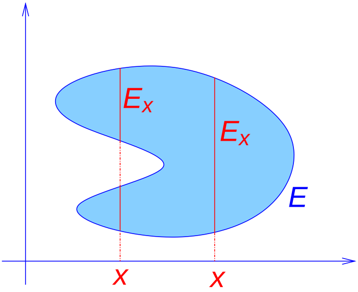
Fubini: por que dá certo e o que fazer quando dá errado

Marcelo Viana

IMPA - Rio de Janeiro

Teorema de Fubini

Comecemos por lembrar o que diz o teorema de Fubini, numa situação simples:

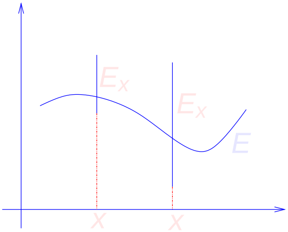


$$\text{area}(E) = \int \text{comprimento}(E_x)\, dx$$

Teorema de Fubini

Em particular,

$$\text{comprimento}(E_x) = 0 \quad \text{para todo } x$$
$$\Downarrow$$
$$\text{area}(E) = 0$$

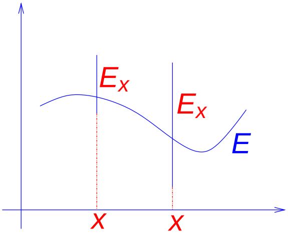


$$\text{comprimento}(E_x) = 0 \quad \text{para quase todo } x$$
$$\Downarrow \quad \Uparrow$$
$$\text{area}(E) = 0$$

Teorema de Fubini

Em particular,

$$\text{comprimento}(E_x) = 0 \quad \text{para todo } x$$
$$\Downarrow$$
$$\text{area}(E) = 0$$



$$\text{comprimento}(E_x) = 0 \quad \text{para } \textcolor{red}{\text{quase}} \text{ todo } x$$
$$\Downarrow \quad \textcolor{red}{\Uparrow}$$
$$\text{area}(E) = 0$$

Teorema de Fubini

O teorema é válido com muito maior generalidade:

- para integrais de funções:

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int \left(\int_{E_x} f(x,y)\,dy \right) dx$$

- para qualquer espaço euclideano $\mathbb{R}^d$ (integrais múltiplas):

$$\text{volume}_d(E) = \int \text{volume}_{d-1}(E_x)\,dx$$

Teorema de Fubini

O teorema é válido com muito maior generalidade:

- para integrais de funções:

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int \left(\int_{E_x} f(x,y)\,dy \right) dx$$

- para qualquer espaço euclideano $\mathbb{R}^d$ (integrais múltiplas):

$$\text{volume}_d(E) = \int \text{volume}_{d-1}(E_x)\,dx$$

O teorema é válido com muito maior generalidade:

- para integrais de funções:

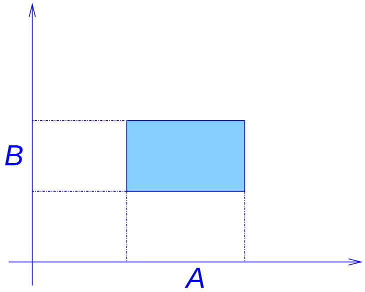
$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int \left(\int_{E_x} f(x,y)\,dy \right) dx$$

- para qualquer espaço euclideano $\mathbb{R}^d$ (integrais múltiplas):

$$\text{volume}_d(E) = \int \text{volume}_{d-1}(E_x)\,dx$$

Porquê o teorema de Fubini vale ?

Porque a área é o produto de duas medidas de comprimento: area$(A \times B) =$ comprimento$(A) \cdot$ comprimento(B).



Medidas produto

Esta resposta é correta. De fato, o teorema de Fubini vale em qualquer espaço produto $(X \times Y, \mu \times \nu)$ de medida.

Mas ela não é a boa resposta!

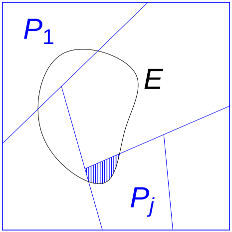
Medidas produto

Esta resposta é correta. De fato, o teorema de Fubini vale em qualquer espaço produto $(X \times Y, \mu \times \nu)$ de medida.

Mas ela não é a boa resposta!

Probabilidades condicionais - Exemplo 1

Seja (X, μ) um espaço de medida (p. ex.: $X = \mathbb{R}^2$ e $\mu =$ area). Dada uma partição finita $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ do espaço X,



defina μ_j = restrição normalizada de μ a P_j, isto é,

$$\mu_j(E) = \frac{\mu(E \cap P_j)}{\mu(P_j)} \quad \text{para todo } E$$

Probabilidades condicionais - Exemplo 1

Para qualquer $E \subset X$ tem-se a seguinte fórmula de tipo Fubini:

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j(E)\, p_j \qquad \text{onde } p_j = \mu(P_j).$$

Confira!

Cada μ_j é chamada probabilidade condicional de μ dado P_j.

Esta construção se estende a partições enumeráveis.

Probabilidades condicionais - Exemplo 1

Para qualquer $E \subset X$ tem-se a seguinte fórmula de tipo Fubini:

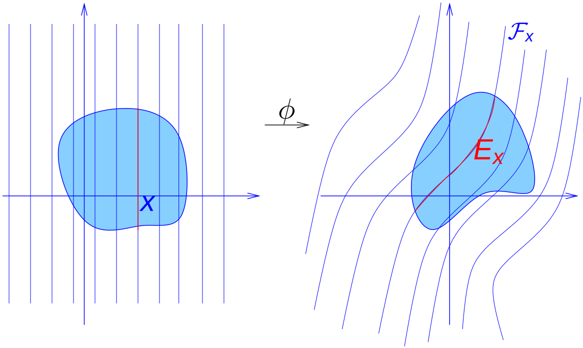
$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j(E)\, p_j \qquad \text{onde } p_j = \mu(P_j).$$

▸ Confira!

Cada μ_j é chamada probabilidade condicional de μ dado P_j.

Esta construção se estende a partições enumeráveis.

Agora consideremos a seguinte situação:



onde ϕ é um difeomorfismo (aplicação diferenciável com inversa também diferenciável).

Probabilidades condicionais - Exemplo 2

Vale uma fórmula de tipo Fubini:

$$\text{area}(E) = \int \lambda_x(E_x)\, dx$$

onde cada λ_x é um “comprimento ponderado” ao longo da curva $\mathcal{F}_x$, dado por

$$\lambda_x(B) = \int_B \frac{|\det D\phi|}{|\partial_y \phi|} \circ \phi^{-1} ds \quad \text{para todo } B \subset \mathcal{F}_x.$$

Confira!

Probabilidades condicionais - Exemplo 2

Neste caso a partição é não enumerável e os seus elementos têm área zero (ao contrário do Exemplo 1).

Continua valendo que

$$\text{area}(E) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{comprimento}(E_x) = 0 \text{ para quase todo } x.$$

O teorema da desintegração de Rokhlin unifica estes e muitos outros exemplos.

Teorema da desintegração

Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida finita e considere uma partição $\mathcal{P}$ decente de X em conjuntos mensuráveis.

Teorema de Rokhlin

Existe uma medida $\hat{\mu}$ em $\mathcal{P}$ e uma família de probabilidades $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ tais que $\mu_P(P) = 1$ e

$$\mu(E) = \int_{\mathcal{P}} \mu_P(E)\, d\hat{\mu}(P)$$

para todo conjunto mensurável $E \subset X$.

No Exemplo 1: $\hat{\mu}(\{P_j\}) = p_j$ e $\mu_{P_j} = \mu_j$

No Exemplo 2: $\hat{\mu} = dx$ e $\mu_{\mathcal{F}_x} = \lambda_x$

Teorema da desintegração

Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida finita e considere uma partição $\mathcal{P}$ decente de X em conjuntos mensuráveis.

Teorema de Rokhlin

Existe uma medida $\hat{\mu}$ em $\mathcal{P}$ e uma família de probabilidades $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ tais que $\mu_P(P) = 1$ e

$$\mu(E) = \int_{\mathcal{P}} \mu_P(E)\, d\hat{\mu}(P)$$

para todo conjunto mensurável $E \subset X$.

No Exemplo 1: $\hat{\mu}(\{P_j\}) = p_j$ e $\mu_{P_j} = \mu_j$

No Exemplo 2: $\hat{\mu} = dx$ e $\mu_{\mathcal{F}_x} = \lambda_x$

Partições decentes

Dizemos que a partição $\mathcal{P}$ é decente se ela pode ser obtida por uma sequência enumerável de bisseções do espaço X em conjuntos mensuráveis.

No Exemplo 1:
a partição é definida por uma sequência finita de bisseções.

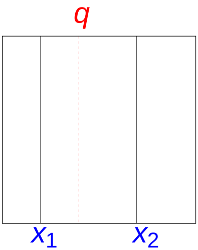
Partições decentes

Dizemos que a partição $\mathcal{P}$ é decente se ela pode ser obtida por uma sequência enumerável de bisseções do espaço X em conjuntos mensuráveis.

No Exemplo 1:
a partição é definida por uma sequência finita de bisseções.

Partições decentes

A partição do quadrado em segmentos verticais é decente: basta usar os racionais para definir as bisseções.

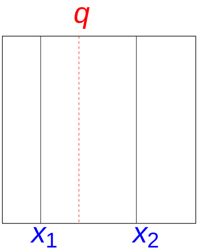


Daí segue que a partição do Exemplo 2 também é decente.

Partições não-decentes existem.
Elas não são necessariamente muito esquisitas.

Partições decentes

A partição do quadrado em segmentos verticais é decente: basta usar os racionais para definir as bisseções.



Daí segue que a partição do Exemplo 2 também é decente.

Partições não-decentes existem.
Elas não são necessariamente muito esquisitas.

Desconstruindo Fubini

O teorema de Rokhlin diz que uma fórmula de tipo Fubini é totalmente geral, não tem nada que ver com espaços produto.

Por outro lado, coisas muito estranhas podem acontecer:

Teorema

Existem partições do quadrado Q em curvas suaves $\mathcal{F}_x$ e existem conjuntos mensuráveis $Z \subset Q$ tais que

(a) $\text{area}(Z) = 1$ e, no entanto,

(b) $\text{cardinal}\,(Z \cap \mathcal{F}_x) = 1$ para todo x.

O comprimento de $Z \cap \mathcal{F}_x$ é sempre zero, no entanto, a área do conjunto Z não é zero!

Desconstruindo Fubini

O teorema de Rokhlin diz que uma fórmula de tipo Fubini é totalmente geral, não tem nada que ver com espaços produto.

Por outro lado, coisas muito estranhas podem acontecer:

Teorema

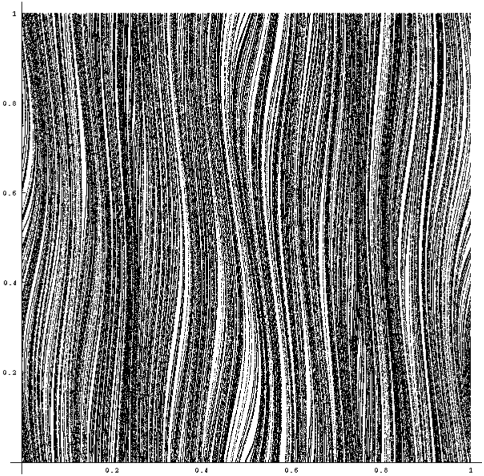
Existem partições do quadrado Q em curvas suaves $\mathcal{F}_x$ e existem conjuntos mensuráveis $Z \subset Q$ tais que

(a) $\text{area}(Z) = 1$ e, no entanto,

(b) $\text{cardinal}\,(Z \cap \mathcal{F}_x) = 1$ para todo x.

O comprimento de $Z \cap \mathcal{F}_x$ é sempre zero, no entanto, a área do conjunto Z não é zero!

Desconstruindo Fubini



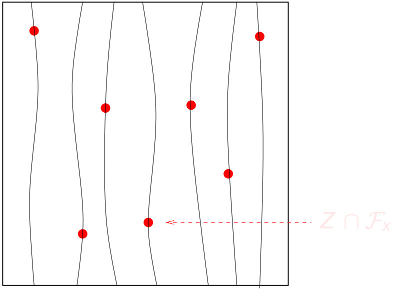
Amie Wilkinson http://www.math.northwestern.edu/∼wilkinso

Desconstruindo Fubini

Quem são as probabilidades μ_x neste tipo de exemplo ?

$$1 = \mu(Z) = \int_0^1 \mu_x(Z)\,dx = \int_0^1 \mu_x(Z \cap \mathcal{F}_x)\,dx$$

implica $\mu_x =$ medida delta de Dirac no único ponto de $Z \cap \mathcal{F}_x$

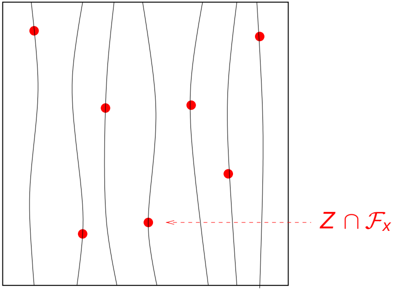


Dizemos que a medida de área tem desintegração atômica.

Quem são as probabilidades μ_x neste tipo de exemplo ?

$$1 = \mu(Z) = \int_0^1 \mu_x(Z)\,dx = \int_0^1 \mu_x(Z \cap \mathcal{F}_x)\,dx$$

implica $\mu_x =$ medida delta de Dirac no único ponto de $Z \cap \mathcal{F}_x$



Dizemos que a medida de área tem desintegração atômica.

Desintegração atômica em Dinâmica

Na última década foi descoberto que situações como esta são muito comuns em Dinâmica. Vamos apresentar um exemplo.

$$f_0 : \mathbb{T}^2 \times S^1 \to \mathbb{T}^2 \times S^1, \quad f_0(z,w) = (g(z), w)$$

onde

$$g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2, \quad g([x,y]) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$$

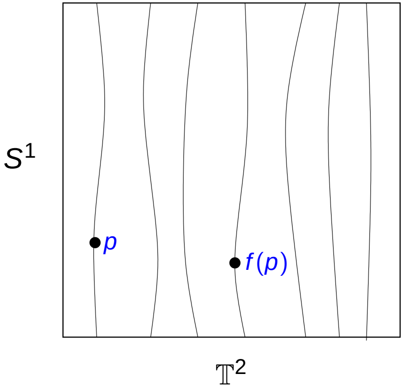
lembrando que $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$

$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow$ $x_1 - x_2$ e $y_1 - y_2$ são números inteiros

Os autovalores de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tem valor absoluto diferente de 1.

Teorema

Para todo difeomorfismo $f : \mathbb{T}^2 \times S^{\rightarrow}\mathbb{T}^2 \times S^1$ próximo de f_0 existe uma partição de $\mathbb{T}^2 \times S^1$ em curvas fechadas suaves (chamadas folhas centrais) tal que $f(\mathcal{F}_p) = \mathcal{F}_{f(p)}$ para todo p.



Desintegração atômica em Dinâmica

Suponha que $f : M \to M$ preserva volume e satisfaz uma propriedade técnica (fraca) chamada acessibilidade.

Teorema (Avila, Viana, Wilkinson)

Então a medida de volume tem desintegração atômica, a menos que a transformação seja da forma

$$f : \mathbb{T}^2 \times S^1 \to \mathbb{T}^2 \times S^1, \quad f(z,w) = (g(z), w + \alpha(z))$$

módulo alguma mudança suave de coordenadas.

No úlimo caso, que é muito raro, as propriedades dinâmicas podem ser estudadas diretamente a partir da expressão da f.

$$
\begin{aligned}
\mu(E) &= \sum_{j=1}^{n} \mu(E \cap P_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu(E \cap P_j)}{\mu(P_j)} p_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mu_j(E)\, p_j
\end{aligned}
$$

Voltar

$$
\begin{aligned}
\text{area}(E) &= \int\int_E 1 dx\, dy && \text{denotando } D = \phi^{-1}(E) \\
&= \int\int_D |\det D\phi|\, dx\, dy && \text{(mudança de variável)} \\
&= \int dx \int_{D_x} |\det D\phi|\, dy && \text{(teorema de Fubini)} \\
&= \int dx \int_{E_x} \frac{|\det D\phi|}{|\partial_y \phi|} \circ \phi^{-1} ds && \text{(mudança de variável)}
\end{aligned}
$$

s é o comprimento de arco ao longo das folhas $\mathcal{F}_x$.

Voltar