

Matemática & Finanças: o homem que calculava e negociava

Max O. Souza (UFF) - J.P.Zubelli (IMPA)

13 de novembro de 2006

Outline

- 1 Motivação
- 2 Derivativos
- 3 Exemplos

Mercado de Capitais

- Negociação de títulos fungíveis.
- Um bem é fungível se pode ser facilmente trocado ou substituído por outro de igual valor.
- Exemplos
 - ouro é fungível;
 - diamantes não são fungíveis;
 - petróleo é fungível;
 - ações são fungíveis;

Tipos de mercado

Exemplos de Mercados

- ações;
- commodities;
- renda fixa;
- derivativos;

Valor do Mercado

- mercado de ações: 25 trilhões de dólares;
- mercado de renda fixa: 50 trilhões de dólares;
- mercado de derivativos: 300 trilhões de dólares;

Opções, Futuros e Derivativos

- Por quê? PROTEÇÃO Redução de Risco
- Quando? A qualquer momento
- Quem? MUITAS PESSOAS!
- Exemplos
 - Renda Fixa
 - Seguro
 - Fundos de Pensão
 - Câmbio
 - Clima

Opções, Futuros e Derivativos

- Por quê? **PROTEÇÃO** Redução de Risco
- Quando? A qualquer momento
- Quem? **MUITAS PESSOAS!**
- Exemplos
 - Renda Fixa
 - Seguro
 - Fundos de Pensão
 - Câmbio
 - Clima

Opções, Futuros e Derivativos

- Por quê? **PROTEÇÃO** Redução de Risco
- Quando? A qualquer momento
- Quem? **MUITAS PESSOAS!**
- Exemplos
 - Renda Fixa
 - Seguro
 - Fundos de Pensão
 - Câmbio
 - Clima

Opções, Futuros e Derivativos

- Por quê? PROTEÇÃO Redução de Risco
- Quando? A qualquer momento
- Quem? MUITAS PESSOAS!
- Exemplos
 - Renda Fixa
 - Seguro
 - Fundos de Pensão
 - Câmbio
 - Clima

Opções, Futuros e Derivativos

- Por quê? PROTEÇÃO Redução de Risco
- Quando? A qualquer momento
- Quem? MUITAS PESSOAS!
- Exemplos
 - Renda Fixa
 - Seguro
 - Fundos de Pensão
 - Câmbio
 - Clima

Opções, Futuros e Derivativos

- Por quê? PROTEÇÃO Redução de Risco
- Quando? A qualquer momento
- Quem? MUITAS PESSOAS!
- Exemplos
 - Renda Fixa
 - Seguro
 - Fundos de Pensão
 - Câmbio
 - Clima

Opções, Futuros e Derivativos

- Por quê? PROTEÇÃO Redução de Risco
- Quando? A qualquer momento
- Quem? MUITAS PESSOAS!
- Exemplos
 - Renda Fixa
 - Seguro
 - Fundos de Pensão
 - Câmbio
 - Clima

Opções, Futuros e Derivativos

- Por quê? PROTEÇÃO Redução de Risco
- Quando? A qualquer momento
- Quem? MUITAS PESSOAS!
- Exemplos
 - Renda Fixa
 - Seguro
 - Fundos de Pensão
 - Câmbio
 - Clima

Interlúdio: Jogando dardos

- Em 1930 pesquisadores construíram carteiras de ações jogando dardos no Wall Street Journal,
- Ganho anual dessas carteiras superaram as indicações dos melhores investidores.
- Até hoje o Wall Street Journal tem uma competição de portfólios aleatórios!
- Em muitos aspectos, a história se repete...

Interlúdio: Jogando dardos

- Em 1930 pesquisadores construíram carteiras de ações jogando dardos no Wall Street Journal,
- Ganho anual dessas carteiras superaram as indicações dos melhores investidores.
- Até hoje o Wall Street Journal tem uma competição de portfólios aleatórios!
- Em muitos aspectos, a história se repete...

Nosso Primeiro Derivativo

- Um contrato a termo é um acordo que obriga o detentor a comprar uma unidade do ativo a um preço K (strike) no tempo T (expiração).
- O valor dele na expiração é

$$F = S_T - K$$

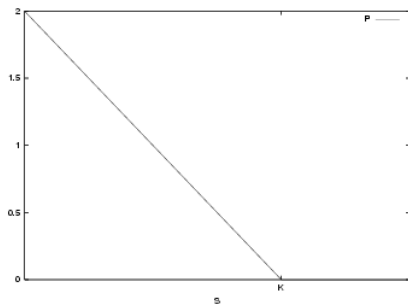
Opções

- Dão o direito mas não a obrigação de exercer alguma ação no ativo num tempo futuro por um preço especificado.
- Exemplos básicos:
 - Opção de Compra (Call): dá direito, mas não a obrigação, ao seu possuidor de comprar (uma unidade) do ativo subjacente por um preço K no tempo de expiração T .
 - Opção de Venda (Put): idem, trocando comprar por vender na definição acima.

Valor na expiração de uma Call



Valor na expiração de uma Put



Pergunta Fundamental

Quanto vale um derivativo para $t < T$?

Um Exemplo Ilustrativo

- Considere uma roleta que paga 2-1 quando sai vermelho e nada quando sai preto e cujas probabilidades são

$$\begin{cases} \text{Vermelho} & 70\% \\ \text{Preto} & 30\% \end{cases}$$

- Em média, esperamos receber por real apostado

$$2 \times 0.7 + 0 \times 0.3 = R\$1,40$$

- Um negociador local oferece um bilhete que vale
 - R\$100,00, se sair vermelho na roleta
 - R\$0,00, se sair preto.
- O bilhete é vendido a R\$60,00
- Você compra ou você vende?

Outro Exemplo Ilustrativo

- Considere uma moeda cujas probabilidades são

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cara} \quad \frac{3}{4} \\ \text{Coroa} \quad \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

- Suponha também que você receba R\$0,50 quando sai coroa e R\$2,00 quando sai cara para cada real apostado.
- Em média, esperamos acumular um valor de

$$1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{4} = \frac{7}{4} = 1,75.$$

- Quanto vale um bilhete que retorna R\$12,00 se der cara e nada se der coroa, numa cidade com empréstimo sem juros?

Almoço de graça

- Se cobrarmos R\$9,00 como seria o esperado podemos proceder da seguinte forma:
 - Apostamos R\$6,00 na moeda.
 - Se der cara recebemos R\$12,00, pagamos o valor do bilhete e lucramos R\$3,00.
 - Se der coroa recebemos R\$3,00 e lucramos R\$6,00.
- Nesse caso o preço justo seria R\$4,00!!

Almoço de graça

- Se cobrarmos R\$9,00 como seria o esperado podemos proceder da seguinte forma:
 - Apostamos R\$6,00 na moeda.
 - Se der cara recebemos R\$12,00, pagamos o valor do bilhete e lucramos R\$3,00.
 - Se der coroa recebemos R\$3,00 e lucramos R\$6,00.
- Nesse caso o preço justo seria R\$4,00!!

Almoço de graça

- Se cobrarmos R\$9,00 como seria o esperado podemos proceder da seguinte forma:
 - Apostamos R\$6,00 na moeda.
 - Se der cara recebemos R\$12,00, pagamos o valor do bilhete e lucramos R\$3,00.
 - Se der coroa recebemos R\$3,00 e lucramos R\$6,00.
- Nesse caso o preço justo seria R\$4,00!!

Almoço de graça

- Se cobrarmos R\$9,00 como seria o esperado podemos proceder da seguinte forma:
 - Apostamos R\$6,00 na moeda.
 - Se der cara recebemos R\$12,00, pagamos o valor do bilhete e lucramos R\$3,00.
 - Se der coroa recebemos R\$3,00 e lucramos R\$6,00.
- Nesse caso o preço justo seria R\$4,00!!

Almoço de graça

- Se cobrarmos R\$9,00 como seria o esperado podemos proceder da seguinte forma:
 - Apostamos R\$6,00 na moeda.
 - Se der cara recebemos R\$12,00, pagamos o valor do bilhete e lucramos R\$3,00.
 - Se der coroa recebemos R\$3,00 e lucramos R\$6,00.
- Nesse caso o preço justo seria R\$4,00!!

Almoço de graça

- Se cobrarmos R\$9,00 como seria o esperado podemos proceder da seguinte forma:
 - Apostamos R\$6,00 na moeda.
 - Se der cara recebemos R\$12,00, pagamos o valor do bilhete e lucramos R\$3,00.
 - Se der coroa recebemos R\$3,00 e lucramos R\$6,00.
- Nesse caso o preço justo seria R\$4,00!!

Headging

- Tomamos R\$8,00 emprestado.
- Apostamos na moeda.
- Se der cara: ganhamos R\$16,00; pagamos R\$12,00 ao comprador do bilhete e juntamos os R\$4,00 restantes aos R\$4,00 pagos pelo comprador e quitamos o empréstimo.
- Se der coroa: ganhamos R\$4,00. Juntando com os R\$4,00 pagos pelo comprador temos o suficiente para pagar o empréstimo.

Headging

- Tomamos R\$8,00 emprestado.
- Apostamos na moeda.
- Se der cara: ganhamos R\$16,00; pagamos R\$12,00 ao comprador do bilhete e juntamos os R\$4,00 restantes aos R\$4,00 pagos pelo comprador e quitamos o empréstimo.
- Se der coroa: ganhamos R\$4,00. Juntado com os R\$4,00 pagos pelo comprador temos o suficiente para pagar o empréstimo.

Headging

- Tomamos R\$8,00 emprestado.
- Apostamos na moeda.
- Se der cara: ganhamos R\$16,00; pagamos R\$12,00 ao comprador do bilhete e juntamos os R\$4,00 restantes aos R\$4,00 pagos pelo comprador e quitamos o empréstimo.
- Se der coroa: ganhamos R\$4,00. Juntando com os R\$4,00 pagos pelo comprador temos o suficiente para pagar o empréstimo.

Mais Hedging

- Se o bilhete fosse vendido por R\$3,00 em vez.
 - Tomamos R\$7,00 de um terceiro, nos comprometendo a pagar o retorno de uma aposta desse valor na moeda.
 - Compramos o bilhete do vendedor por R\$3,00.
 - Esperamos o resultado da moeda.
 - Se der cara: ganhamos R\$12,00 com o qual pagamos o terceiro e lucramos R\$4,00.
 - Se der coroa: ficamos com R\$4,00, pagamos R\$3,50 ao terceiro e embolsamos R\$0,50.

Mais Hedging

- Se o bilhete fosse vendido por R\$3,00 em vez.
 - Tomamos R\$7,00 de um terceiro, nos comprometendo a pagar o retorno de uma aposta desse valor na moeda.
 - Compramos o bilhete do vendedor por R\$3,00.
 - Esperamos o resultado da moeda.
 - Se der cara: ganhamos R\$12,00 com o qual pagamos o terceiro e lucramos R\$4,00.
 - Se der coroa: ficamos com R\$4,00, pagamos R\$3,50 ao terceiro e embolsamos R\$0,50.

Mas...

- Algumas objeções podem aparecer:
 - Isso deve ser uma consequência de se ter a possibilidade de ganho nulo;
 - Empréstimos sem juros nem nos contos de fada;
 - Tomar dinheiro com um terceiro e aplicar no ativo com risco não parece algo factível.
- Entretanto:
 - De fato não: se o bilhete pagasse R\$6,00 no caso de coroa e R\$12,00 se for cara o preço justo é R\$8,00 e não R\$13,00 como poderia parecer a primeira vista! Note que o bilhete está na mesma proporção da moeda agora!
 - Juros não mudam a conclusão, embora mudem os valores.
 - Ficar vendido é uma operação comum no mercado.

Mas...

- Algumas objeções podem aparecer:
 - Isso deve ser uma consequência de se ter a possibilidade de ganho nulo;
 - Empréstimos sem juros nem nos contos de fada;
 - Tomar dinheiro com um terceiro e aplicar no ativo com risco não parece algo factível.
- Entretanto:
 - De fato não: se o bilhete pagasse R\$6,00 no caso de coroa e R\$12,00 se for cara o preço justo é R\$8,00 e não R\$13,00 como poderia parecer a primeira vista! Note que o bilhete está na mesma proporção da moeda agora!
 - Juros não mudam a conclusão, embora mudem os valores.
 - Ficar vendido é uma operação comum no mercado.

Mas...

- Algumas objeções podem aparecer:
 - Isso deve ser uma consequência de se ter a possibilidade de ganho nulo;
 - Empréstimos sem juros nem nos contos de fada;
 - Tomar dinheiro com um terceiro e aplicar no ativo com risco não parece algo factível.
- Entretanto:
 - De fato não: se o bilhete pagasse R\$6,00 no caso de coroa e R\$12,00 se for cara o preço justo é R\$8,00 e não R\$13,00 como poderia parecer a primeira vista! Note que o bilhete está na mesma proporção da moeda agora!
 - Juros não mudam a conclusão, embora mudem os valores.
 - Ficar vendido é uma operação comum no mercado.

Mas...

- Algumas objeções podem aparecer:
 - Isso deve ser uma consequência de se ter a possibilidade de ganho nulo;
 - Empréstimos sem juros nem nos contos de fada;
 - Tomar dinheiro com um terceiro e aplicar no ativo com risco não parece algo factível.
- Entretanto:
 - De fato não: se o bilhete pagasse R\$6,00 no caso de coroa e R\$12,00 se for cara o preço justo é R\$8,00 e não R\$13,00 como poderia parecer a primeira vista! Note que o bilhete está na mesma proporção da moeda agora!
 - Juros não mudam a conclusão, embora mudem os valores.
 - Ficar vendido é uma operação comum no mercado.

Mas...

- Algumas objeções podem aparecer:
 - Isso deve ser uma consequência de se ter a possibilidade de ganho nulo;
 - Empréstimos sem juros nem nos contos de fada;
 - Tomar dinheiro com um terceiro e aplicar no ativo com risco não parece algo factível.
- Entretanto:
 - De fato não: se o bilhete pagasse R\$6,00 no caso de coroa e R\$12,00 se for cara o preço justo é R\$8,00 e não R\$13,00 como poderia parecer a primeira vista! Note que o bilhete está na mesma proporção da moeda agora!
 - Juros não mudam a conclusão, embora mudem os valores.
 - Ficar vendido é uma operação comum no mercado.

Mas...

- Algumas objeções podem aparecer:
 - Isso deve ser uma consequência de se ter a possibilidade de ganho nulo;
 - Empréstimos sem juros nem nos contos de fada;
 - Tomar dinheiro com um terceiro e aplicar no ativo com risco não parece algo factível.
- Entretanto:
 - De fato não: se o bilhete pagasse R\$6,00 no caso de coroa e R\$12,00 se for cara o preço justo é R\$8,00 e não R\$13,00 como poderia parecer a primeira vista! Note que o bilhete está na mesma proporção da moeda agora!
 - Juros não mudam a conclusão, embora mudem os valores.
 - Ficar vendido é uma operação comum no mercado.

Mas...

- Algumas objeções podem aparecer:
 - Isso deve ser uma consequência de se ter a possibilidade de ganho nulo;
 - Empréstimos sem juros nem nos contos de fada;
 - Tomar dinheiro com um terceiro e aplicar no ativo com risco não parece algo factível.
- Entretanto:
 - De fato não: se o bilhete pagasse R\$6,00 no caso de coroa e R\$12,00 se for cara o preço justo é R\$8,00 e não R\$13,00 como poderia parecer a primeira vista! Note que o bilhete está na mesma proporção da moeda agora!
 - Juros não mudam a conclusão, embora mudem os valores.
 - Ficar vendido é uma operação comum no mercado.

Mas...

- Algumas objeções podem aparecer:
 - Isso deve ser uma consequência de se ter a possibilidade de ganho nulo;
 - Empréstimos sem juros nem nos contos de fada;
 - Tomar dinheiro com um terceiro e aplicar no ativo com risco não parece algo factível.
- Entretanto:
 - De fato não: se o bilhete pagasse R\$6,00 no caso de coroa e R\$12,00 se for cara o preço justo é R\$8,00 e não R\$13,00 como poderia parecer a primeira vista! Note que o bilhete está na mesma proporção da moeda agora!
 - Juros não mudam a conclusão, embora mudem os valores.
 - Ficar vendido é uma operação comum no mercado.

Mas...

- Algumas objeções podem aparecer:
 - Isso deve ser uma consequência de se ter a possibilidade de ganho nulo;
 - Empréstimos sem juros nem nos contos de fada;
 - Tomar dinheiro com um terceiro e aplicar no ativo com risco não parece algo factível.
- Entretanto:
 - De fato não: se o bilhete pagasse R\$6,00 no caso de coroa e R\$12,00 se for cara o preço justo é R\$8,00 e não R\$13,00 como poderia parecer a primeira vista! Note que o bilhete está na mesma proporção da moeda agora!
 - Juros não mudam a conclusão, embora mudem os valores.
 - Ficar vendido é uma operação comum no mercado.