Conjectura de Poincaré
Geometria para entender o Universo

Marcelo Viana

IMPA - Rio de Janeiro

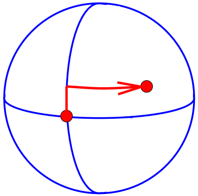
Outline

Outline

Variedades

Definição

Uma variedade é um espaço que pode ser descrito localmente através de coordenadas. O número de coordenadas que são necessárias é chamado dimensão da variedade.

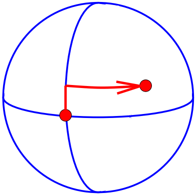


dimensão 1 = curva   dimensão 2 = superfície

Variedades

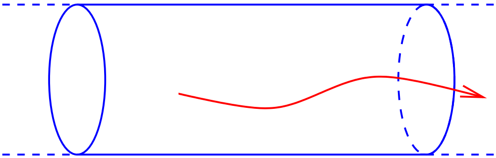
Definição

Uma variedade é um espaço que pode ser descrito localmente através de coordenadas. O número de coordenadas que são necessárias é chamado dimensão da variedade.



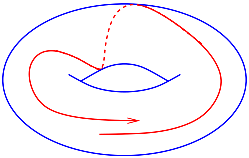
dimensão 1 = curva   dimensão 2 = superfície

Variedades abertas



O cilindro é uma variedade aberta, de dimensão 2.

Variedades fechadas



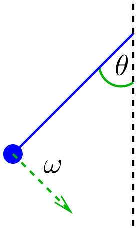
O toro é uma variedade fechada, de dimensão 2.

Porquê variedades são importantes ?

Em geral, o conjunto dos estados possíveis de um sistema experimental é uma variedade. Por exemplo:

Porquê variedades são importantes ?

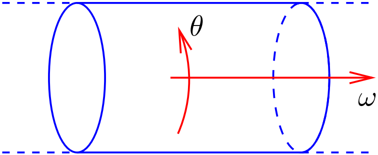
Em geral, o conjunto dos estados possíveis de um sistema experimental é uma variedade. Por exemplo:



Cada estado do pêndulo simples corresponde a um par (θ, ω).

Porquê variedades são importantes ?

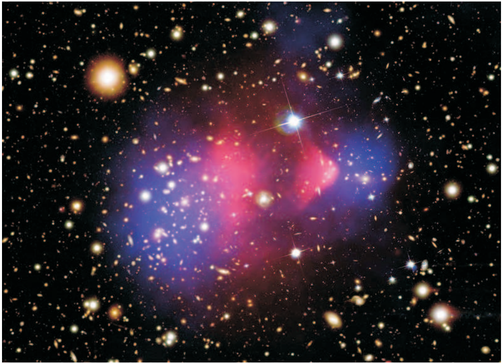
Em geral, o conjunto dos estados possíveis de um sistema experimental é uma variedade. Por exemplo:



Cada estado do pêndulo simples corresponde a um par (θ, ω). O espaço de todas esses pares é um cilindro.

Porquê variedades são importantes ?

O Universo é uma variedade, de dimensão 4 (espaço-tempo relativístico). Que tipo de variedade ? É aberta ou fechada ?



Problema da classificação

Problema

Podemos listar todas as variedades de qualquer dimensão d ?

Em dimensão 1 é fácil: a única curva aberta é a reta e a única curva fechada é o círculo. Como assim, “única” ?

Problema da classificação

Problema

Podemos listar todas as variedades de qualquer dimensão d ?

Em dimensão 1 é fácil: a única curva aberta é a reta e a única curva fechada é o círculo. Como assim, “única” ?

Problema da classificação

Problema

Podemos listar todas as variedades de qualquer dimensão d ?

Em dimensão 1 é fácil: a única curva aberta é a reta e a única curva fechada é o círculo. Como assim, "única" ?

Equivalência de variedades

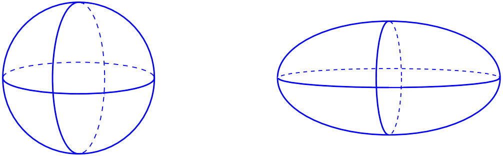
Definição

Duas variedades são equivalentes se há uma correspondência contínua um-a-um entre os pontos de uma e da outra.

Equivalência de variedades

Definição

Duas variedades são equivalentes se há uma correspondência contínua um-a-um entre os pontos de uma e da outra.

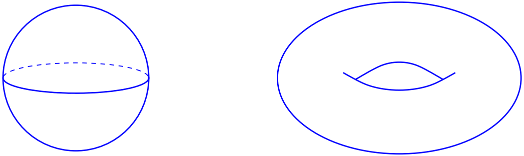


Uma esfera e um elipsóide são equivalentes.

Equivalência de variedades

Definição

Duas variedades são equivalentes se há uma correspondência contínua um-a-um entre os pontos de uma e da outra.



Uma esfera e um toro não são equivalentes.

Outline

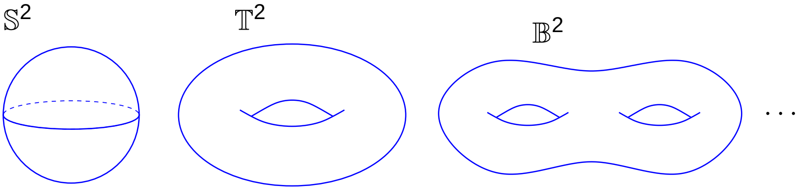
Teorema de classificação das superfícies

Há duas sequências fundamentais de superfícies fechadas:

Teorema de classificação das superfícies

Há duas sequências fundamentais de superfícies fechadas:

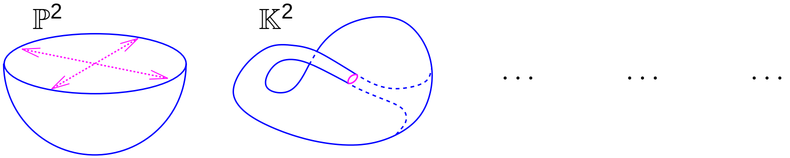
Superfícies orientáveis



Teorema de classificação das superfícies

Há duas sequências fundamentais de superfícies fechadas:

Superfícies não orientáveis



Teorema de classificação das superfícies

Teorema

- Toda a superfície fechada é equivalente a uma destas.
- Duas destas superfícies nunca são equivalentes.

Dimensões superiores

Problema

Para $d > 2$, também podemos listar (a menos de equivalência) todas as variedades de dimensão d ?

Em dimensão 4 ou maior a resposta é negativa: o conjunto de todas as variedades é demasiado “complexo” para que possa ser listado de modo explícito.

A prova deste fato usa idéias da teoria da complexidade que remontam ao famoso Teorema da Indecidibilidade de Gödel.

Dimensões superiores

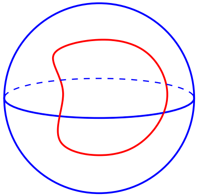
Problema

Para $d > 2$, também podemos listar (a menos de equivalência) todas as variedades de dimensão d ?

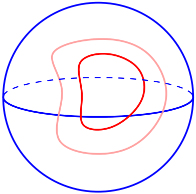
Em dimensão 4 ou maior a resposta é negativa: o conjunto de todas as variedades é demasiado “complexo” para que possa ser listado de modo explícito.

A prova deste fato usa idéias da teoria da complexidade que remontam ao famoso Teorema da Indecidibilidade de Gödel.

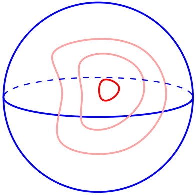
Variedades simplesmente conexas



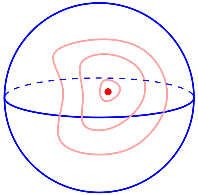
Variedades simplesmente conexas



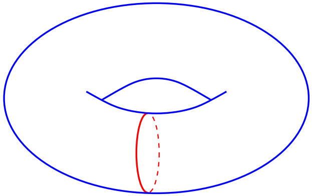
Variedades simplesmente conexas



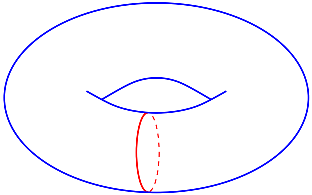
Variedades simplesmente conexas



Variedades simplesmente conexas



Variedades simplesmente conexas



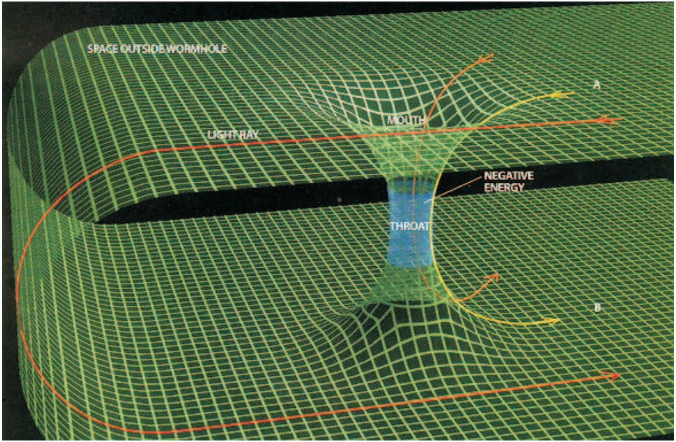
Definição

Uma variedade é simplesmente conexa se todo laço nela pode ser deformado até colapsar num ponto.

Porquê esta noção é importante ?

Toda a variedade pode ser construída, como um “quociente”, a partir de uma variedade simplesmente conexa.

O Universo é simplesmente conexo ?



Outline

Conjectura de Poincaré

Conjectura

Toda variedade fechada simplesmente conexa de dimensão 3 é equivalente à esfera 3-dimensional.

Proposta por Henri Poincaré no início do século XX (1900-04).

Demonstrada cem anos depois por Grigori Perelman, seguindo um roteiro iniciado por Richard Hamilton.

Henri Poincaré

29 de abril de 1854 - 17 de julho de 1912

Último dos grandes matemáticos universalistas.

Os seus trabalhos abarcam a maioria das áreas da Matemática e da Física Teórica (geometria, álgebra, análise, eletromagnetismo, topologia, equações diferenciais, mecânica celeste, teoria dos números).

Foi um dos artífices da Teoria da Relatividade e o fundador da área de Sistemas Dinâmicos.

Grigori Perelman

13 de junho de 1966 (São Petersburgo, Rússia)

Especialista de fama internacional com diversos trabalhos notáveis na área de Geometria, tais como a prova da Conjectura da Alma.

A partir de nov/2002, publicou na internet uma série de artigos contendo a prova da Conjectura de Poincaré e da Conjectura da Geometrização.

Em 2006 a União Matemática Internacional (IMU) concedeu-lhe a Medalha Fields. No entanto, Perelman recusou, se demitiu do Instituto Steklov, e se afastou do meio acadêmico.

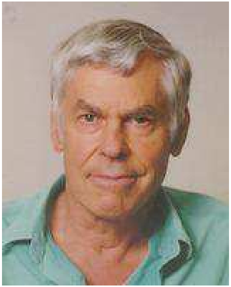
Conjectura de Poincaré

A conjectura de Poincaré faz sentido em qualquer dimensão: *se uma variedade parece ser a esfera então ela é a esfera ?*

Conjectura

Para qualquer $d > 2$, toda variedade fechada que tem o tipo de homotopia da esfera $\mathbb{S}^d$ é equivalente à esfera $\mathbb{S}^d$.

Steven Smale



15 de julho de 1930 (Flint (Michigan), USA)

Deu notáveis contribuições fundamentais à topologia, sistemas dinâmicos, economia matemática e teoria da computação.

Causou controvérsia no seu país ao afirmar: ”os meus melhores trabalhos foram feitos nas praias do Rio de Janeiro”.

Em 1960 provou a Conjectura de Poincaré em dimensão maior ou igual a 5. Por este trabalho, recebeu a Medalha Fields em 1966.

Michael Freedman

21 de abril de 1951, Los Angeles, USA

Adquiriu renome internacional por seus trabalhos em topologia, particularmente sobre variedades de dimensão quatro. Atualmente trabalha em computação quântica nos Laboratórios Microsoft.

Em 1982 provou a Conjectura de Poincaré em dimensão quatro. Por este trabalho, recebeu a Medalha Fields em 1986.

A Conjectura de Poincaré e a Medalha Fields

Até hoje, já foram concedidas 44 Medalhas Fields. Três foram para trabalhos sobre a Conjectura de Poincaré. Algumas mais (por exemplo, Thurston e Yau) foram para tópicos correlatos.

A Conjectura de Poincaré também é um dos 7 Problemas do Milênio, distinguidos pelo Instituto Clay de Matemáticas com prêmio de 1 milhão de dólares.

A Conjectura de Poincaré e a Medalha Fields

Até hoje, já foram concedidas 44 Medalhas Fields. Três foram para trabalhos sobre a Conjectura de Poincaré. Algumas mais (por exemplo, Thurston e Yau) foram para tópicos correlatos.

A Conjectura de Poincaré também é um dos 7 Problemas do Milênio, distinguidos pelo Instituto Clay de Matemáticas com prêmio de 1 milhão de dólares.

Outline

Estratégia da demonstração

No início dos anos 80, Hamilton propôs a seguinte estratégia:

Começando com uma variedade de dimensão 3 com uma métrica qualquer, deformá-la para aumentar a curvatura onde ela é pequena e diminuir a curvatura onde ela é grande. *A deformação deveria convergir para uma geometria "uniforme".*

FILMES (C. McMullen, R. Sinclair, L. H. Figueiredo)

Estratégia da demonstração

- Se a variedade inicial é simplesmente conexa então a deformação deveria convergir para a esfera $\mathbb{S}^3$. Isto provaria a Conjectura de Poincaré.

Em dimensão 2 esta estratégia funciona (Hamilton): a deformação converge para uma superfície com curvatura constante, ou seja, para a esfera $\mathbb{S}^2$.

Fluxo de Ricci

A formulação exata desta estratégia é dada pelo fluxo de Ricci:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i,j} = -2R_{i,j}$$

onde $g_{i,j}$ é a métrica, $R_{i,j}$ é o tensor da curvatura de Ricci, e t é o parâmetro ("tempo") de deformação.

- O fluxo de Ricci é uma versão não linear da Equação do Calor: ele provoca "difusão" da curvatura na variedade.
- O tensor de Ricci é fundamental na Relatividade Geral: equação de campo de Einstein: $8\pi T_{i,j} = R_{i,j} - \frac{R}{2} g_{i,j}$.

Fluxo de Ricci

A formulação exata desta estratégia é dada pelo fluxo de Ricci:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i,j} = -2R_{i,j}$$

onde $g_{i,j}$ é a métrica, $R_{i,j}$ é o tensor da curvatura de Ricci, e t é o parâmetro ("tempo") de deformação.

- O fluxo de Ricci é uma versão não linear da Equação do Calor: ele provoca "difusão" da curvatura na variedade.
- O tensor de Ricci é fundamental na Relatividade Geral: equação de campo de Einstein: $8\pi T_{i,j} = R_{i,j} - \frac{R}{2} g_{i,j}$.

Fluxo de Ricci

A formulação exata desta estratégia é dada pelo fluxo de Ricci:

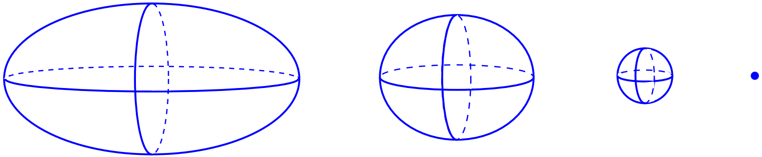
$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i,j} = -2R_{i,j}$$

onde $g_{i,j}$ é a métrica, $R_{i,j}$ é o tensor da curvatura de Ricci, e t é o parâmetro (“tempo”) de deformação.

- O fluxo de Ricci é uma versão não linear da Equação do Calor: ele provoca “difusão” da curvatura na variedade.
- O tensor de Ricci é fundamental na Relatividade Geral: equação de campo de Einstein: $8\pi T_{i,j} = R_{i,j} - \frac{R}{2} g_{i,j}$.

Fluxo de Ricci normalizado

O fluxo de Ricci não preserva o volume da variedade:



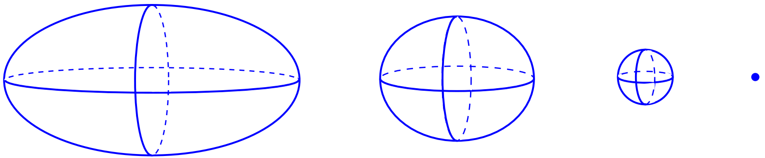
Por isso, precisamos utilizar o fluxo de Ricci normalizado:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i,j} = -2R_{i,j} + \lambda g_{i,j}$$

onde λ é chamada constante cosmológica.

Fluxo de Ricci normalizado

O fluxo de Ricci não preserva o volume da variedade:



Por isso, precisamos utilizar o fluxo de Ricci normalizado:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i,j} = -2R_{i,j} + \lambda g_{i,j}$$

onde λ é chamada constante cosmológica.

Richard Hamilton

Nascido em 1943.

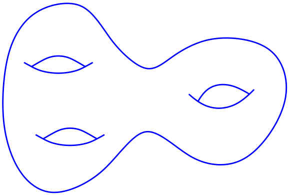
Formulou o programa do fluxo de Ricci e provou que esta estratégia realmente funciona quando a variedade inicial tem curvatura de Ricci positiva:

Teorema

Toda variedade fechada simplesmente conexa de dimensão 3 que admite métrica com curvatura de Ricci positiva é equivalente à esfera $\mathbb{S}^3$.

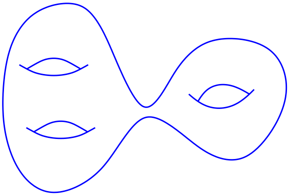
Singularidades

No caso geral, quando a curvatura de Ricci não é positiva, o fluxo de Ricci pode desenvolver singularidades:



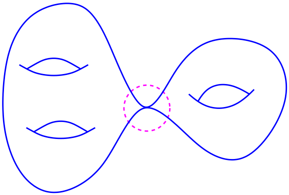
Singularidades

No caso geral, quando a curvatura de Ricci não é positiva, o fluxo de Ricci pode desenvolver singularidades:



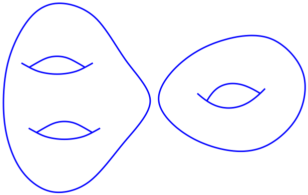
Singularidades

No caso geral, quando a curvatura de Ricci não é positiva, o fluxo de Ricci pode desenvolver singularidades:



Singularidades

No caso geral, quando a curvatura de Ricci não é positiva, o fluxo de Ricci pode desenvolver singularidades:



Prova das Conjecturas de Poincaré e Thurston

Grigori Perelman explicou como o fluxo pode ser modificado (fluxo de Ricci com cirurgia) de modo a manter este fenômeno sob controle, evitando os piores tipos de singularidades. Para isso, introduziu diversas técnicas originais revolucionárias.

Os seus argumentos também provam um resultado ainda mais forte, a Conjectura da Geometrização de Thurston, que aponta para a classificação de todas as variedades de dimensão 3.

Prova das Conjecturas de Poincaré e Thurston

Grigori Perelman explicou como o fluxo pode ser modificado (fluxo de Ricci com cirurgia) de modo a manter este fenômeno sob controle, evitando os piores tipos de singularidades. Para isso, introduziu diversas técnicas originais revolucionárias.

Os seus argumentos também provam um resultado ainda mais forte, a Conjectura da Geometrização de Thurston, que aponta para a classificação de todas as variedades de dimensão 3.