

$$f(x) = x$$

Marcelo Viana

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Resolução de equações

A resolução de equações (encontrar o “valor de x ”) é um dos problemas mais básicos e antigos da Matemática, motivado desde sempre por problemas concretos da vida diária.

Vamos utilizar este problema como fio condutor de uma digressão através da Matemática – da Aritmética aos Sistemas Dinâmicos, passando pela Análise Numérica – e através da História – da Antiguidade aos dias de hoje.

Equação de grau 1

A resolução da equação polinomial linear

$$ax = b$$

era bem conhecida nas civilizações antigas do Egito e da Mesopotâmia, conformam comprovam numerosos documentos escritos. Convém notar que se consideravam apenas números positivos.

Em linguagem moderna, a solução geral é dada por

$$x = \frac{b}{a}$$

Equação de grau 2

A civilização mesopotâmica foi muito mais longe: os matemáticos babilônicos do segundo milênio A.C. já sabiam resolver a equação geral de grau 2

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

nos casos em que “existe solução” (número real positivo).

Como sabemos, em geral existem duas soluções

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que podem não ser números reais (quando $b^2 - 4ac < 0$).

Equações polinomiais de grau superior

Os matemáticos babilônicos sabiam resolver muitas outras equações mais complicadas. Mas a solução completa de equações polinomiais de grau superior só seria encontrada na Renascença europeia:

Equações polinomiais de grau superior

Os matemáticos babilônicos sabiam resolver muitas outras equações mais complicadas. Mas a solução completa de equações polinomiais de grau superior só seria encontrada na Renascença europeia:

Em 1545 foi publicado o livro *Ars Magna* de Geronimo Cardano (1501-1576), com a solução geral das equações de graus 3 e 4, que Cardano aprendera de outras pessoas:

- grau 3: Scipione del Ferro (1465-1526), Niccolo Tartaglia (1500-1557)
- grau 4: Ludovico Ferrari (1522-1565)

Equações polinomiais de grau superior

Nos dois séculos seguintes, matemáticos profissionais e amadores buscaram, sem parar, a fórmula resolvente da equação de grau 5, tal como gerações anteriores haviam atacado os grandes problemas geométricos da Grécia clássica (quadratura do círculo, etc).

Equações polinomiais de grau superior

Nos dois séculos seguintes, matemáticos profissionais e amadores buscaram, sem parar, a fórmula resolvente da equação de grau 5, tal como gerações anteriores haviam atacado os grandes problemas geométricos da Grécia clássica (quadratura do círculo, etc).

O problema foi resolvido por Niels H. Abel (1802-1829) e por Évariste Galois (1812-1832), que provaram que tal fórmula não existe: **as soluções da equação geral de grau $n \geq 5$ não podem ser expressas a partir dos coeficientes da equação por meio de operações algébricas explícitas.**

Equações polinomiais de grau superior

Nos dois séculos seguintes, matemáticos profissionais e amadores buscaram, sem parar, a fórmula resolvente da equação de grau 5, tal como gerações anteriores haviam atacado os grandes problemas geométricos da Grécia clássica (quadratura do círculo, etc).

O problema foi resolvido por Niels H. Abel (1802-1829) e por Évariste Galois (1812-1832), que provaram que tal fórmula não existe: **as soluções da equação geral de grau $n \geq 5$ não podem ser expressas a partir dos coeficientes da equação por meio de operações algébricas explícitas.**

De fato, Galois foi mais longe, caracterizando as equações para as quais essa expressão algébrica existe. Para isso introduziu um novo objeto matemático: o **grupo**.

A teoria de Abel-Galois está, sem dúvida, entre as grandes realizações da Matemática.

Por outro lado, fórmulas explícitas são apenas uma de muitas maneiras de resolver equações.

Para a maioria das equações (não polinomiais) tais como, por exemplo,

$$\cos x = x$$

não é razoável esperar que exista uma fórmula resolvente do tipo da resolvente da equação de grau 2.

Por outro lado, muitas vezes é possível encontrar as soluções de tais equações muito gerais, com qualquer grau de precisão desejado, usando outros métodos.

Um caso importante são as **equações de ponto fixo**, ou seja, as equações da forma

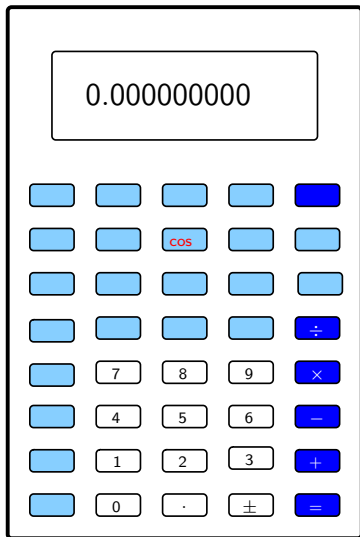
$$f(x) = x.$$

Frequentemente, as soluções da equação podem ser encontradas simplesmente **iterando** a função f . Tomemos a equação

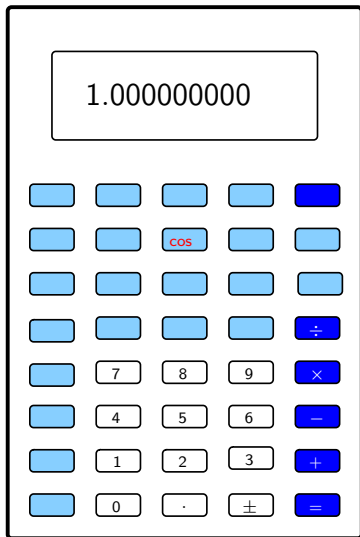
$$\cos x = x$$

como exemplo:

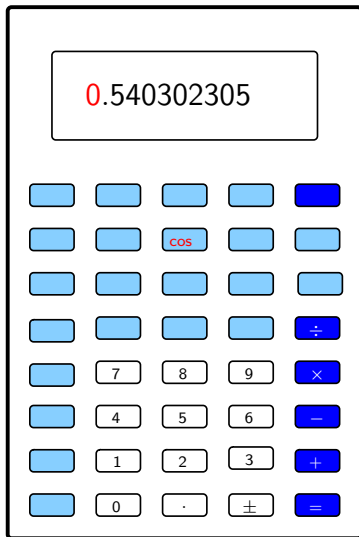
A equação $\cos x = x$



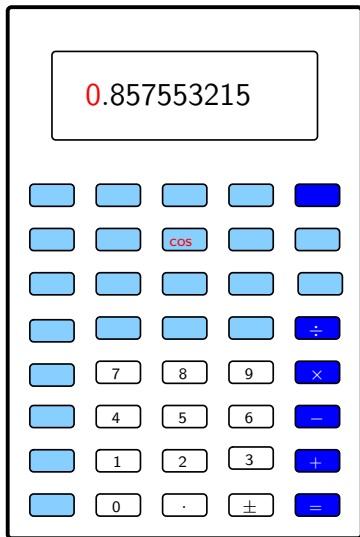
A equação $\cos x = x$



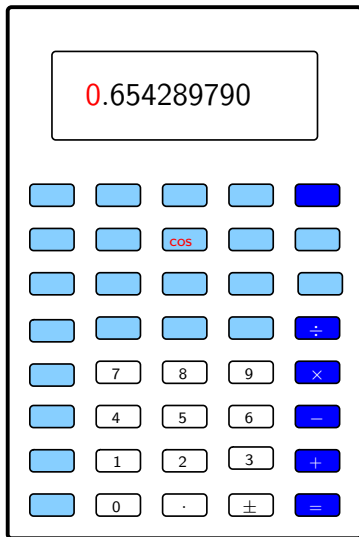
A equação $\cos x = x$



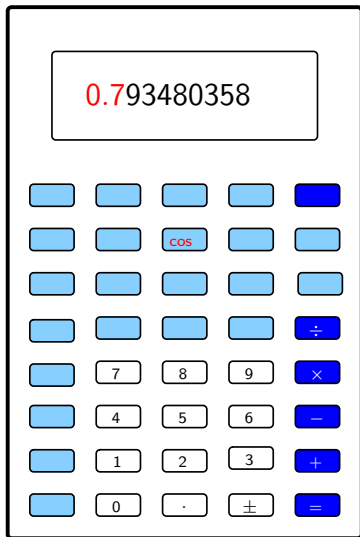
A equação $\cos x = x$



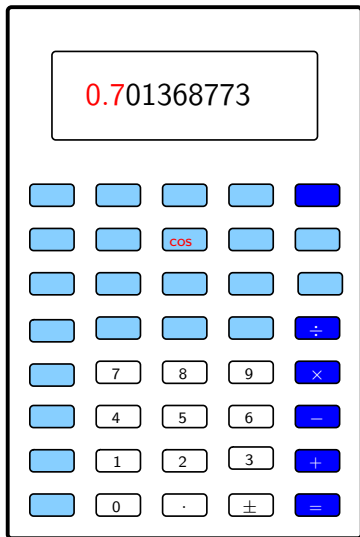
A equação $\cos x = x$



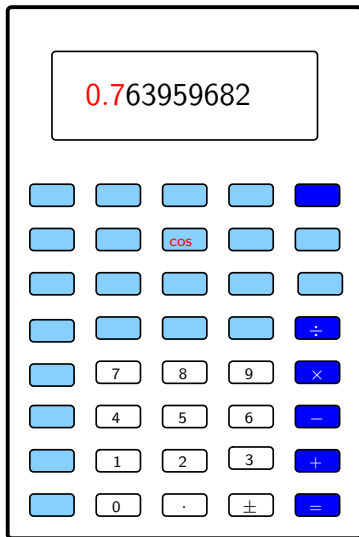
A equação $\cos x = x$



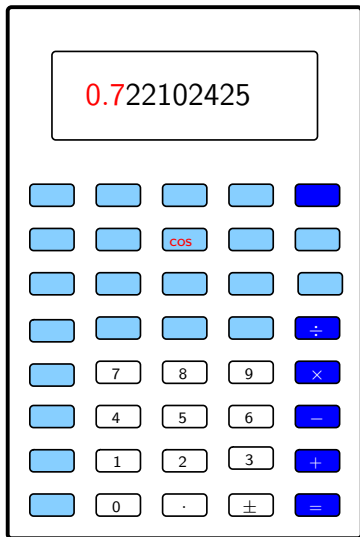
A equação $\cos x = x$



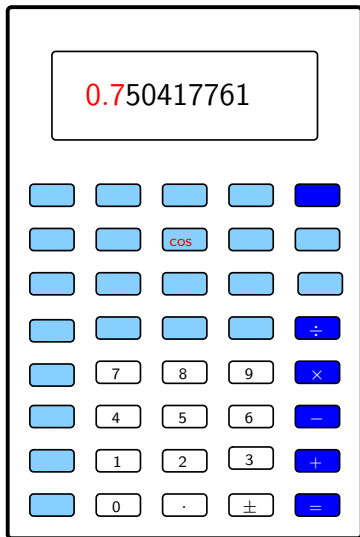
A equação $\cos x = x$



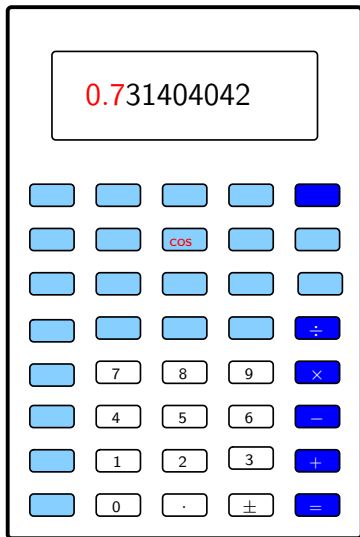
A equação $\cos x = x$



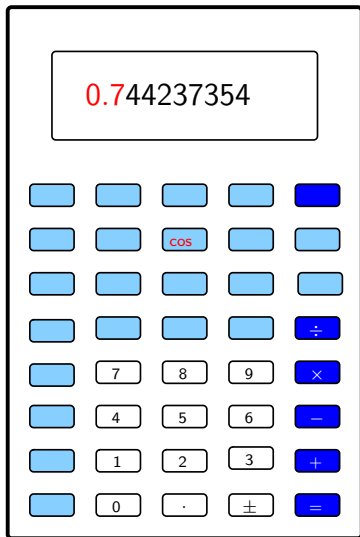
A equação $\cos x = x$



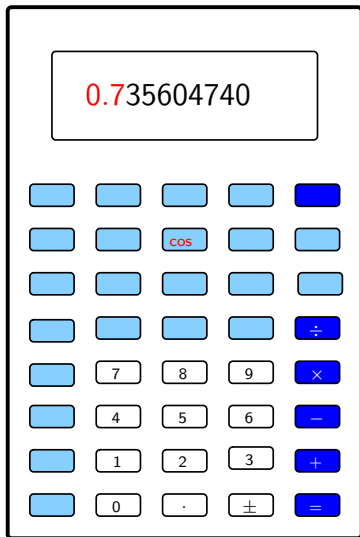
A equação $\cos x = x$



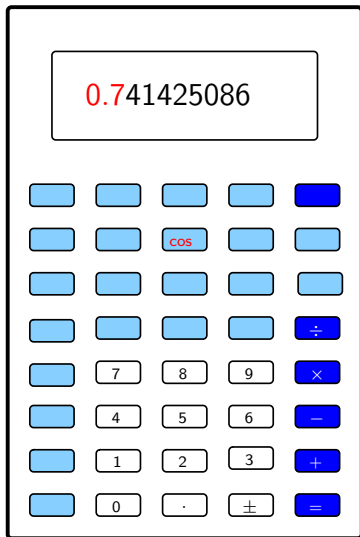
A equação $\cos x = x$



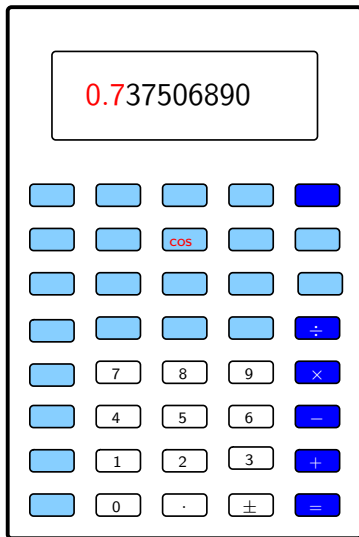
A equação $\cos x = x$



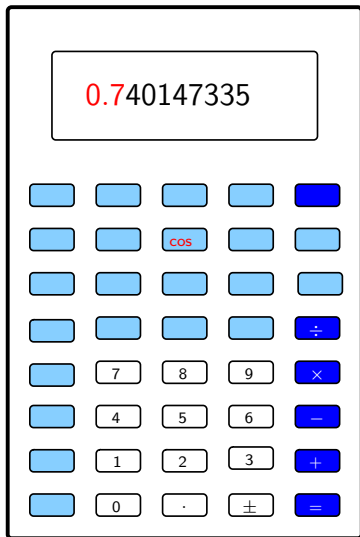
A equação $\cos x = x$



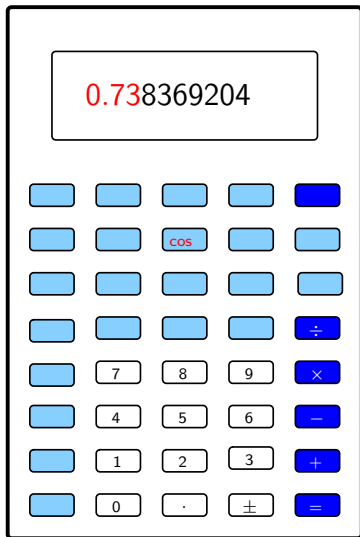
A equação $\cos x = x$



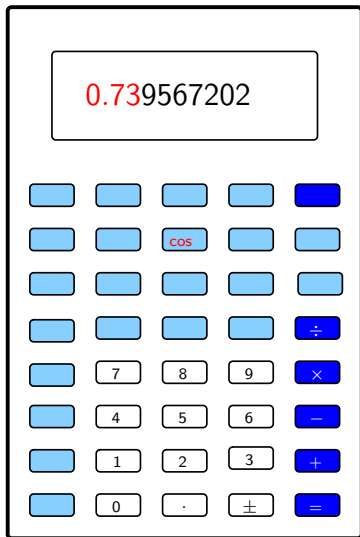
A equação $\cos x = x$



A equação $\cos x = x$



A equação $\cos x = x$



Resolvendo $\cos x = x$



Em que condições este método funciona para encontrar o ponto fixo ? A seguinte proposição explica:

Teorema

Se $|f'(\text{ponto fixo})| < 1$ (ou seja, se a inclinação do gráfico de f é menor que 45° , para cima ou para baixo) então os iterados convergem para o ponto fixo, desde que o valor inicial esteja suficientemente próximo.

Em que condições este método funciona para encontrar o ponto fixo ? A seguinte proposição explica:

Teorema

Se $|f'(\text{ponto fixo})| < 1$ (ou seja, se a inclinação do gráfico de f é menor que 45° , para cima ou para baixo) então os iterados convergem para o ponto fixo, desde que o valor inicial esteja suficientemente próximo.

Dizemos que se trata de um ponto fixo **atrator**.

Se o ponto fixo for **repulsor**, ou seja se a derivada tem valor absoluto > 1 , podemos aplicar o mesmo método, mas iterando a transformação inversa f^{-1} .

Método iterativo de Newton

O método de Newton permite reduzir uma equação geral

$$\phi(x) = 0$$

a uma equação de ponto fixo: consideramos a função

$$f(x) = x - \frac{\phi(x)}{\phi'(x)}$$

Método iterativo de Newton

O método de Newton permite reduzir uma equação geral

$$\phi(x) = 0$$

a uma equação de ponto fixo: consideramos a função

$$f(x) = x - \frac{\phi(x)}{\phi'(x)}$$

Teorema

Qualquer solução da equação $\phi(x) = 0$ é um ponto fixo **super** atrator da transformação $f(x)$.

Neste caso **$f'(\text{ponto fixo}) = 0$** , ou seja o gráfico de f é horizontal no ponto fixo. Isto tem a grande vantagem de fazer com que a convergência seja muito rápida.

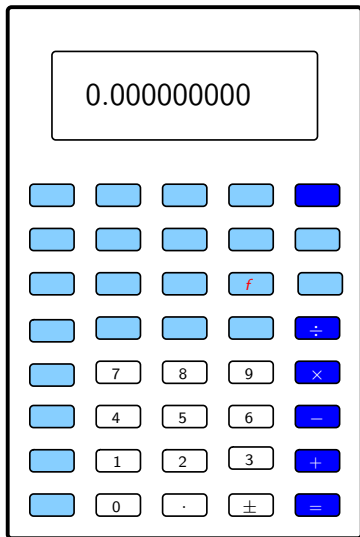
Exemplo:

No caso da equação $\cos x - x = 0$ encontramos a função

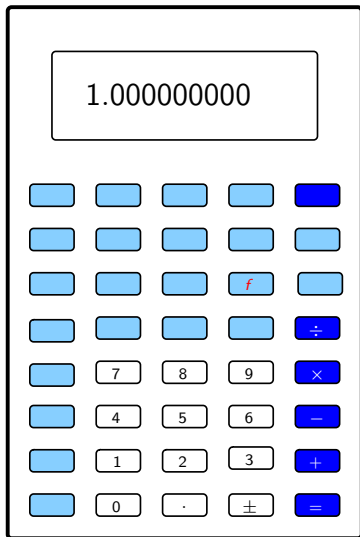
$$f(x) = x + \frac{\cos x - x}{\sin x + 1}$$

Vamos iterar f para (re)encontrar a solução da equação:

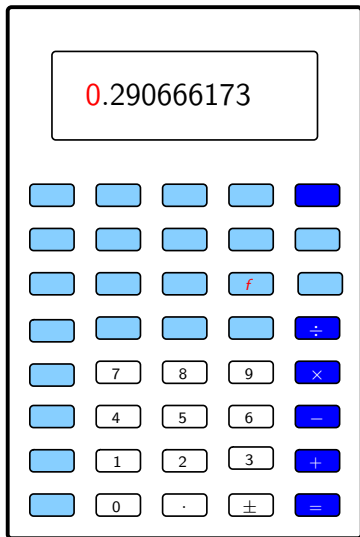
A equação $\cos x = x$



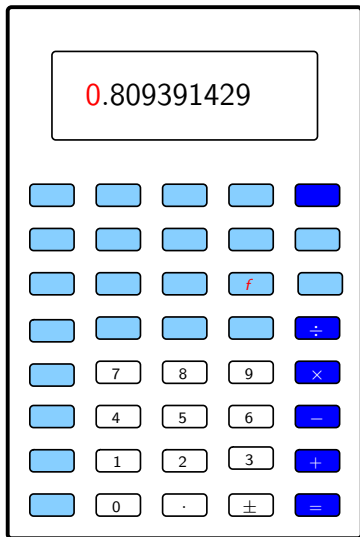
A equação $\cos x = x$



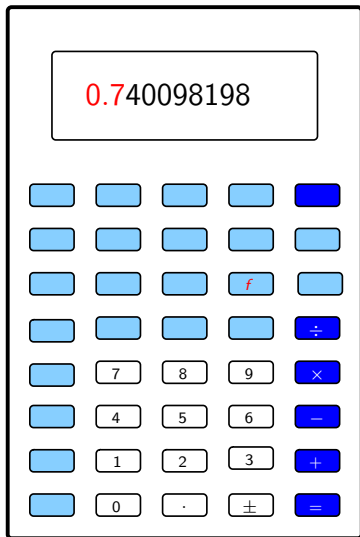
A equação $\cos x = x$



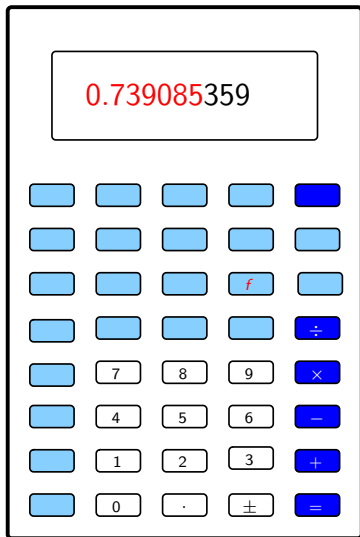
A equação $\cos x = x$



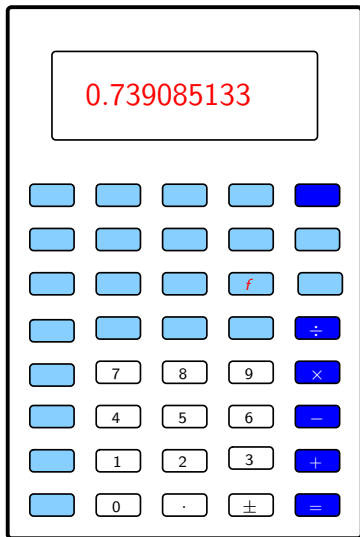
A equação $\cos x = x$



A equação $\cos x = x$



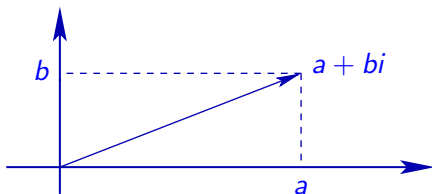
A equação $\cos x = x$



Escolha do valor inicial

Um problema importante é como escolher o valor inicial da iteração: dependendo da escolha, os iterados de f podem convergir para soluções distintas, ou podem até divergir.

É conveniente analisar esta questão dentro do conjunto dos **números complexos**:



$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$
$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

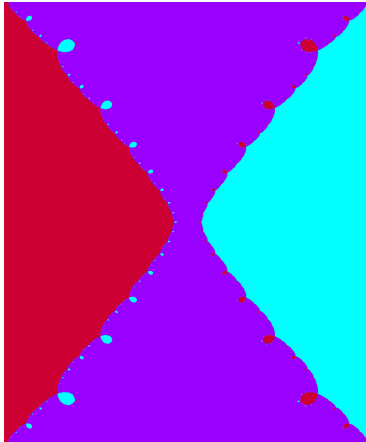
Escolha do valor inicial

Por exemplo, a equação $\phi(z) = z^3 - z = 0$ tem três soluções no conjunto dos números complexos:

$$0, \quad +1, \quad -1$$

Dependendo do valor inicial, o método de Newton pode convergir para qualquer uma destas soluções, ou divergir:

Método de Newton para $z^3 - z = 0$



Divergência do método de Newton

Neste exemplo, o conjunto dos valores iniciais para os quais os iterados não convergem é muito pequeno: tem área zero. Dizemos que a convergência é **quase certa**.

O mesmo acontece para qualquer equação polinomial quadrática $\phi(z) = az^2 + bz + c = 0$: a convergência da transformação de Newton correspondente

$$f(z) = z - \frac{az^2 + bz + c}{2az + b} = \frac{az^2 - c}{2az + b}$$

é quase certa.

Divergência do método de Newton

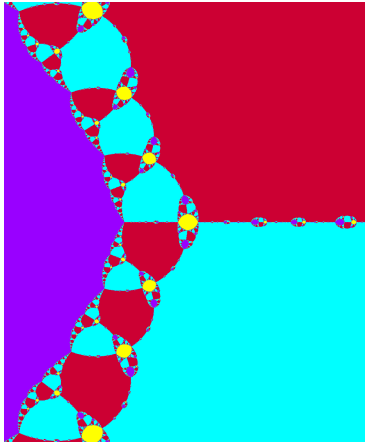
Mas o mesmo **não** é verdade para equações de graus superiores.
Por exemplo, a função de Newton

$$f(z) = z - \frac{z^3 - 2z + 2}{3z^2 - 2} = \frac{2z^3 - 2}{3z^2 - 2}$$

da equação cúbica $z^3 - 2z + 2 = 0$ tem uma órbita periódica superatratora **de período 2**:

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(1) = 0 \quad \text{e} \quad f'(0) = f'(1) = 0.$$

Método de Newton para $z^3 - 2z + 2 = 0$



O matemático americano Steve Smale (nascido em 1930, ganhador da Medalha Fields em 1966) perguntou:

Para qualquer grau $n \geq 2$ existe algum método de Newton generalizado tal que a convergência é quase certa para (quase) todas as equações polinomiais de grau n ?

Teorema de McMullen

Outro matemático americano, Curt McMullen (nascido em 1958, ganhador da Medalha Fields em 1998) mostrou, na sua tese de doutoramento, que a resposta é negativa para graus maiores que 3:

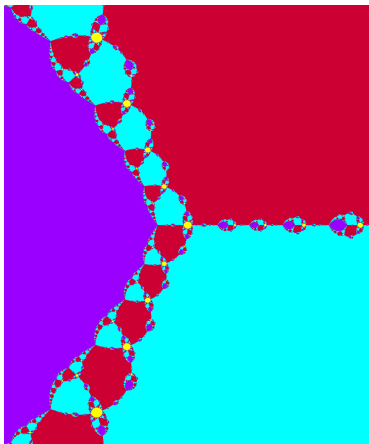
Theorem

Para qualquer grau $n > 3$ e qualquer método de Newton generalizado, existem polinômios de grau n para os quais a função de Newton tem órbitas periódicas atratoras de período maior que 1.

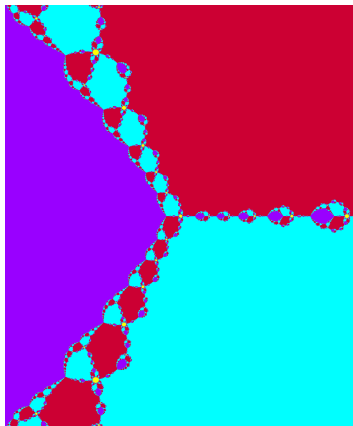
Para tais polinômios existem conjuntos grandes de valores iniciais tais que os iterados da função de Newton generalizada não convergem.

Método de Newton para

$$z^3 - 0.4493762319z + 0.4493762319 = 0$$



$$z^3 - 0.1115721958z + 0.1115721958 = 0$$



Figuras do método de Newton: Hartje Kriete e Tania Garfias.