

Conjectura de Poincaré

Marcelo Viana

IMPA - Rio de Janeiro

Conjectura

Toda variedade fechada simplesmente conexa de dimensão 3 é equivalente à esfera 3-dimensional.

Proposta por Henri Poincaré no início do século XX (1900-04).

Demonstrada cem anos depois por Grigori Perelman, seguindo um roteiro iniciado por Richard Hamilton.

Henri Poincaré

29 de abril de 1854 - 17 de julho de 1912

Último dos grandes matemáticos universalistas.

Os seus trabalhos abarcam a maioria das áreas da Matemática e da Física Teórica (geometria, álgebra, análise, eletromagnetismo, topologia, equações diferenciais, mecânica celeste, teoria dos números).

Foi um dos artífices da Teoria da Relatividade e o fundador da área de Sistemas Dinâmicos.



Grigori Perelman



13 de junho de 1966 (São Petersburgo, Rússia)

Especialista de fama internacional com diversos trabalhos notáveis na área de Geometria, tais como a prova da Conjectura da Alma.

A partir de nov/2002, publicou na internet uma série de artigos contendo a prova da Conjectura de Poincaré e da Conjectura da Geometrização.

Em 2006 a União Matemática Internacional (IMU) concedeu-lhe a Medalha Fields. No entanto, Perelman recusou, se demitiu do Instituto Steklov, e se afastou do meio acadêmico.

Outline

- 1 **Conceitos fundamentais**
- 2 **Classificação das superfícies**
- 3 **Variedades de dimensão superior**
- 4 **Conjectura da Geometrização**
- 5 **Fluxo de Ricci**

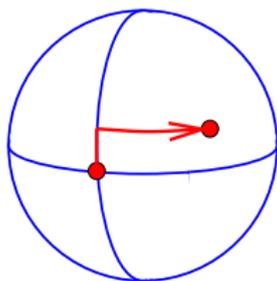
Outline

- 1 **Conceitos fundamentais**
- 2 Classificação das superfícies
- 3 Variedades de dimensão superior
- 4 Conjectura da Geometrização
- 5 Fluxo de Ricci

O que é uma variedade ?

Definição

Uma **variedade** é um espaço que pode ser descrito localmente através de coordenadas. O número de coordenadas que são necessárias é chamado **dimensão** da variedade.

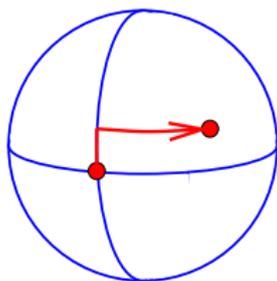


Variedades de dimensão 1 são chamadas **curvas** e variedades de dimensão 2 são chamadas **superfícies**.

O que é uma variedade ?

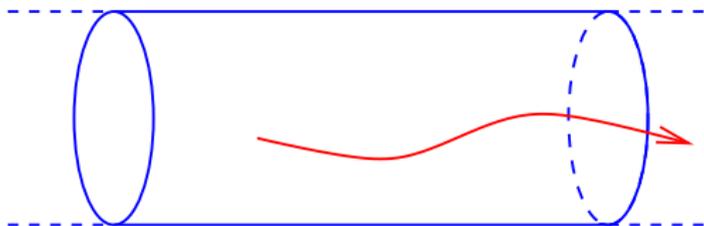
Definição

Uma **variedade** é um espaço que pode ser descrito localmente através de coordenadas. O número de coordenadas que são necessárias é chamado **dimensão** da variedade.



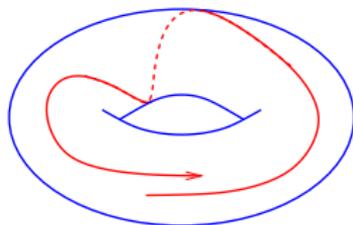
Variedades de dimensão 1 são chamadas **curvas** e variedades de dimensão 2 são chamadas **superfícies**.

O que é uma variedade fechada ?



O cilindro é uma variedade **aberta**, de dimensão 2.

O que é uma variedade fechada ?



O toro é uma variedade **fechada**, de dimensão 2.

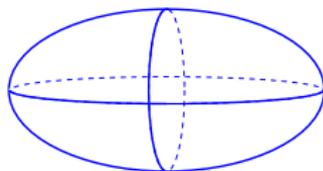
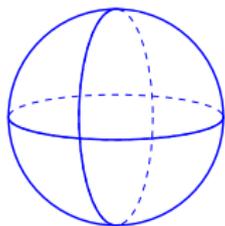
Definição

Uma variedade é **fechada** se toda a curva necessariamente se acumula em algum ponto da variedade.

O que significa "equivalente" ?

Definição

Duas variedades são equivalentes se há uma correspondência contínua entre os pontos de uma e da outra.

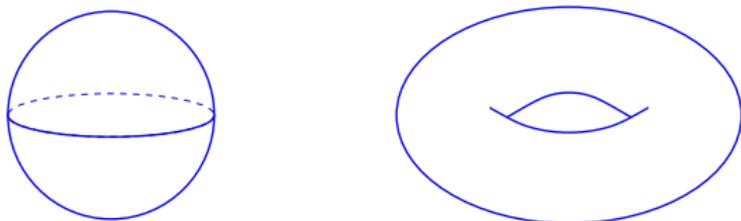


Qualquer elipsóide é equivalente a uma esfera.

O que significa "equivalente" ?

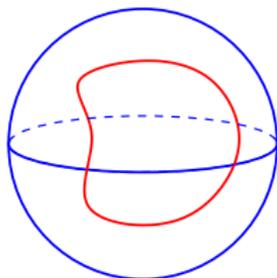
Definição

Duas variedades são equivalentes se há uma correspondência contínua entre os pontos de uma e da outra.

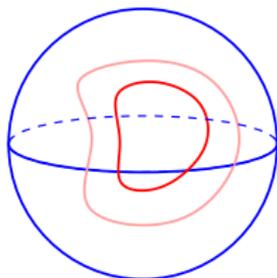


Uma esfera e um toro **não** são equivalentes.

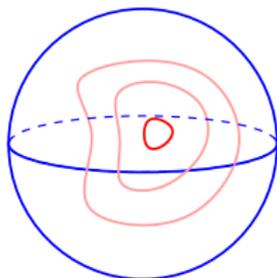
Variedades simplesmente conexas



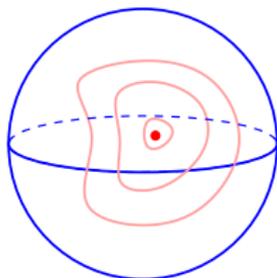
Variedades simplesmente conexas



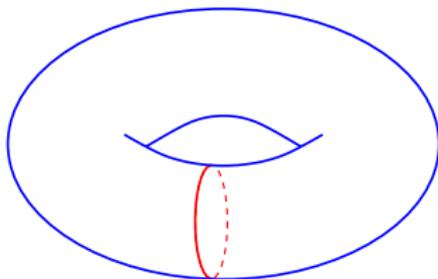
Variedades simplesmente conexas



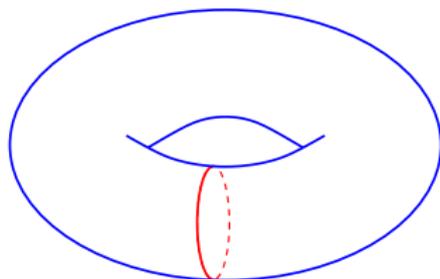
Variedades simplesmente conexas



Variedades simplesmente conexas



Variedades simplesmente conexas



Definição

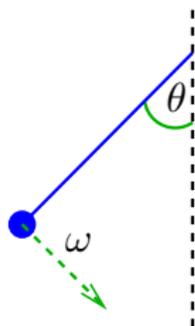
Uma variedade é **simplesmente conexa** se todo laço nela pode ser deformado até colapsar num ponto.

Porquê variedades são importantes ?

Em geral, o conjunto dos estados possíveis de um sistema experimental é uma variedade:

Porquê variedades são importantes ?

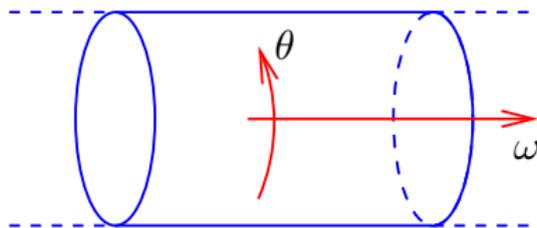
Em geral, o conjunto dos estados possíveis de um sistema experimental é uma variedade:



Cada estado do pêndulo simples corresponde a um par (θ, ω) .
O espaço de todos esses pares é um cilindro.

Porquê variedades são importantes ?

Em geral, o conjunto dos estados possíveis de um sistema experimental é uma variedade:



Cada estado do pêndulo simples corresponde a um par (θ, ω) .
O espaço de todas esses pares é um cilindro.

Porquê variedades são importantes ?

O Universo é uma variedade, de dimensão 4 (ou 10, ou ...)

Outline

- 1 Conceitos fundamentais
- 2 Classificação das superfícies**
- 3 Variedades de dimensão superior
- 4 Conjectura da Geometrização
- 5 Fluxo de Ricci

Teorema de classificação

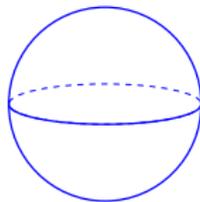
Há duas sequências fundamentais de superfícies fechadas:

Teorema de classificação

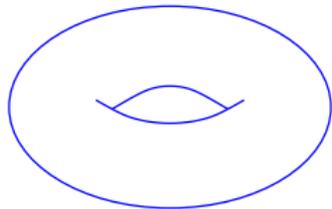
Há duas sequências fundamentais de superfícies fechadas:

1 - Superfícies orientáveis:

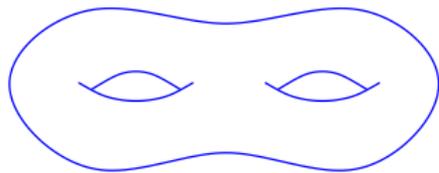
S^2



T^2



B^2

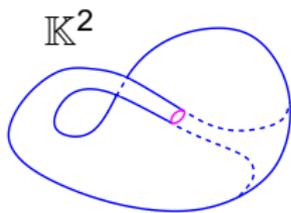
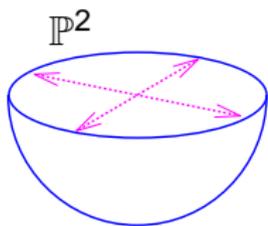


...

Teorema de classificação

Há duas sequências fundamentais de superfícies fechadas:

2 - Superfícies não orientáveis:



... ..

Teorema de classificação

Teorema

- Toda superfície fechada é equivalente a uma destas.
- Duas destas superfícies nunca são equivalentes.

Problema

Podemos listar todas as variedades de qualquer dimensão $d > 2$ (a menos de equivalência) ?

Toda variedade pode ser construída como quociente de uma variedade simplesmente conexa.

Teorema de classificação

Teorema

- Toda superfície fechada é equivalente a uma destas.
- Duas destas superfícies nunca são equivalentes.

Problema

Podemos listar todas as variedades de qualquer dimensão $d > 2$ (a menos de equivalência) ?

Toda variedade pode ser construída como quociente de uma variedade simplesmente conexa.

Teorema de classificação

Teorema

- Toda superfície fechada é equivalente a uma destas.
- Duas destas superfícies nunca são equivalentes.

Problema

Podemos listar todas as variedades de qualquer dimensão $d > 2$ (a menos de equivalência) ?

Toda variedade pode ser construída como quociente de uma variedade simplesmente conexa.

Outline

- 1 Conceitos fundamentais
- 2 Classificação das superfícies
- 3 Variedades de dimensão superior**
- 4 Conjectura da Geometrização
- 5 Fluxo de Ricci

Problema da classificação

Em dimensão 4 ou maior a resposta é negativa: o conjunto de todas as variedades é demasiado “complexo” para que possa ser listado de modo explícito.

A prova deste fato usa idéias da teoria da complexidade que remontam ao famoso Teorema da Indecidibilidade de Gödel.

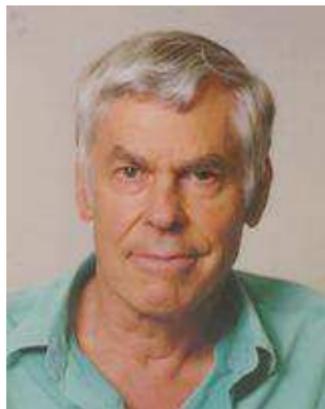
Conjectura de Poincaré

No entanto, a conjectura de Poincaré faz sentido em qualquer dimensão: *se uma variedade parece ser a esfera então ela é a esfera ?*

Conjectura

Para qualquer $d > 2$, toda variedade fechada que tem o tipo de homotopia da esfera \mathbb{S}^d é equivalente à esfera \mathbb{S}^d .

Steven Smale



15 de julho de 1930 (Flint (Michigan), USA)

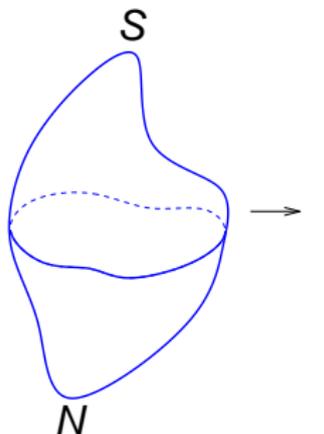
Deu notáveis contribuições fundamentais à topologia, sistemas dinâmicos, economia matemática e teoria da computação.

Causou controvérsia no seu país ao afirmar: "os meus melhores trabalhos foram feitos nas praias do Rio de Janeiro".

Em 1960 provou a Conjectura de Poincaré em dimensão maior ou igual a 5. Por este trabalho, recebeu a Medalha Fields em 1966.

A Conjectura de Poincaré em dimensão alta

Para provar a Conjectura, Smale construiu uma função “altura” na variedade, tendo apenas dois pontos críticos (os “polos”):



Construção tanto mais delicada quanto menor a dimensão.

Michael Freedman



21 de abril de 1951, Los Angeles, USA

Adquiriu renome internacional por seus trabalhos em topologia, particularmente sobre variedades de dimensão quatro. Atualmente trabalha em computação quântica nos Laboratórios Microsoft.

Em 1982 provou a Conjectura de Poincaré em dimensão 4. Por este trabalho, recebeu a Medalha Fields em 1986.

A Conjectura de Poincaré e a Medalha Fields

Até hoje, já foram concedidas 44 Medalhas Fields. Três foram para trabalhos sobre a Conjectura de Poincaré. Algumas mais (por exemplo, Thurston e Yau) foram para tópicos correlatos.

A Conjectura de Poincaré também é um dos 7 Problemas do Milênio, distinguidos pelo Instituto Clay de Matemáticas com prêmio de 1 milhão de dólares.

A Conjectura de Poincaré e a Medalha Fields

Até hoje, já foram concedidas 44 Medalhas Fields. Três foram para trabalhos sobre a Conjectura de Poincaré. Algumas mais (por exemplo, Thurston e Yau) foram para tópicos correlatos.

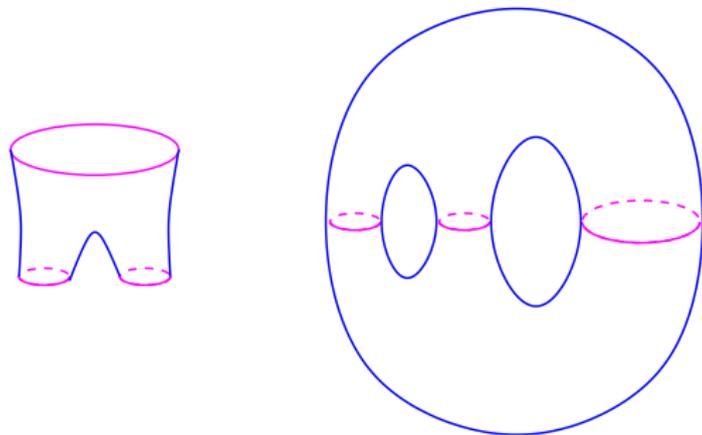
A Conjectura de Poincaré também é um dos 7 Problemas do Milênio, distinguidos pelo Instituto Clay de Matemáticas com prêmio de 1 milhão de dólares.

Outline

- 1 Conceitos fundamentais
- 2 Classificação das superfícies
- 3 Variedades de dimensão superior
- 4 Conjectura da Geometrização**
- 5 Fluxo de Ricci

Geometrização das superfícies

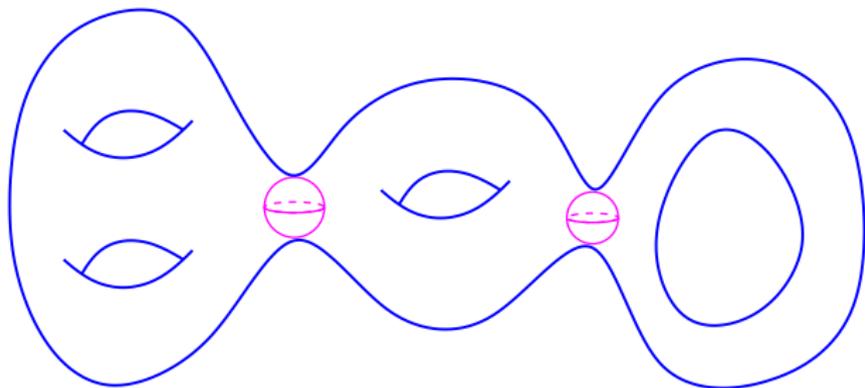
Poincaré e Köbe aprofundaram a classificação das superfícies: toda a superfície de gênero $g > 1$ é uma colagem de “calças”.



Conjectura da Geometrização de Thurston

Conjectura

Toda a variedade de dimensão 3 é uma colagem de variedades de 8 tipos geométricos básicos.



Conjectura da Geometrização de Thurston

As “peças” são quocientes de 8 variedades simplesmente conexas localmente homogêneas:

- 1 S^3 (curvatura constante positiva)
- 2 \mathbb{R}^3 (curvatura constante nula)
- 3 \mathbb{H}^3 (curvatura constante negativa)
- 4 $S^2 \times \mathbb{R}$
- 5 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
- 6 $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$
- 7 variedade Nil (geometria do grupo de Heisenberg)
- 8 variedade Sol

William Thurston



30 de outubro de 1946 (Washington DC, USA)

Fez profundas contribuições à teoria dos nós, geometria, teoria das folheações e topologia das variedades, revelando a importância da geometria hiperbólica no estudo das variedades de dimensão 3.

Formulou a Conjectura da Geometrização e provou que ela é válida no caso das variedades de Haken (Teorema “Monstro”). Por este e outros trabalhos, recebeu a Medalha Fields em 1982.

Conjectura da Geometrização de Thurston

A Conjectura da Geometrização implica a Conjectura de Poincaré e aponta para a classificação de todas as variedades de dimensão 3.

As duas conjecturas foram provadas por Perelman em 2003, seguindo um programa iniciado por Hamilton.

Outline

- 1 Conceitos fundamentais
- 2 Classificação das superfícies
- 3 Variedades de dimensão superior
- 4 Conjectura da Geometrização
- 5 Fluxo de Ricci**

Estratégia para provar as conjecturas

No início dos anos 80, Hamilton propôs a seguinte estratégia:

Começando com uma variedade de dimensão 3 com uma métrica qualquer, deformá-la para aumentar a curvatura onde ela é pequena e diminuir a curvatura onde ela é grande. A *deformação deveria convergir para uma geometria “uniforme”*.

FILME (C. McMullen, R. Sinclair, L. H. Figueiredo)

Estratégia para provar as conjecturas

- Se a variedade inicial é simplesmente conexa então a deformação deveria convergir para a esfera S^3 . Isto provaria a Conjectura de Poincaré.
- Em geral, a deformação deveria convergir para as 8 geometrias de Thurston. Isto provaria a Conjectura da Geometrização.

Em dimensão 2 esta estratégia funciona: a deformação converge para alguma superfície com curvatura constante.

Fluxo de Ricci

A formulação exata desta estratégia é dada pelo fluxo de Ricci:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i,j} = -2R_{i,j}$$

onde $g_{i,j}$ é a métrica, $R_{i,j}$ é o tensor da curvatura de Ricci, e t é o parâmetro (“tempo”) de deformação.

- O fluxo de Ricci é uma versão não linear da Equação do Calor: ele provoca “difusão” da curvatura na variedade.
- O tensor de Ricci é fundamental na Relatividade Geral: equação de campo de Einstein: $8\pi T_{i,j} = R_{i,j} - \frac{R}{2}g_{i,j}$.

Fluxo de Ricci

A formulação exata desta estratégia é dada pelo fluxo de Ricci:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i,j} = -2R_{i,j}$$

onde $g_{i,j}$ é a métrica, $R_{i,j}$ é o tensor da curvatura de Ricci, e t é o parâmetro (“tempo”) de deformação.

- O fluxo de Ricci é uma versão não linear da Equação do Calor: ele provoca “difusão” da curvatura na variedade.
- O tensor de Ricci é fundamental na Relatividade Geral: equação de campo de Einstein: $8\pi T_{i,j} = R_{i,j} - \frac{R}{2}g_{i,j}$.

Fluxo de Ricci

A formulação exata desta estratégia é dada pelo fluxo de Ricci:

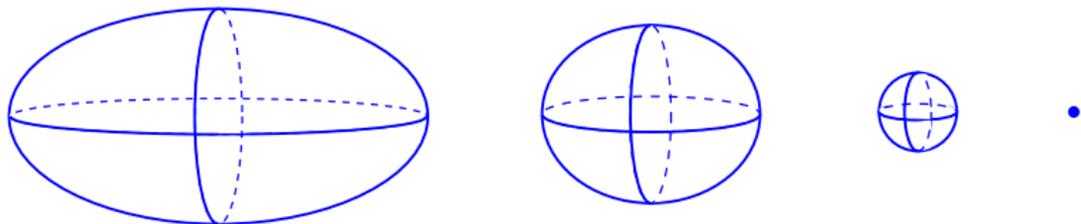
$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i,j} = -2R_{i,j}$$

onde $g_{i,j}$ é a métrica, $R_{i,j}$ é o tensor da curvatura de Ricci, e t é o parâmetro (“tempo”) de deformação.

- O fluxo de Ricci é uma versão não linear da Equação do Calor: ele provoca “difusão” da curvatura na variedade.
- O tensor de Ricci é fundamental na Relatividade Geral: equação de campo de Einstein: $8\pi T_{i,j} = R_{i,j} - \frac{R}{2}g_{i,j}$.

Fluxo de Ricci normalizado

O fluxo de Ricci **não** preserva o volume da variedade:



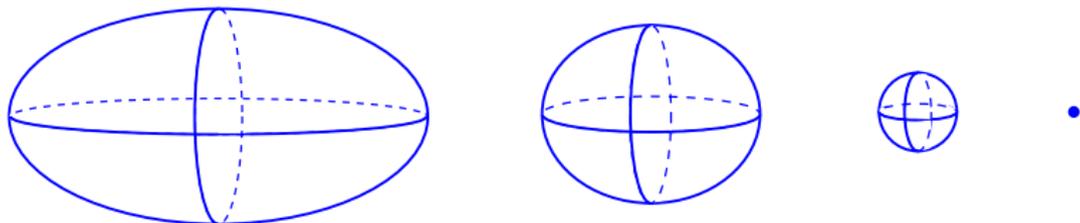
Por isso, precisamos utilizar o fluxo de Ricci normalizado:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i,j} = -2R_{i,j} + \lambda g_{i,j}$$

onde λ é chamada constante cosmológica.

Fluxo de Ricci normalizado

O fluxo de Ricci **não** preserva o volume da variedade:



Por isso, precisamos utilizar o fluxo de Ricci normalizado:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i,j} = -2R_{i,j} + \lambda g_{i,j}$$

onde λ é chamada constante cosmológica.

Richard Hamilton



Nascido em 1943.

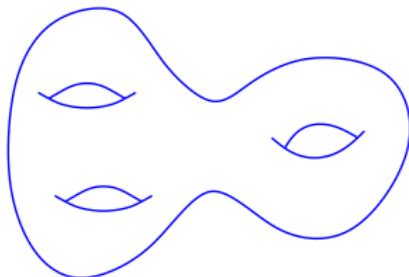
Formulou o programa do fluxo de Ricci e provou que esta estratégia realmente funciona quando a variedade inicial tem curvatura de Ricci positiva:

Teorema

Toda variedade fechada simplesmente conexa de dimensão 3 que admite métrica com curvatura de Ricci positiva é equivalente à esfera \mathbb{S}^3 .

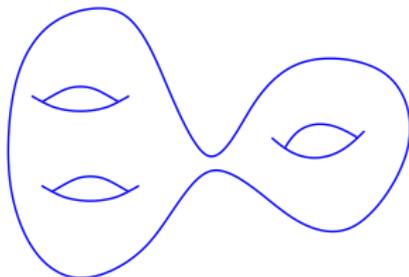
Singularidades

No caso geral, quando a curvatura de Ricci não é positiva, o fluxo de Ricci pode desenvolver singularidades:



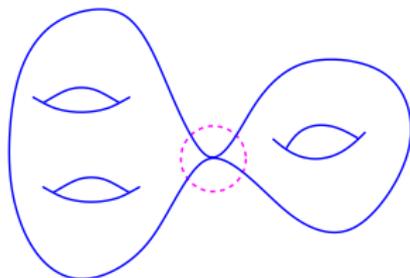
Singularidades

No caso geral, quando a curvatura de Ricci não é positiva, o fluxo de Ricci pode desenvolver singularidades:



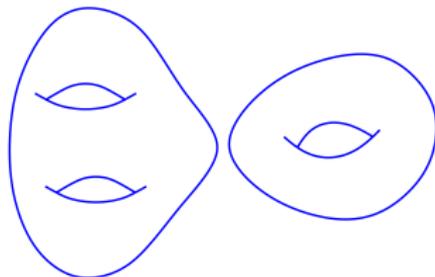
Singularidades

No caso geral, quando a curvatura de Ricci não é positiva, o fluxo de Ricci pode desenvolver singularidades:



Singularidades

No caso geral, quando a curvatura de Ricci não é positiva, o fluxo de Ricci pode desenvolver singularidades:



Prova das Conjecturas de Poincaré e Thurston

Grigori Perelman explicou como o fluxo pode ser modificado (fluxo de Ricci com cirurgia) de modo a manter este fenômeno sob controle, evitando os piores tipos de singularidades. Para isso, introduziu diversas técnicas originais revolucionárias.