Teorema Ergódico de Birkhoff

Theorem 1 *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de probabilidade e* $T\colon X \longrightarrow X$ *uma transformação que preserva a medida* μ*. Então, dada qualquer função integrável* $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$*, o limite*

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) \tag{1}$$

existe para μ*-quase todo ponto* $x \in X$*. Além disso,* $\tilde{f}$ *é uma função integrável com* $\int \tilde{f}\, d\mu = \int f\, d\mu$ *e* $\tilde{f} \circ T = \tilde{f}$*. Finalmente, para qualquer* $1 \le p \le \infty$*, se* $f \in L^p(\mu)$ *então* $\tilde{f} \in L^p(\mu)$ *e tem-se* $\left\|\tilde{f}\right\|_p \le \|f\|_p$*.*

Começamos por provar a existência (em μ-qtp) do limite (1), que é o ingrediente fundamental deste enunciado. Como toda função pode ser escrita como diferença de duas funções não negativas

$$f = \max\{f, 0\} - \max\{-f, 0\}.$$

podemos, sem restrição , supor $f \ge 0$. Consideramos as funções

$$\overline{f}(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) \quad \text{e} \quad \underline{f}(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)).$$

e então basta mostrar que

$$\int \overline{f}\, d\mu \le \int f\, d\mu \le \int \underline{f}\, d\mu \tag{2}$$

De fato, (2) implica $\int(\overline{f} - \underline{f})\, d\mu \le 0$ e então, como $(\overline{f} - \underline{f}) \ge 0$, segue que $\overline{f} = \underline{f}$ em μ-qtp, que é precisamente o que queremos concluir.

Para provar a primeira desigualdade em (2) introduzimos $\overline{f}_K = \min\{\overline{f}, K\}$, onde $K \in \mathbb{N}$ é um inteiro fixado (grande). Também fixamos $\varepsilon > 0$ (pequeno) e para cada $x \in X$ definimos

$$t(x) = \min\left\{ n \ge 1\colon \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) \ge \overline{f}_K(x) - \varepsilon \right\}. \tag{3}$$

Notar que $t(x)$ sempre existe (por definição de lim sup e porque $\overline{f} \geq \overline{f}_K$). Notar ainda que (3) implica

$$\sum_{j=0}^{t(x)-1} f(T^j(x)) \geq t(x) \left(\overline{f}_K(x) - \varepsilon\right). \tag{4}$$

Finalmente, escolhemos $M \in \mathbb{N}$ grande tal que o conjunto

$$E = \{x \in X : t(x) > M\}$$

tenha $\mu(E) \leq (\varepsilon/K)$. Notar que isto é sempre possível: a família de conjuntos $E_n = \{x \in X : t(x) = n\}$ forma uma partição do espaço X, logo tem-se $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu(X) = 1$ e portanto $\mu(E) = \sum_{n>M} \mu(E_n) \leq (\varepsilon/K)$ desde que M seja suficientemente grande.

Agora para cada $x \in X$ e $n \geq 1$ definimos sequências x_i (de iterados de x) e t_i (de inteiros positivos), da seguinte maneira:

1. Tomamos $x_0 = x$.
2. Suponhamos que x_i já foi definido. Para a definição de t_i e de x_{i+1} temos duas possibilidades:
   a) Se $t(x_i) \leq M$ então tomamos $t_i = t(x_i)$ e $x_{i+1} = T^{t_i}(x_i)$.
   b) Se $t(x_i) > M$ então tomamos $t_i = 1$ e $x_{i+1} = T(x_i)$.
3. Terminamos quando encontramos x_s tal que $t_0 + t_1 + \cdots + t_{s-1} + t_s \geq n$.

Notar que então se tem necessariamente

$$t_0 + t_1 + \cdots + t_{s-1} \geq n - M. \tag{5}$$

No caso a) acima, usando (4) obtemos

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=0}^{t_i-1} (f + K\mathbf{1}_E)(T^j(x_i)) &\geq \textstyle\sum_{j=0}^{t_i-1} f(T^j(x_i)) \\ &\geq t_i \left(\overline{f}_K(x_i) - \varepsilon\right) = t_i \left(\overline{f}_K(x) - \varepsilon\right), \end{aligned} \tag{6}$$

onde a última igualdade segue de que $\overline{f}_K(T(y)) = \overline{f}_K(y)$ para todo y (ver abaixo prova de afirmação análoga para $\tilde{f}$). Por outro lado, no caso b) temos

$$\sum_{j=0}^{t_i-1} (f + K\mathbf{1}_E)(T^j(x_i)) = f(x_i) + K \geq K \geq t_i \left(\overline{f}_K(x) - \varepsilon\right) \tag{7}$$

Então, usando (6), (7) e (5) (escrevemos $\tau = t_0 + \cdots + t_{s-1}$, para simplificar a notação)

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} (f + K\mathbf{1}_E)(T^j(x)) = \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{s-1} \left(\sum_{j=0}^{t_i-1} (f + K\mathbf{1}_E)(T^j(x_i)) \right) + \sum_{j=\tau}^{n-1} (f + K\mathbf{1}_E)(T^j(x)) \\ &\geq \left(\textstyle\sum_{i=0}^{s-1} t_i \right) (\overline{f}_K(x) - \varepsilon) + 0 \geq (n - M)(\overline{f}_K(x) - \varepsilon). \end{aligned} \tag{8}$$

Integrando o primeiro e o último membros (observar que, uma vez que a medida μ é T-invariante, tem-se $\int (f + K\mathbf{1}_E) \circ T^j \, d\mu = \int (f + K\mathbf{1}_E) \, d\mu$ para todo j),

$$n\left(\int f \, d\mu + K\mu(E)\right) \geq (n - M)\left(\int \overline{f}_K \, d\mu - \varepsilon\right).$$

Dividindo ambos os termos por n e fazendo $n \to \infty$ deduzimos que

$$\int f \, d\mu \geq \int \overline{f}_K \, d\mu - \varepsilon - \varepsilon \text{ para todo } \varepsilon > 0 \text{ e portanto } \int f \, d\mu \geq \int \overline{f}_K \, d\mu.$$

Então, passando ao limite quando $K \to \infty$ (notar que a sequência $\overline{f}_K$ converge momotonamente para $\overline{f}$) obtemos

$$\int f \, d\mu \geq \int \overline{f} \, d\mu.$$

como pretendíamos.

A segunda desigualdade em (2) é provada de modo muito semelhante, apenas indicamos as diferenças com relação ao caso anterior. Consideramos

$$t(x) = \min\left\{n \geq 1\colon \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) \leq \underline{f}(x) + \varepsilon\right\} \tag{9}$$

(comparar com (3)) e definimos x_i, t_i do mesmo modo que antes. Tomamos E como atrás mas com M fixado de tal modo que

$$\int_E f \, d\mu \leq \varepsilon. \tag{10}$$

Aplicando a $(f - f\mathbf{1}_E)$ o mesmo tipo de cálculo que usamos em (6), (7), (8) para a função $(f + K\mathbf{1}_E)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{j=0}^{n-1}(f - f\mathbf{1}_E)(T^j(x)) = \\
&\quad = \textstyle\sum_{i=0}^{s-1}\left(\sum_{j=0}^{t_i-1}(f - f\mathbf{1}_E)(T^j(x_i))\right) + \sum_{j=\tau}^{n-1}(f - f\mathbf{1}_E)(T^j(x)) \\
&\quad \leq \textstyle\left(\sum_{i=0}^{s-1} t_i\right)(\underline{f}(x) + \varepsilon) + \sum_{j=\tau}^{n-1} f(T^j(x)) \\
&\quad \leq n(\underline{f}(x) + \varepsilon) + \textstyle\sum_{j=\tau}^{n-1} f(T^j(x)).
\end{aligned} \tag{11}$$

(comparar com (8)). Integrando vem (recordar que $n - \tau \leq M$, por (5))

$$n\left(\int f \, d\mu - \int_E f \, d\mu\right) \leq n\left(\int \underline{f} \, d\mu + \varepsilon\right) + M\int f \, d\mu.$$

Dividindo ambos os termos por n, fazendo $n \to \infty$ e usando (10),

$$\int f \, d\mu \leq \int \underline{f} \, d\mu + \varepsilon + \varepsilon \text{ para todo } \varepsilon > 0 \text{ e portanto } \int f \, d\mu \leq \int \underline{f} \, d\mu.$$

Isto termina a prova de (2).

Do argumento anterior também segue que $\int \tilde{f}\, d\mu = \int f\, d\mu$. Além disso,

$$\tilde{f}(T(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(T^j(x)) = \tilde{f}(x) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(f(T^n(x)) - f(x)\right) = \tilde{f}(x)$$

para μ-qtp x (verificar).

Por outro lado, é imediato da definição de $\tilde{f}$ que se $f \in L^\infty(\mu)$, digamos $|f(x)| \leq K$ para μ-qtp x, então $\tilde{f} \in L^\infty(\mu)$, com $\left|\tilde{f}(x)\right| \leq K$ para μ-qtp x. Finalmente, dado qualquer $1 \leq p < \infty$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(T^j(x)) \right|^p \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left| f(T^j(x)) \right|^p$$

(porque a função $t \mapsto |t|^p$ é convexa) e portanto $\left|\tilde{f}\right|^p \leq |\tilde{f}|^p$, implicando

$$\left\|\tilde{f}\right\|_p^p = \int \left|\tilde{f}\right|^p d\mu \leq \int |\tilde{f}|^p\, d\mu = \|f\|_p^p .$$

A prova do Teorema Ergódico está completa.

REFERÊNCIA

[KW] Katznelson, Weiss, *A simple proof of some ergodic theorems*, Israel Journal of Mathematics 42 (1982), 291-296.