$\phi(x) = 0$

Marcelo Viana

IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Resolução de equações

A resolução de equações (encontrar o "valor de x") é um dos problemas mais básicos e antigos da Matemática, motivado desde sempre por problemas concretos da vida diária.

Vamos utilizar este problema como fio condutor de uma digressão através da Matemática – da Aritmética aos Sistemas Dinâmicos, passando pela Análise Numérica – e através da História – da Antiguidade aos dias de hoje.

Equação polinomial de grau 1

A resolução da equação polinomial linear

$$ax = b$$

era bem conhecida nas civilizações antigas da Mesopotâmia e do Egito, conforme comprovam inúmeros documentos arqueológicos (mas na época consideravam-se apenas números reais positivos).

Em linguagem moderna, a solução geral é dada por

$$x = \frac{b}{a}$$

A civilização mesopotâmica foi muito mais longe: os matemáticos babilônios do segundo milênio A.C. já sabiam resolver a equação geral de grau 2

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

nos casos em que "existe solução" (número real positivo).

Como sabemos, em geral existem duas soluções

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que podem não ser números reais (quando $b^2 - 4ac < 0$).

Os matemáticos babilônicos sabiam resolver outras equações mais complicadas. Mas a solução completa de equações polinomiais de grau superior só seria encontrada na Renascença europeia:

Equações polinomiais de grau superior

Os matemáticos babilônicos sabiam resolver outras equações mais complicadas. Mas a solução completa de equações polinomiais de grau superior só seria encontrada na Renascença europeia:

Em 1545 foi publicado o livro *Ars Magna* de Geronimo Cardano (1501-1576), com a solução geral das equações de graus 3 e 4, que Cardano aprendera de outras pessoas:

- grau 3: Scipione del Ferro (1465-1526), Niccolo Tartaglia (1500-1557)
- grau 4: Ludovico Ferrari (1522-1565)

Nos dois séculos seguintes, matemáticos profissionais e amadores buscaram, sem parar, a fórmula resolvente da equação de grau 5, tal como gerações anteriores haviam atacado os grandes problemas geométricos da Grécia clássica (quadratura do círculo, etc).

Equações polinomiais de grau superior

Nos dois séculos seguintes, matemáticos profissionais e amadores buscaram, sem parar, a fórmula resolvente da equação de grau 5, tal como gerações anteriores haviam atacado os grandes problemas geométricos da Grécia clássica (quadratura do círculo, etc).

O problema foi resolvido por Niels H. Abel (1802-1829) e por Évariste Galois (1812-1832), que provaram que tal fórmula não existe: as soluções da equação geral de grau $n \geq 5$ não podem ser expressas a partir dos coeficientes da equação por meio de operações algébricas explícitas.

Equações polinomiais de grau superior

Nos dois séculos seguintes, matemáticos profissionais e amadores buscaram, sem parar, a fórmula resolvente da equação de grau 5, tal como gerações anteriores haviam atacado os grandes problemas geométricos da Grécia clássica (quadratura do círculo, etc).

O problema foi resolvido por Niels H. Abel (1802-1829) e por Évariste Galois (1812-1832), que provaram que tal fórmula não existe: as soluções da equação geral de grau $n \geq 5$ não podem ser expressas a partir dos coeficientes da equação por meio de operações algébricas explícitas.

De fato, Galois foi mais longe, caracterizando as equações para as quais essa expressão algébrica existe. Para isso introduziu un novo objeto matemático: o grupo.

Outras maneiras de resolver equações

A teoria de Abel-Galois está, sem dúvida, entre as maiores façanhas de toda a Matemática. Mas, fórmulas explícitas são apenas uma de muitas maneiras de resolver equações.

Outras maneiras de resolver equações

A teoria de Abel-Galois está, sem dúvida, entre as maiores façanhas de toda a Matemática. Mas, fórmulas explícitas são apenas uma de muitas maneiras de resolver equações.

Para a maioria das equações (não polinomiais), por exemplo,

$$\cos x = x$$

não é razoável esperar que as soluções sejam dadas por uma fórmula do tipo da fórmula resolvente da equação de grau 2.

Outras maneiras de resolver equações

A teoria de Abel-Galois está, sem dúvida, entre as maiores façanhas de toda a Matemática. Mas, fórmulas explícitas são apenas uma de muitas maneiras de resolver equações.

Para a maioria das equações (não polinomiais), por exemplo,

$$\cos x = x$$

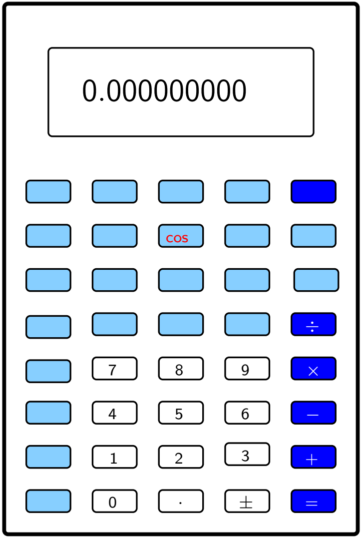
não é razoável esperar que as soluções sejam dadas por uma fórmula do tipo da fórmula resolvente da equação de grau 2.

Este é um caso particular das chamadas equações de ponto fixo, ou seja, as equações da forma

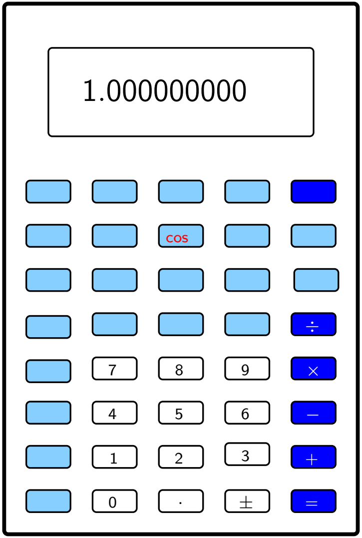
$$f(x) = x.$$

Frequentemente, tais equações podem ser resolvidas iterando f.

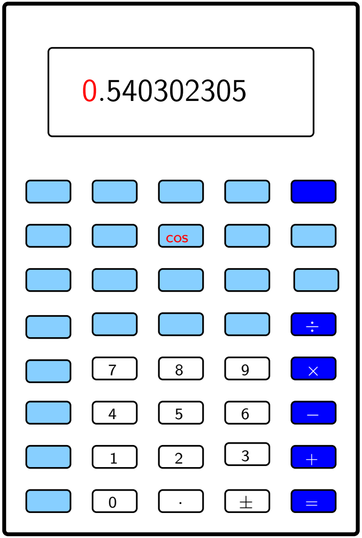
A equação $\cos x = x$

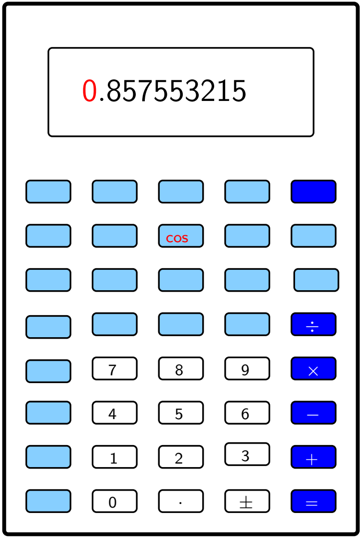


A equação $\cos x = x$

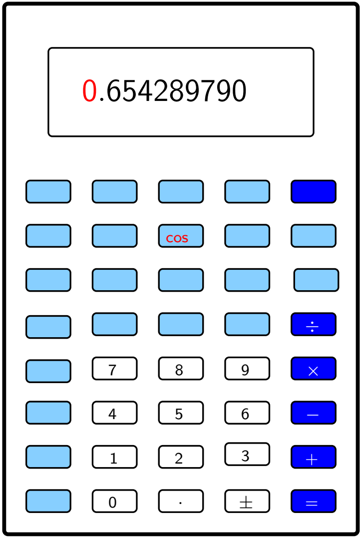


A equação $\cos x = x$

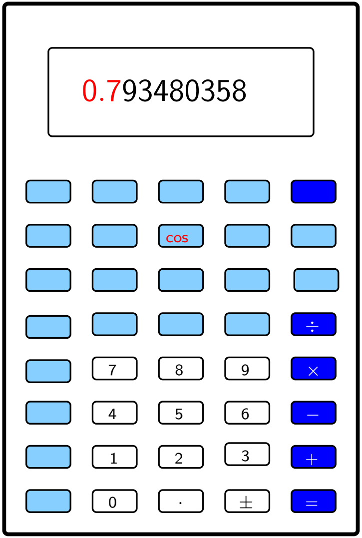



0.857553215
cos
÷
7
8
9
×
4
5
6
−
1
2
3
+
0
.
±
=

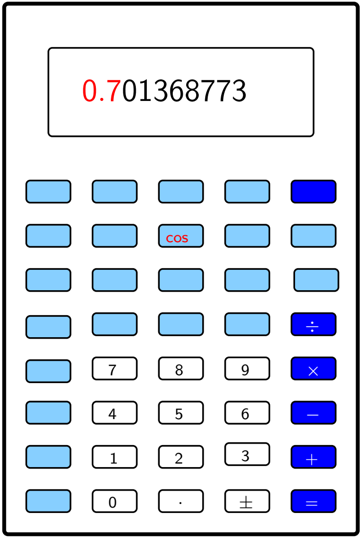
A equação $\cos x = x$



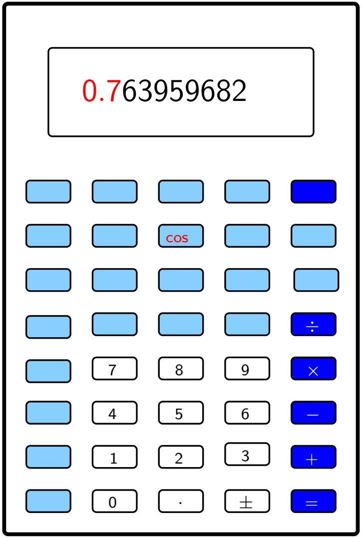
A equação $\cos x = x$



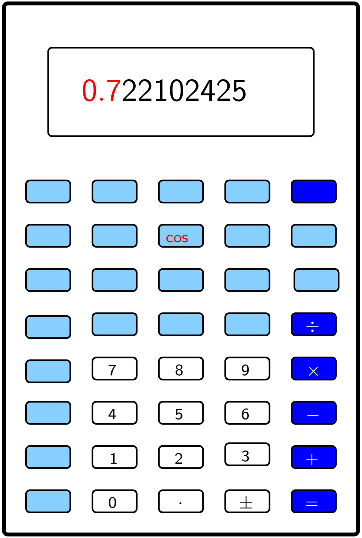
A equação $\cos x = x$



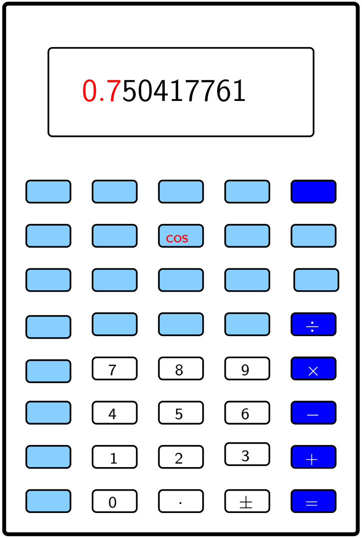
A equação $\cos x = x$



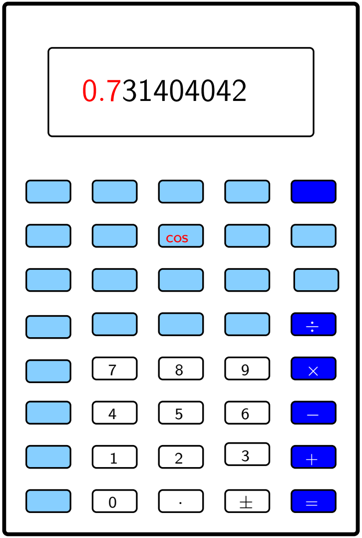
A equação $\cos x = x$



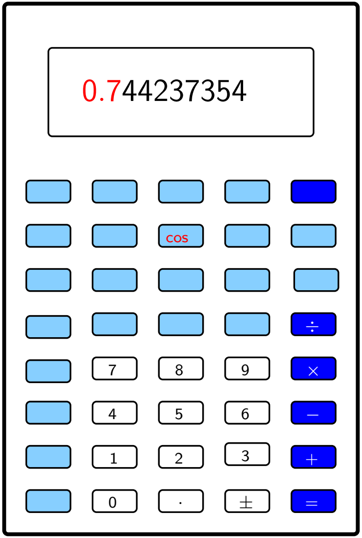
A equação $\cos x = x$

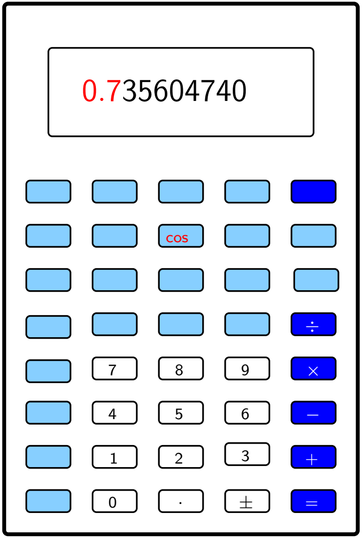


A equação $\cos x = x$

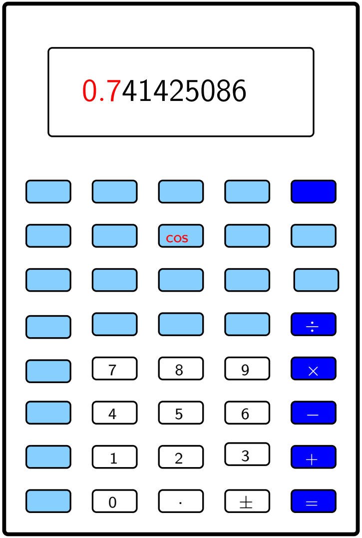


A equação $\cos x = x$

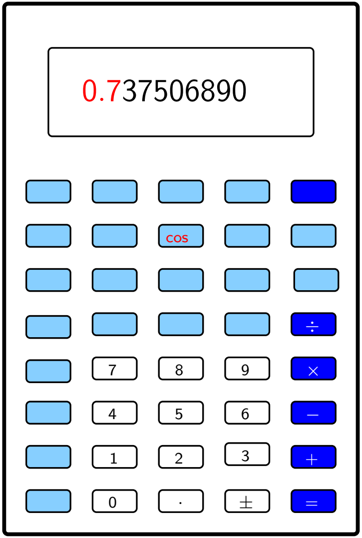



0.735604740
cos
÷
7
8
9
×
4
5
6
−
1
2
3
+
0
·
±
=

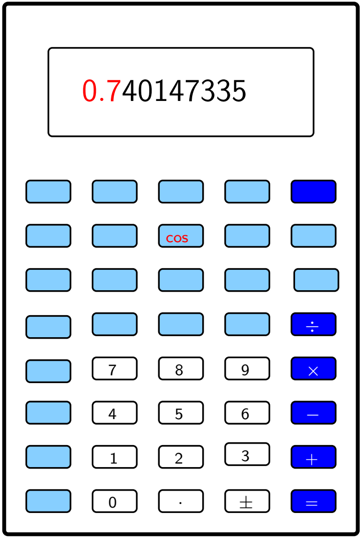
A equação $\cos x = x$



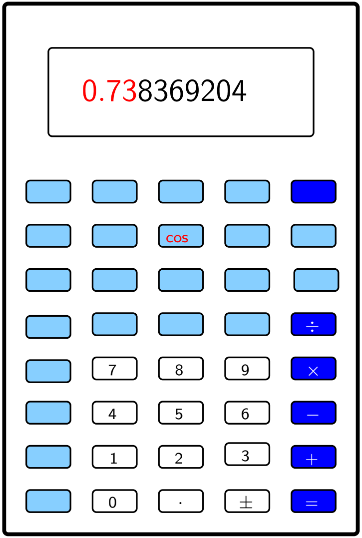
A equação $\cos x = x$



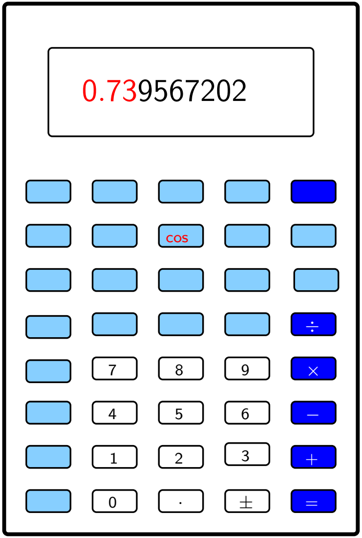
A equação $\cos x = x$



A equação $\cos x = x$



A equação $\cos x = x$



Pontos fixos atratores

Em que condições este método funciona para encontrar o ponto fixo ? O seguinte teorema explica:

Teorema

Se $|f'(\text{ponto fixo})| < 1$ (ou seja, se a inclinação do gráfico de f é menor que 45^o, para cima ou para baixo) então os iterados convergem para o ponto fixo, desde que o valor inicial esteja suficientemente próximo.

Pontos fixos atratores

Em que condições este método funciona para encontrar o ponto fixo ? O seguinte teorema explica:

Teorema

Se $|f'(\text{ponto fixo})| < 1$ (ou seja, se a inclinação do gráfico de f é menor que 45^o, para cima ou para baixo) então os iterados convergem para o ponto fixo, desde que o valor inicial esteja suficientemente próximo.

Dizemos que se trata de um ponto fixo atrator.

Se o ponto fixo for repulsor, ou seja se a derivada tem valor absoluto > 1, podemos aplicar o mesmo método, mas iterando a transformação inversa f^{-1}.

Método iterativo de Newton

O método de Newton permite reduzir uma equação geral

$$\phi(x) = 0$$

a uma equação de ponto fixo: consideramos a função

$$f(x) = x - \frac{\phi(x)}{\phi'(x)}$$

Método iterativo de Newton

O método de Newton permite reduzir uma equação geral

$$\phi(x) = 0$$

a uma equação de ponto fixo: consideramos a função

$$f(x) = x - \frac{\phi(x)}{\phi'(x)}$$

Teorema

Qualquer solução da equação $\phi(x) = 0$ é um ponto fixo super atrator da transformação $f(x)$.

Neste caso $f'(\text{ponto fixo}) = 0$, ou seja o gráfico de f é horizontal no ponto fixo. Isto tem a grande vantagem de fazer com que a convergência seja muito rápida.

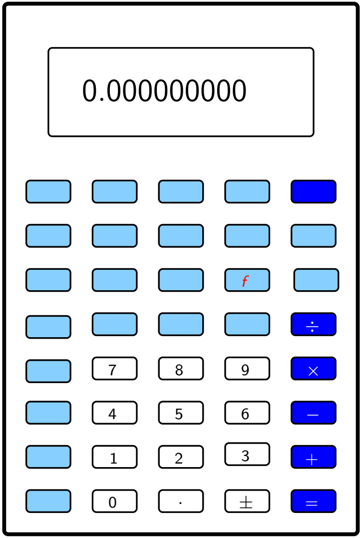
Exemplo:

No caso da equação $\cos x - x = 0$ encontramos a função

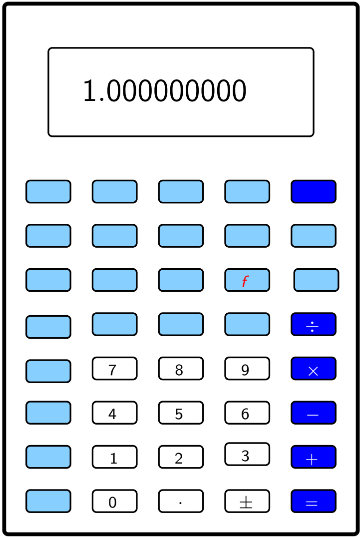
$$f(x) = x + \frac{\cos x - x}{\operatorname{sen} x + 1}$$

Vamos iterar f para (re)encontrar a solução da equação:

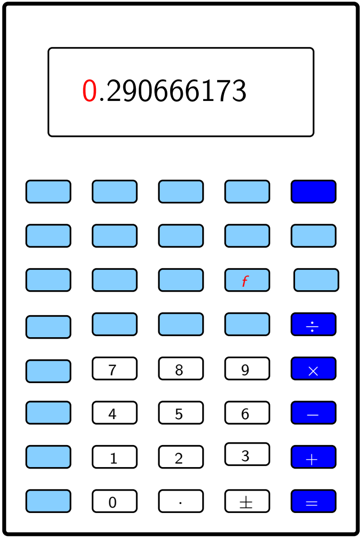
A equação $\cos x = x$



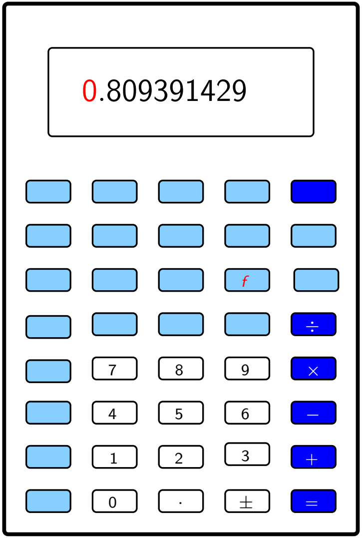
A equação $\cos x = x$



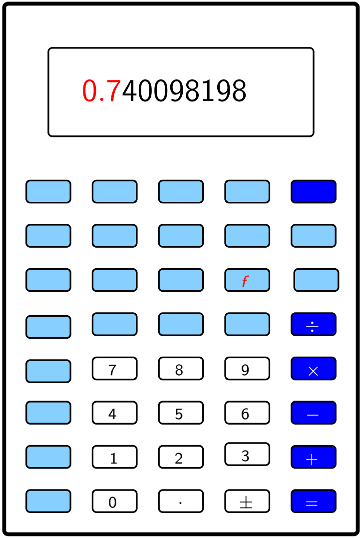
A equação $\cos x = x$



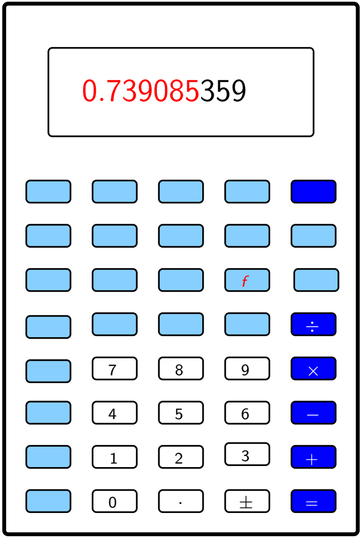
A equação $\cos x = x$



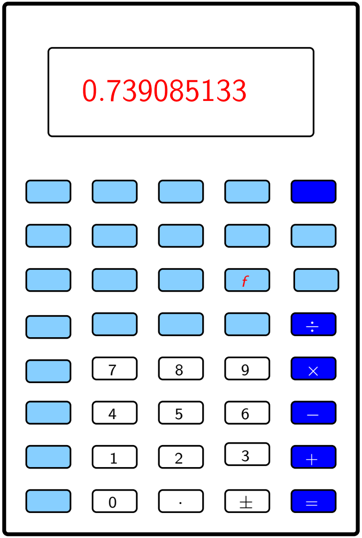
A equação $\cos x = x$



A equação $\cos x = x$



A equação $\cos x = x$



O método de Newton é um método geral para encontrar raízes de equações quaisquer. Ele é, certamente, o método mais utilizado na prática para resolver equações.

O método de Newton é um método geral para encontrar raízes de equações quaisquer. Ele é, certamente, o método mais utilizado na prática para resolver equações.

No entanto, em situações específicas pode ser mais eficaz utilizar métodos adaptados ao tipo de equação. A seguir vamos descrever um método geral e simples para resolver equações polinomiais de qualquer grau.

O método de Newton é um método geral para encontrar raízes de equações quaisquer. Ele é, certamente, o método mais utilizado na prática para resolver equações.

No entanto, em situações específicas pode ser mais eficaz utilizar métodos adaptados ao tipo de equação. A seguir vamos descrever um método geral e simples para resolver equações polinomiais de qualquer grau.

Ilustraremos este método no caso da equação de grau 5:

$$p(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Passo 1: transformada de Graeffe

Separe os termos de grau par dos termos de grau ímpar:

$$x^5 + bx^3 + dx = -ax^4 - cx^2 - e.$$

Separe os termos de grau par dos termos de grau ímpar:

$$x^5 + bx^3 + dx = -ax^4 - cx^2 - e.$$

Eleve os dois lados da equação ao quadrado:

$$(x^5 + bx^3 + dx)^2 = (ax^4 + cx^2 + e)^2$$

Passo 1: transformada de Graeffe

Separe os termos de grau par dos termos de grau ímpar:

$$x^5 + bx^3 + dx = -ax^4 - cx^2 - e.$$

Eleve os dois lados da equação ao quadrado:

$$(x^5 + bx^3 + dx)^2 = (ax^4 + cx^2 + e)^2$$

ou seja

$$\begin{aligned} x^{10} + 2bx^8 + &(b^2 + 2d)x^6 + 2bdx^4 + d^2x^2 \\ &= a^2x^8 + 2acx^6 + (2ae + c^2)x^4 + 2cex^2 + e^2. \end{aligned}$$

Passo 1: transformada de Graeffe

Separe os termos de grau par dos termos de grau ímpar:

$$x^5 + bx^3 + dx = -ax^4 - cx^2 - e.$$

Eleve os dois lados da equação ao quadrado:

$$(x^5 + bx^3 + dx)^2 = (ax^4 + cx^2 + e)^2$$

ou seja

$$\begin{aligned} x^{10} + 2bx^8 + &(b^2 + 2d)x^6 + 2bdx^4 + d^2x^2 \\ &= a^2x^8 + 2acx^6 + (2ae + c^2)x^4 + 2cex^2 + e^2. \end{aligned}$$

Faça a mudança de variável $y = x^2$ e reagrupe todos os termos:

$$\begin{aligned} y^5 + (2b - a^2)y^4 + &(b^2 + 2d - 2ac)y^3 + \\ &(2bd - 2ae - c^2)y^2 + (d^2 - 2ce)y - e^2 = 0 \end{aligned}$$

Passo 1: transformada de Graeffe

O novo polinômio

$$p_1(x) = x^5 + (2b - a^2)x^4 + (b^2 + 2d - 2ac)x^3 + (2bd - 2ae - c^2)x^2 + (d^2 - 2ce)x - e^2$$

é chamado transformada de Graeffe de $p(x)$. As suas raízes são os quadrados das raízes de $p(x)$.

O novo polinômio

$$p_1(x) = x^5 + (2b - a^2)x^4 + (b^2 + 2d - 2ac)x^3 + (2bd - 2ae - c^2)x^2 + (d^2 - 2ce)x - e^2$$

é chamado transformada de Graeffe de $p(x)$. As suas raízes são os quadrados das raízes de $p(x)$.

Sejam $x_1, \ldots, x_5$ as raízes de $p(x)$. Aplicando a transformação de Graeffe sucessivas vezes, obtemos

$$p_1(x) = x^5 + a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1 \text{ com raízes } x_1^2, \ldots, x_5^2$$
$$p_2(x) = x^5 + a_2x^4 + b_2x^3 + c_2x^2 + d_2x + e_2 \text{ com raízes } x_1^4, \ldots, x_5^4$$
$$\ldots\ldots$$
$$p_k(x) = x^5 + a_kx^4 + b_kx^3 + c_kx^2 + d_kx + e_k \text{ com raízes } x_1^{2^k}, \ldots x_5^{2^k}$$
$$\ldots\ldots$$

Passo 2: relações de Vieta-Girard

$$\begin{aligned}
a &= -x_1 - \cdots - x_5 \\
b &= x_1 x_2 + \cdots + x_4 x_5 \\
c &= -x_1 x_2 x_3 - \cdots - x_3 x_4 x_5 \\
d &= x_1 x_2 x_3 x_4 + \cdots + x_2 x_3 x_4 x_5 \\
e &= -x_1 x_2 x_3 x_4 x_5
\end{aligned}$$

Passo 2: relações de Vieta-Girard

$$\begin{aligned}
a &= -x_1 - \cdots - x_5 \\
b &= x_1x_2 + \cdots + x_4x_5 \\
c &= -x_1x_2x_3 - \cdots - x_3x_4x_5 \\
d &= x_1x_2x_3x_4 + \cdots + x_2x_3x_4x_5 \\
e &= -x_1x_2x_3x_4x_5
\end{aligned}$$

Aplicando estas relações ao k-ésimo polinômio:

$$\begin{aligned}
a_k &= -x_1^{2^k} - \cdots - x_5^{2^k} \\
b_k &= (x_1x_2)^{2^k} + \cdots + (x_4x_5)^{2^k} \\
c_k &= -(x_1x_2x_3)^{2^k} - \cdots - (x_3x_4x_5)^{2^k} \\
d_k &= (x_1x_2x_3x_4)^{2^k} + \cdots + (x_2x_3x_4x_5)^{2^k} \\
e_k &= -(x_1x_2x_3x_4x_5)^{2^k}
\end{aligned}$$

Passo 2: relações de Vieta-Girard

Agora suponha que as raízes são reais e distintas em valor absoluto: a menos de renumerar, podemos supor que

$$|x_1| > |x_2| > |x_3| > |x_4| > |x_5|.$$

Então, para k grande,

$$|x_1^{2^k}| \gg |x_2^{2^k}| \gg |x_3^{2^k}| \gg |x_4^{2^k}| \gg |x_5^{2^k}|$$

Passo 2: relações de Vieta-Girard

Agora suponha que as raízes são reais e distintas em valor absoluto: a menos de renumerar, podemos supor que

$$|x_1| > |x_2| > |x_3| > |x_4| > |x_5|.$$

Então, para k grande,

$$|x_1^{2^k}| \gg |x_2^{2^k}| \gg |x_3^{2^k}| \gg |x_4^{2^k}| \gg |x_5^{2^k}|$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
|a_k| &= |x_1^{2^k} + \cdots + x_5^{2^k}| \approx |x_1|^{2^k} \\
|b_k| &= |(x_1x_2)^{2^k} + \cdots + (x_4x_5)^{2^k}| \approx |x_1x_2|^{2^k} \\
|c_k| &= |(x_1x_2x_3)^{2^k} + \cdots + (x_3x_4x_5)^{2^k})| \approx |x_1x_2x_3|^{2^k} \\
|d_k| &= |(x_1x_2x_3x_4)^{2^k} + \cdots + (x_2x_3x_4x_5)^{2^k}| \approx |x_1x_2x_3x_4|^{2^k} \\
|e_k| &= |x_1x_2x_3x_4x_5|^{2^k} = |x_1x_2x_3x_4x_5|^{2^k}
\end{aligned}$$

Passo 3: Encontrar as soluções

Portanto,

$$\begin{array}{rcl}
|x_1| \approx \sqrt[2^k]{|a_k|} & \rightarrow & |x_1| \approx \sqrt[2^k]{|a_k|} \\
|x_1 x_2| \approx \sqrt[2^k]{|b_k|} & \rightarrow & |x_2| \approx \sqrt[2^k]{|b_k / a_k|} \\
|x_1 x_2 x_3| \approx \sqrt[2^k]{|c_k|} & \rightarrow & |x_3| \approx \sqrt[2^k]{|c_k / b_k|} \\
|x_1 x_2 x_3 x_4| \approx \sqrt[2^k]{|d_k|} & \rightarrow & |x_4| \approx \sqrt[2^k]{|d_k / c_k|} \\
|x_1 x_2 x_3 x_4 x_5| \approx \sqrt[2^k]{|e_k|} & \rightarrow & |x_5| \approx \sqrt[2^k]{|e_k / d_k|}
\end{array}$$

Desta forma, obtemos aproximações tão boas quanto se queira para os valores absolutos de todas as raízes de $p(x)$. Para encontrar as próprias raízes basta testar as várias possibilidades para os sinais.

Passo 3: Encontrar as soluções

Portanto,

$$\begin{array}{rclcrcl}
|x_1| & \approx & \sqrt[2^k]{|a_k|} & \longrightarrow & |x_1| & \approx & \sqrt[2^k]{|a_k|} \\
|x_1 x_2| & \approx & \sqrt[2^k]{|b_k|} & \longrightarrow & |x_2| & \approx & \sqrt[2^k]{|b_k/a_k|} \\
|x_1 x_2 x_3| & \approx & \sqrt[2^k]{|c_k|} & \longrightarrow & |x_3| & \approx & \sqrt[2^k]{|c_k/b_k|} \\
|x_1 x_2 x_3 x_4| & \approx & \sqrt[2^k]{|d_k|} & \longrightarrow & |x_4| & \approx & \sqrt[2^k]{|d_k/c_k|} \\
|x_1 x_2 x_3 x_4 x_5| & \approx & \sqrt[2^k]{|e_k|} & \longrightarrow & |x_5| & \approx & \sqrt[2^k]{|e_k/d_k|}
\end{array}$$

Desta forma, obtemos aproximações tão boas quanto se queira para os valores absolutos de todas as raízes de $p(x)$. Para encontrar as próprias raízes basta testar as várias possibilidades para os sinais.

O melhor de tudo: este algoritmo é fácil e rápido de implementar, basta uma planilha simples!

Exemplo: $x^5 - 3x^4 - 53x^3 + 171x^2 + 304x - 420 = 0$

Iterando a transformada de Graeffe:

k	a_k	b_k	c_k	d_k	e_k
0	-3	-53	171	304	-420
1	-115	4443	-63985	236056	-176400
2	$-4,3 \cdot 10^3$	$5,4 \cdot 10^6$	$-2,0 \cdot 10^9$	$3,3 \cdot 10^{10}$	$-3,1 \cdot 10^{10}$
3	$-7,8 \cdot 10^6$	$1,2 \cdot 10^{13}$	$-3,7 \cdot 10^{18}$	$9,7 \cdot 10^{20}$	$-9,6 \cdot 10^{20}$
4	$-3,6 \cdot 10^{13}$	$9,9 \cdot 10^{25}$	$-1,4 \cdot 10^{37}$	$9,3 \cdot 10^{41}$	$-9,3 \cdot 10^{41}$
5	$-1,1 \cdot 10^{27}$	$8,8 \cdot 10^{51}$	$-2,0 \cdot 10^{74}$	$8,7 \cdot 10^{83}$	$-8,7 \cdot 10^{83}$
6	$-1,2 \cdot 10^{54}$	$7,7 \cdot 10^{103}$	$-4,1 \cdot 10^{148}$	$7,7 \cdot 10^{167}$	$-7,7 \cdot 10^{167}$

Exemplo: $x^5 - 3x^4 - 53x^3 + 171x^2 + 304x - 420 = 0$

k	$\lvert x_1 \rvert$	$\lvert x_2 \rvert$	$\lvert x_3 \rvert$	$\lvert x_4 \rvert$	$\lvert x_5 \rvert$
0	3	17,6666666	3,2264150	1,7777777	1,3815789
1	10,7238052	6,2156884	3,7949051	1,9207393	0,8644537
2	8,1161004	5,9656879	4,3877606	2,0084692	0,9843130
3	7,2737261	5,9670222	4,8389497	2,0007618	0,9995123
4	7,0375947	5,9892551	4,9822123	2,0000018	0,9999990
5	7,0015754	5,9992014	4,9995402	2	1
6	7,0000056	5,9999959	4,9999993	2	1

Exemplo: $x^5 - 3x^4 - 53x^3 + 171x^2 + 304x - 420 = 0$

k	$\lvert x_1 \rvert$	$\lvert x_2 \rvert$	$\lvert x_3 \rvert$	$\lvert x_4 \rvert$	$\lvert x_5 \rvert$
0	3	17,6666666	3,2264150	1,7777777	1,3815789
1	10,7238052	6,2156884	3,7949051	1,9207393	0,8644537
2	8,1161004	5,9656879	4,3877606	2,0084692	0,9843130
3	7,2737261	5,9670222	4,8389497	2,0007618	0,9995123
4	7,0375947	5,9892551	4,9822123	2,0000018	0,9999990
5	7,0015754	5,9992014	4,9995402	2	1
6	7,0000056	5,9999959	4,9999993	2	1

Calculando $p(\pm 7)$, $p(\pm 6)$, $p(\pm 5)$, $p(\pm 2)$ e $p(\pm 1)$, concluímos que as raízes são

$$-7, \quad 6, \quad 5, \quad -2, \quad 1$$

É possível estender esta ideia para tratar todos os casos, inclusive raízes complexas e/ou raízes múltiplas.

É possível estender esta ideia para tratar todos os casos, inclusive raízes complexas e/ou raízes múltiplas.

Para saber mais:
Método de Dandelin-Graeffe: Um método iterativo para equações algébricas.
William Canellas, Revista do Professor de Matemática 2014.

Obrigado!

E votos de muito êxito para todos!