Dinâmica : Avanços e Desafios

Marcelo Viana

IMPA - Rio de Janeiro

COPEA, 4 de setembro de 2003

Introdução
Conceitos Gerais

Atratores Estranhos
Transformação ¨Standard¨

Comportamento Estatístico
Medidas Físicas

Estabilidade do Sistema Solar

Problema dos N corpos:

$$m_i\ddot{q}_i = \Sigma_{i\neq j}\, G\frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|^3}m_i m_j \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

G é a constante universal de gravitação

$q_i \in \mathbb{R}^3$ é a posição do i-ésimo corpo

$\ddot{q}_i$ representa aceleração

m_i é a massa do i-ésimo corpo

O problema é descrever qualitativa e quantitativamente as soluções, especialmente o seu comportamento assintótico.

Historicamente, optou-se primeiro por ignorar as interações entre os planetas, já que a sua massa é muito menor que a do Sol:

O problema se transforma em $N-1$ sistemas de 2 corpos, não acoplados, que são resolúveis por quadraturas:

$$m_i\ddot{q}_i = G\frac{q_1 - q_i}{\|q_1 - q_i\|^3}m_i m_1, \qquad i = 2,\ldots,N$$

As soluções $q_i(t)$ interessantes são periódicas, correspondendo a órbitas elíticas keplerianas.

A configuração $Q(t) = (q_1(t), q_2(t), \ldots, q_N(t))$ evolui dentro de um toro de dimensão $3N$ (sistema integrável).

Posteriormente, buscou-se encontrar expressões mais precisas para as soluções, incluindo interações entre os planetas:

O problema original é tratado como perturbação do sistema Hamiltoniano simplificado (integrável):

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 \qquad \varepsilon \approx \frac{\text{massa de Júpiter}}{\text{massa do Sol}}$$

Assim se obtêm (Laplace, Lagrange, Leverrier) aproximações sucessivas das órbitas, partindo da solução kepleriana $Q_0(t)$ e levando em conta o acoplamento entre os maiores planetas:

$$Q(t) = Q_0(t) + \varepsilon Q_1(t) + \varepsilon^2 Q_2(t) + \cdots$$

Poincaré formula de maneira precisa, pela primeira vez, e estuda o problema da validade deste procedimento: A série $Q(t)$ converge ?

Surpreendentemente, ele concluiu que em geral a resposta deverá ser negativas: relações inteiras (ressonâncias) entre os períodos das órbitas keplerianas podem causar divergência:

... les séries ne pourraient-elles pas, par exemple, converger quand x_1^0 et x_2^0 ont été choisis de telle sorte que le raport n_1/n_2 soit incommensurable, et que son carré soit au contraire commensurable (ou quand le raport n_1/n_2 est assujetti à une autre condition analogue à celle que je viens d'énoncer un peu au hasard) ? Les raisonnements de ce Chapitre ne me permettent pas d'affirmer que ce fait ne se présentera pas. Tout ce qu'il m'est permis de dire, c'est qu'il est fort invraisemblable.