$ com o ativo custando S_n. Sob a medida neutra ao risco:

$$V_n^j = \frac{1}{1+R}\mathbb{E}\{V_{n+1}|S_n = S_n^j\}$$

$$V_n^j = \frac{1}{1+R}\{P_u V_{n+1}^{j+1} + P_D V_{n+1}^j\}$$

Temos que ter também a condição terminal, i.e,

$$V_N^j = F(S_N^j).$$

Para resolver a recursão acima em forma fechada, escrevemos

$$\begin{aligned} V_n^j &= \frac{1}{1+R}^{N-n} \mathbb{E}\{F(S_N)|S_n = S_n^j\} \\ &= \frac{1}{1+R}^{N-n} \sum_{k=0}^{N} \mathrm{Prob}(S_N = S_N^k | S_n = S_n^j) F(S_N^k). \end{aligned}$$

Mas

$$\mathrm{Prob}(S_N = S_N^k | S_n = S_n^j) F(S_N^k) = \binom{N-n}{k-j} P_U^{k-j} P_D^{N-n-k+j}.$$

Portanto,

$$V_n^j = \frac{1}{1+R}^{N-n} \sum_{k=k}^{N-n+j} \binom{N-n}{k-j} P_U^{k-j} P_D^{N-n-k+j} F(S_N^k).$$

Se $n = j = 0$, temos

$$V_0^0 = \frac{1}{1+R}^{N} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} P_U^k P_D^{N-k} F(S_N^k).$$

Precificação via Replicação

Considere um portfólio $\theta_n^j = (\Delta_n^j, B_n^j)^t$. O valor do portfólio será

$$V_n^j = \Delta_n^j S_n^j + B_n^j.$$

Dependendo do estado, teremos

$$\begin{aligned} \Delta_n^{j+1} + B_n^j(1+R) &= V_{n+1}^{j+1} \\ \Delta_n^j + B_n^j(1+R) &= V_{n+1}^j \end{aligned}$$

Resolvendo para Δ_n^j e B_n^j, obtemos

$$\Delta_n^j = \frac{V_{n+1}^{j+1} - V_{n+1}^j}{S_{n+1}^{j+1} - S_{n+1}^j} \quad \text{e} \quad B_n^j = -\frac{1}{1+R}\frac{S_{n+1}^j V_{n+1}^{j+1} - S_{n+1}^{j+1} V_{n+1}^j}{S_{n+1}^{j+1} - S_{n+1}^j}$$

Portanto

$$V_n^j = \frac{1}{1+R}\left[\frac{S_n^j(1+R) - S_{n+1}^j}{S_{n+1}^{j+1} - S_{n+1}^j} V_{n+1}^{j+1} + \frac{S_{n+1}^{j+1} - S_n^j(1+R)}{S_{n+1}^{j+1} - S_{n+1}^j} V_{n+1}^j\right]$$
$$= \frac{1}{1+R}[P_U V_{n+1}^{j+1} + P_D V_{n+1}^j]$$

Levando em conta que $V_N^j = F(S_N^j)$, temos a mesma recursão anterior.

Obs A recursão acima corresponde a uma equação de diferenças para o preço. No caso de tempo contínuo esta é a célebre equação de Black-Scholes.

Temos então a seguinte estratégia:

1. No tempo $t = t_n$ montamos um portfólio $\theta_n^j = (\Delta_n^j, B_n^j)^t$.
2. A partir daí

$$\Delta_k^j = \frac{V_{k+1}^{j+1} - V_{k+1}^j}{S_{k+1}^{j+1} - S_{k+1}^j}, \quad n \leq k \leq N.$$

3. Claramente teremos

$$B_k^j = V_k^j - \Delta_k^j S_k^j.$$

Precificação de Calls & Puts

No caso de uma Call, temos

$$F(S_N) = \max(S_N - K, 0)$$

Escrevendo $S_0^0 = S$, temos que

$$\begin{aligned} C(S,K;N) &= \frac{1}{(1+R)^N} \sum_{k=0} N \binom{N}{k} P_U^k P_D^{N-k} \max(S_N^k - K, 0) \\ &= \frac{1}{(1+R)^N} \sum_{S_N^k \geq K} N \binom{N}{k} P_U^k P_D^{N-k} (S_N - K) \\ &= \sum_{k>k_0}^{N} \binom{N}{k} Q_U^k Q_D^{N-k} - \frac{K}{1+R}^N \sum_{k>k_0}^{N} \binom{N}{k} P_U^k P_D^{N-k}, \end{aligned}$$

onde

$$Q_U = \frac{U}{1+R} P_U \quad \text{e} \quad Q_D = \frac{D}{1+R} P_D.$$

Note que $Q_U + Q_D = 1$. Também

$$k_0 = \ln(K/SD^n)/\ln(U/D).$$

Construção do Portfólio Replicador

$$E_n^j = \frac{1}{1+R}\left[P_U E_{n+1}^{j+1} + P_D E_{n+1}^j\right]$$

satisfazendo as seguintes condições

$$E_N^j = S_N^j, \quad S_N^j \geq K \quad \text{e} \quad E_N^j = 0, \quad S_N^j < K.$$

$$B_n^j = \frac{1}{1+R}\left[P_U B_{n+1}^{j+1} + P_D B_{n+1}^j\right],$$

satisfazendo

$$B_N^j = -K, \quad S_N^j \geq K \quad \text{e} \quad B_N^j = 0, \quad S_N^j < K.$$

Assim observamos que o portfólio replicador é basicamente:

- Ficar comprando no ativo de risco
- Ficar vendido em dinheiro—contrair uma dívida.

Note também que

- $\Delta \to 1$, quando $S \gg K$;
- $\Delta \to 0$, quando $S \ll K$;

No caso da Put, podemos usar a paridade Put-Call, i.e,

$$P = C - S + \frac{K}{1+R},$$

donde

$$P(S,K;N) = \frac{K}{(1+R)^N} \sum_{k=0}^{k<k_0} \binom{N}{k} P_U^k P_D^{N-k} - S \sum_{k=0}^{k<k_0} \binom{N}{k} Q_U^k Q_D^{N-k}$$

Seja

$$\mathrm{d}t = \frac{T}{N}, \quad R = \mathrm{e}^{\mathrm{d}t} - 1 \approx \mathrm{d}t.$$

Seja Y o processo de crescimento dado por

$$Y = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{S_N}{S_0} \right)$$

Para o ativo sem risco temos $Y = r$.
Por outro lado, no caso do ativo de risco temos

$$\ln \left(\frac{S_N}{S_0} \right) = \sum_{n=1}^{N} \ln \left(\frac{S_n}{S_{n-1}} \right) = \sum_{n=1}^{N} \ln(H_n).$$

Vamos escrever

$$\nu = \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}(\ln(H_n)) = \frac{1}{\mathrm{d}t} \{\ln UP_U + \ln DP_D\}.$$

Por outro lado,

$$\mathrm{Var}\, Y = \frac{1}{T^2}\left(\sum_{n=1}^{N} \ln(H_n)\right) = \frac{N}{T^2}\mathrm{Var}\left(\ln(H_1)\right).$$

Logo

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\, Y &= \frac{1}{T\mathrm{d}t}\left\{\ln^2 UP_U + \ln^2 DP_D - [\ln UP_U + \ln DP_D]^2\right\} \\ &= \frac{1}{T\mathrm{d}t}\left[\ln\left(\frac{U}{D}\right)\right]^2 P_U P_D.\end{aligned}$$

Fazendo $T = 1$, temos a *volatilidade* do ativo de risco:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mathrm{d}t}\left[\ln\left(\frac{U}{D}\right)\right]^2 P_U P_D.$$

Calibragem

Seja

$$U = U' \mathrm{e}^{\mathrm{d}t}, \quad D = D' \mathrm{e}^{\mathrm{d}t}.$$

Nesse caso, temos

$$U' P_U + D' P_D = 1$$

Seja

$$\frac{U}{D} = \mathrm{e}^{2\rho\sqrt{\mathrm{d}t}}.$$

$$\begin{cases} P_U + P_D = 1 \\ P_U P_D = \frac{\sigma^2}{4rho^2} \end{cases}$$

$$P_U = \frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}}\right] \quad \text{e} \quad P_D = \frac{1}{2}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}}\right]$$

Como

$$P_U = \frac{1 - D'}{U' - D'} \quad \text{e} \quad P_U = \frac{U' - 1}{U' - D'}.$$

Crescimento esperado

Vamos calcular

$$\nu = \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\mathrm{d}t}\{\ln UP_U + \ln DP_D\}$$

Substituindo os valores de U e D, obtemos:

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{1}{dt}\left\{r\mathrm{d}t + (P_U - P_D)\frac{\rho}{\sqrt{\mathrm{d}t}} - \ln\left[P_D\mathrm{e}^{-\rho\sqrt{\mathrm{d}t}} + P_U\mathrm{e}^{\rho\sqrt{\mathrm{d}t}}\right]\right\} \\
&= r + (P_U - P_D)\frac{\rho}{\sqrt{\mathrm{d}t}} - \frac{1}{\mathrm{d}t}\ln\left[1 + (P_U - P_D)\rho\sqrt{\mathrm{d}t} + \frac{\rho^2\mathrm{d}t}{2} + \mathcal{O}(\mathrm{d}t^{3/2}\right. \\
&= r + (P_U - P_D)^2\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^2}{2} + \mathcal{O}(\mathrm{d}t^{1/2})
\end{aligned}$$

$$P_U - P_D = \pm\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}},$$

obtemos

$$\nu = r - \frac{\sigma^2}{2} + \mathcal{O}(\mathrm{d}t^{1/2}). \tag{2}$$

Note que o ganho esperado, para $\mathrm{d}t \ll 1$ depende apenas da taxa de juros e da volatilidade do ativo de risco e **não** da percepção subjetiva de crescimento do ativo dada por ρ. Esse é um dos pontos cruciais da teoria.

Vamos estudar o modelo binomial, quando $\mathrm{d}t \to 0$.
Note que, nesse caso, temos

$$\nu = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

e, de qualquer maneira, temos

$$\mathrm{Var}\,(Y) = \frac{\sigma^2}{T}$$

A lei dos grande números nos garante que, quando $\mathrm{d}t \to 0$, i.e, quando $N \to \infty$, o processo Y deve convergir—num sentido apropriado—para uma variável aleatório com distribuição normal. Como a média foi ajustada, em primeira ordem, e a variância é do processo Y é fixa, temos que, neste limite, devemos ter uma normal com media *znu* e variância σ^2.
Em outras palavras

$$Y = \frac{\sigma}{\sqrt{T}} Z + r - \frac{\sigma^2}{2},$$

Portanto, da definição de Y, que

$$S_T = S\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}Z+(r-\sigma^2/2)T} \tag{3}$$

A expressão (3) é denominada a aproximação lognormal para o modelo binomial e corresponde à aproximação obtida, no limite $\mathrm{d}t \to 0$.

Considere um pagamento contigenciado com valor no vencimento dado por $F(S_N)$.

O valor desse contranto em $t = 0$ é

$$V = \mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}(F(S_N)).$$

Sob hipóteses bastante razoáveis—por exemplo crescimento linear de F, quando $S \to \infty$—o Teorema do Limite Central nos garante que

$$\lim_{\mathrm{d}t\to 0} V = \mathrm{e}^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F\left(S\mathrm{e}^{\zeta\sigma\sqrt{T}+(r-\sigma^2/2)T}\right)\mathrm{e}^{-\zeta^2/2}\,\mathrm{d}\zeta$$

Fórmula de Black-Scholes

No caso de uma opção de compra (Call), temos

$$
\begin{aligned}
C(S,K;T) &= \mathrm{e}^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\max\left\{S\mathrm{e}^{\zeta\sigma\sqrt{T}+(r-\sigma^2/2)T},0\right\}\mathrm{e}^{-\zeta^2/2}\,\mathrm{d}\zeta\\
&= \mathrm{e}^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}S\mathrm{e}^{\zeta\sigma\sqrt{T}+(r-\sigma^2/2)T}\mathrm{e}^{-\zeta^2/2}\,\mathrm{d}\zeta-\\
&- K\mathrm{e}^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}\mathrm{e}^{-\zeta^2/2}\,\mathrm{d}\zeta,
\end{aligned}
$$

onde

$$
-d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\sqrt{T}}{\sigma}.
$$

Denotando a densidade de probabilidade da normal de média zero e variância um por

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-\zeta^2/2}\,\mathrm{d}\zeta,$$

temos que

$$C(S, K; T) = SN(d_1) - \mathrm{e}^{-rT} KN(d_2),$$

onde

$$d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{S\mathrm{e}^{rT}}{K}\right) \pm \frac{\sigma}{2}\sqrt{T}.$$

No caso de uma opção de compra podemos usar a paridade *Put* − *Call* e o fato de $N(-z) = 1 - N(z)$ para obtermos

$$P(S, K; T) = K\mathrm{e}^{-rT} N(-d_2) - SN(-d_1).$$

Conclusões

- Conceito de Não-Arbitragem
- Conceito de Medida Neutra ao Risco
- Contratos Contingenciados
- Precificação por Medida Neutra ao Risco e por Não-Arbitragem
- Modelo Binomial
- Fórmula de Black-Scholes
- Opções/Derivativos/Avaliação de Firmas

Bibliografia Anotada

- Referência Fundamental na preparação destas notas: Livro de Marco Avellaneda e Peter Laurence *Quantitative Modeling of Derivative and Securities: From Theory to Practice*
- Korn & Korn: Option Pricing and Portfolio Optimization.
- Páginas úteis: http://www.impa.br/~zubelli/MATHFI