Atratores Estranhos de Lorenz

Marcelo Viana

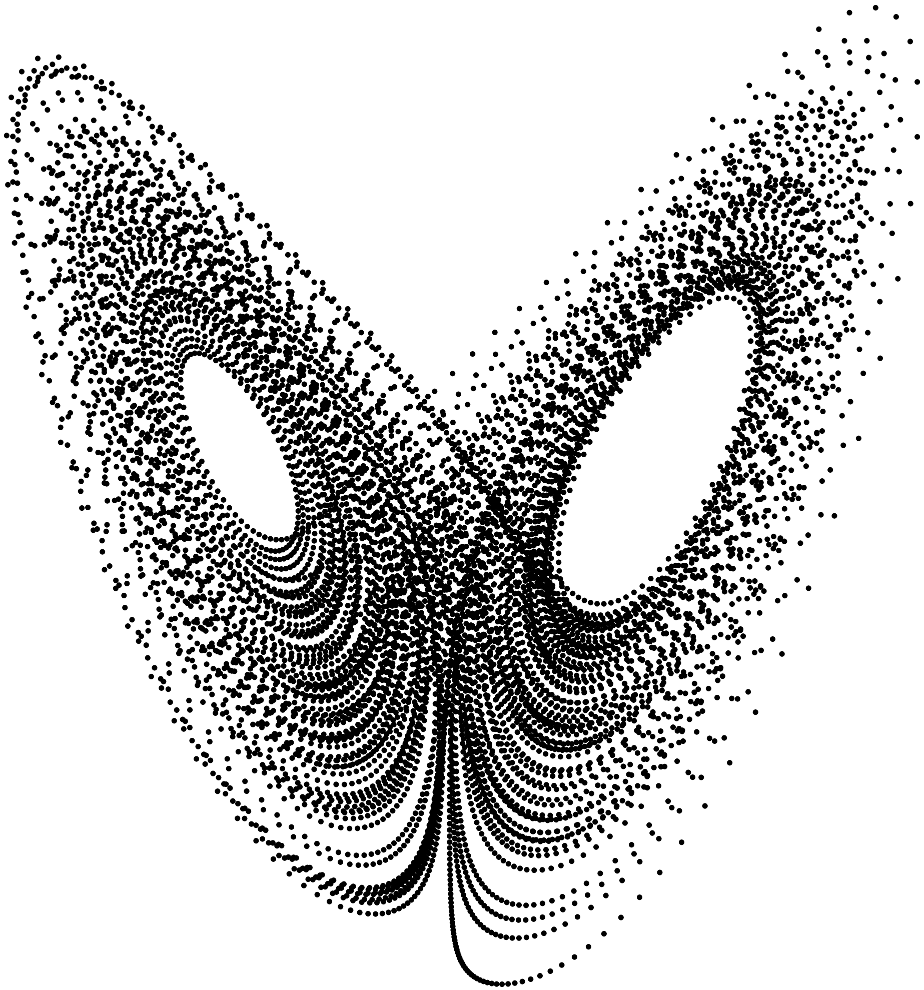
IMPA - Rio de Janeiro

Equações de Lorenz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y & \sigma &= 10 \\ \dot{y} &= rx - y - xz & r &= 28 \\ \dot{z} &= xy - bz & b &= 8/3 \end{aligned} \tag{1}$$

E. N. Lorenz, Journal of Atmospheric Sciences, 1963.

Atrator de Lorenz



Previsão do tempo

Lorenz estava questionando a fundamentação teórica dos métodos de previsão do tempo da época, baseados em regressão linear.

Na sua opinão o fenômeno do tempo é demasiado não linear para que tais métodos possam dar resultados consistentes.

Para testar a sua tese, comparou numericamente diversos métodos aplicados a certos modelos simplificados.

Previsão do tempo

A complexidade do modelo era um aspecto crítico dos experimentos, porque os computadores da época eram lentos:

Lorenz dispunha de um Royal McBee LGP-30 com 16k de memória interna, capaz de realizar 60 multiplicações por segundo. Para um sistema de doze equações diferenciais, cada passo da integração numérica tomava 1 segundo.

Após diversas tentativas, Lorenz acabou adotand um modelo com 3 equações introduzido por B. Saltzmann, que veio a ser chamado sistema de Lorenz.

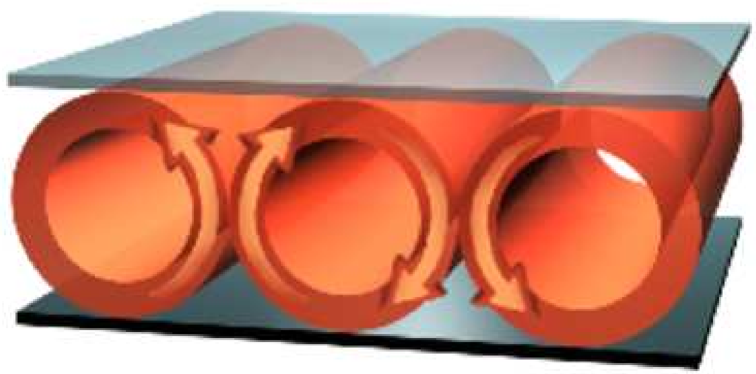
Convecção

Esse modelo é uma simplificação do modelo de Rayleigh

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial(\Psi, \nabla^2 \Psi)}{\partial(\xi, \eta)} + \nu \nabla^4 \Psi + g\alpha \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{\partial(\Psi, \Theta)}{\partial(\xi, \eta)} + \frac{\Delta T}{H}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \kappa \nabla^2 \Theta$$

do fenômeno de convecção térmica:



Convecção

Esse modelo é uma simplificação do modelo de Rayleigh

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial(\Psi, \nabla^2 \Psi)}{\partial(\xi, \eta)} + \nu \nabla^4 \Psi + g\alpha \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{\partial(\Psi, \Theta)}{\partial(\xi, \eta)} + \frac{\Delta T}{H}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \kappa \nabla^2 \Theta$$

do fenômeno de convecção térmica: aqui

ξ e η são coordenadas espaciais

t é o tempo

Ψ é a função de corrente

Θ é a função defeito de temperatura.

Convecção

Escrevendo estas funções Ψ e Θ como séries de Fourier nas coordenadas espaciais,

$$\Psi(\xi, \eta, t) = \sum_{m,n} X_{m,n}(t) \exp\left(im\frac{\pi a}{H}\xi\right) \exp\left(im\frac{\pi a}{H}\eta\right)$$

o modelo de Rayleigh se transforma um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias nas variáveis $X_{m,n}$

Conservando apenas as variáveis mais representativas e desprezando as demais, obtemos um sistema finito de equações diferenciais ordinárias. Saltzmann argumentou que podemos conservar apenas 3 variáveis.

Sensitividade

Para acelerar os cálculos, Lorenz imprimia os resultados com apenas 3 dígitos decimais, embora os calculos fossem realizados com 6 dígitos. Em algum momento reintroduziu um resultado como novo dado inicial:

$$0.707107$$

$$0.121320$$

$$0.363961$$

$$0.091883$$

$$0.275649$$

$$0.826948$$

$$0.480843$$

$$0.442530$$

Sensitividade

Para acelerar os cálculos, Lorenz imprimia os resultados com apenas 3 dígitos decimais, embora os calculos fossem realizados com 6 dígitos. Em algum momento reintroduziu um resultado como novo dado inicial:

0.707107	
0.121320	0.121
0.363961	0.363
0.091883	0.089
0.275649	0.267
0.826948	0.801
0.480843	0.403
0.442530	0.209

Sensitividade

Para sua surpresa, o novo cálculo divergia do anterior: as previsões para 4 dias mais tarde eram totalmente distintas.

Inicialmente, Lorenz acreditou que isso se devia a falha mecânica...

As consequências desta descoberta de que o modelo é sensitivo aos dados iniciais foram profundas.

Sensitividade

A ideia de sensitividade não era nova. Já J. C. Maxwell havia observado no século 19 que "as mesmas causas produzem os mesmos efeitos" não significa que "causas próximas produzem efeitos próximos".

Sensitividade

A ideia de sensitividade não era nova. Já J. C. Maxwell havia observado no século 19 que "as mesmas causas produzem os mesmos efeitos" não significa que "causas próximas produzem efeitos próximos".

E as seguintes palavras de Poincaré, no fim do século 19, são estranhamente proféticas:

Sensitividade

Why have meteorologists such difficulty in predicting the weather with any certainty ? Why is it that showers and even storms seem to come by chance, so that many people think it is quite natural to pray for them, though they would consider it ridiculous to ask for an eclipse by prayer ?

. . . a tenth of a degree more or less at any given point, and the cyclone will burst here and not there, and extend its ravages over districts that it would otherwise have spared. If they had been aware of this tenth of a degree, they could have known it beforehand, but the observations were neither sufficiently comprehensive nor sufficiently precise, and that is the reason why it all seems due to the intervention of chance.

Atratores estranhos

Alguns anos depois (1971), D. Ruelle e F. Takens estavam questionando a interpretação matemática do fenômeno de turbulência predominante na época:

E. Hopf e, posteriormente, L. Landau e E. Lifshitz haviam sugerido que turbulência corresponde a existência de toros invariantes de grande dimensão no espaço de configurações do fluido.

Ruelle e Takens demonstraram que esse modelo não tem sustentação matemática. Em troca, propuseram que turbulência deve corresponder a existência no espaço de configurações de algum "atrator estranho".

Atratores estranhos

Um atrator é uma região do espaço de configurações que fica invariante quando o tempo passa e que atrai muitas (ou até todas as) configurações próximas.

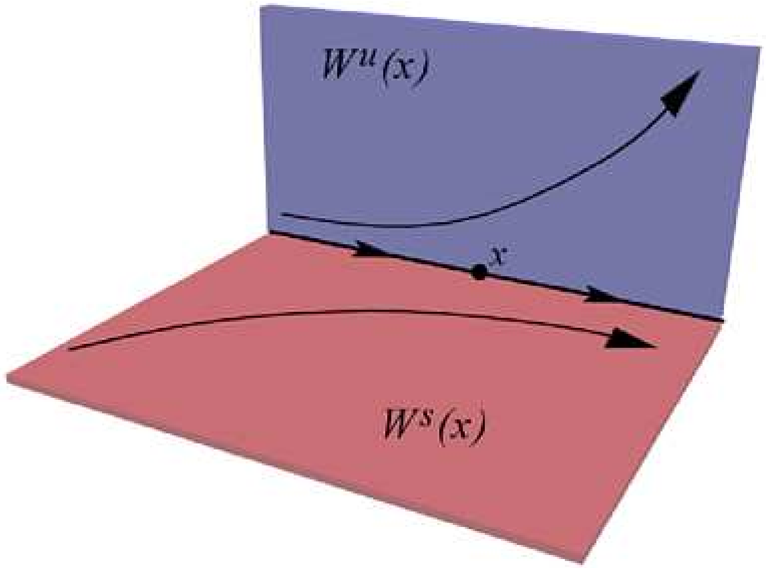
Ruelle e Takens não definiram "estranho", nem conheciam bons exemplos. De fato, o sistema de Lorenz era um exemplo espetacular dessa noção.

E atrator estranho acabou significando um atrator tal que as trajetórias que convergem para ele dependem sensitivamente do ponto inicial.

Mas o trabalho de Lorenz ainda era mal conhecido, e Ruelle e Takens só tinham como exemplos os atratores hiperbólicos de Smale.

Atratores hiperbólicos

Um atrator é hiperbólico se o comportamento do fluxo perto de qualquer das suas órbitas é de tipo sela:



Modelos geométricos de Lorenz

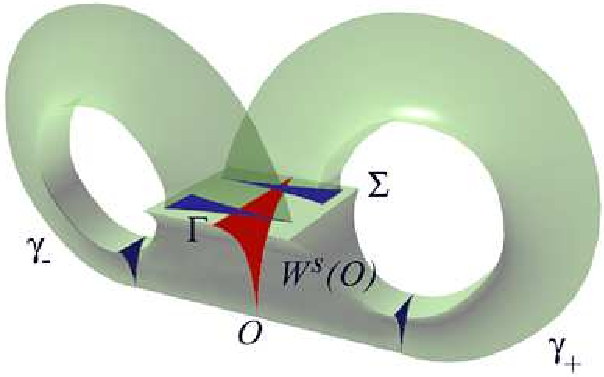
Nos décadas seguintes houve intensa atividade para tentar entender compreender o comportamento das equações de Lorenz e, em particular, tentar provar que de fato essas equações realmente exibem um atrator estranho.

Uma estratégia bem sucedida foi construir modelos para o comportamento que as equações parecem exibir. Estes modelos geométricos de Lorenz, foram devidos a

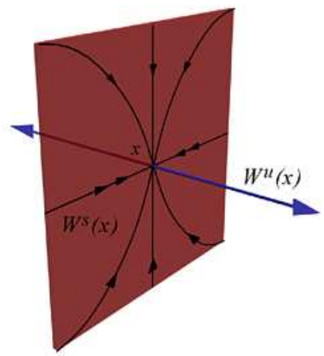
- Afraimovich, Bykov, Shilnikov (URSS)
- Guckenheimer, Williams (USA)

em meados dos anos 70.

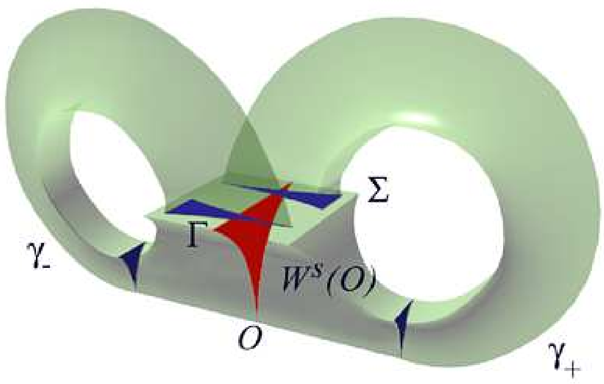
Modelos geométricos de Lorenz



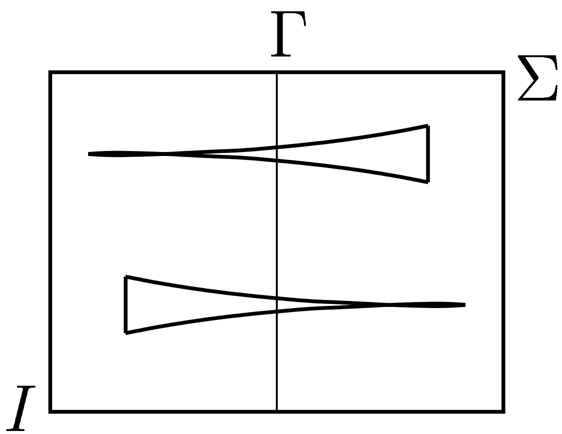
Os modelos geométricos são fluxos em 3 dimensões, tais que existe um ponto estacionário O.



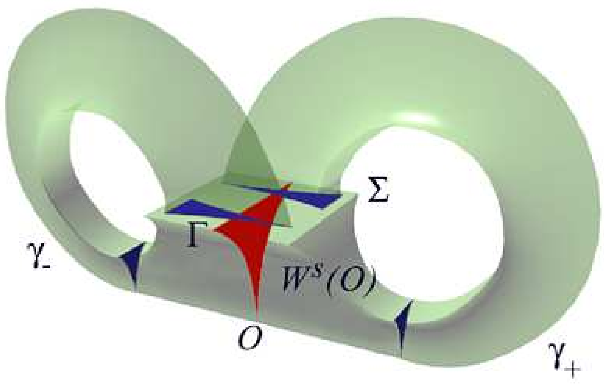
Modelos geométricos de Lorenz



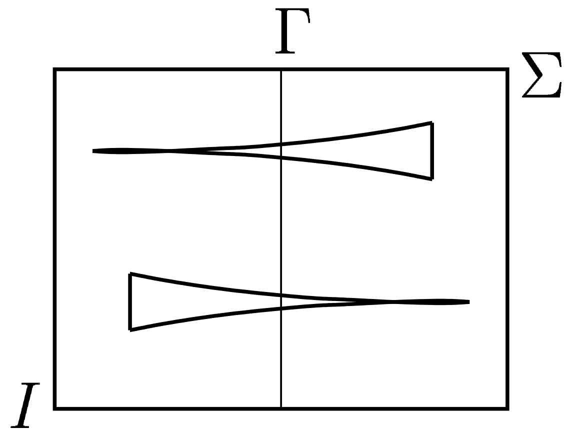
Os modelos geométricos são fluxos em 3 dimensões, tais que existe uma seção transversal ao fluxo.



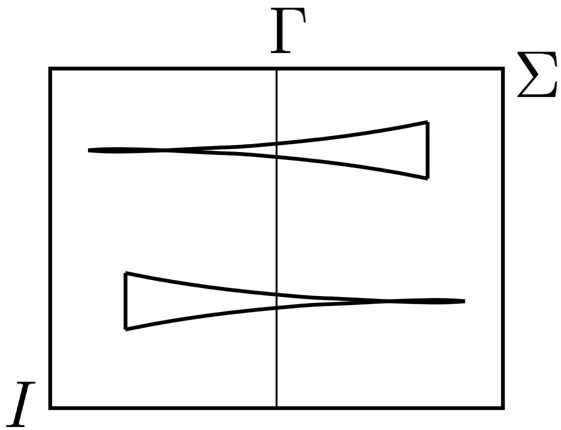
Modelos geométricos de Lorenz



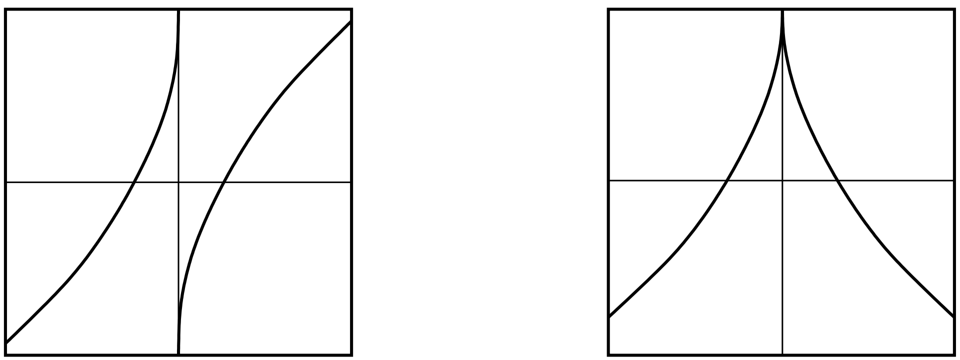
Os modelos geométricos são fluxos em 3 dimensões, tais que existe uma folheação invariante pela aplicação de retorno à seção transversal



Modelos geométricos de Lorenz



Os modelos geométricos são fluxos em 3 dimensões, tais que a aplicação induzida no espaço das folhas é expansora:



Modelos geométricos de Lorenz

Guckenheimer, Williams e Afraimovich, Bykov, Shilnikov provaram que

- tais fluxos existem e
- exibem atratores estranhos.

Um dos aspectos mais surpreendentes desta construção é que ela é robusta: se modificarmos ligeiramente o fluxo, continua existindo um atrator.

Robustez

Isto é ainda mais surpreendente porque o atrator contém um ponto estacionário, acumulada por trajetórias não estacionárias.

Parecia que esse fenômeno deveria pode ser destruído por modificacões do fluxo. Acreditava-se que os atratores robustos teriam que ser hiperbólicos.

Este fenômeno de Lorenz mostrou que o problema de compreender o que faz um sistema dinâmico ser robusto é especialmente sutil para sistemas com tempo contínuo (fluxos).

Robustez

Isto é ainda mais surpreendente porque o atrator contém um ponto estacionário, acumulada por trajetórias não estacionárias.

Parecia que esse fenômeno deveria pode ser destruído por modificacões do fluxo. Acreditava-se que os atratores robustos teriam que ser hiperbólicos.

Este fenômeno de Lorenz mostrou que o problema de compreender o que faz um sistema dinâmico ser robusto é especialmente sutil para sistemas com tempo contínuo (fluxos).

Robustez

Mas em meados dos anos 90 houve avanços notáveis. Um dos mais espetaculares foi o

Teorema [C. Morales, M. J. Pacifico, E. Pujals (UFRJ)]: *Qualquer atrator robusto de um fluxo em 3 dimensões é hiperbólico ou de tipo Lorenz*.

O segundo caso significa que tem todas as propriedades que descrevem os modelos geométricos de Lorenz.

Robustez

Mas em meados dos anos 90 houve avanços notáveis. Um dos mais espetaculares foi o

Teorema [C. Morales, M. J. Pacifico, E. Pujals (UFRJ)]: *Qualquer atrator robusto de um fluxo em 3 dimensões é hiperbólico ou de tipo Lorenz*.

O segundo caso significa que tem todas as propriedades que descrevem os modelos geométricos de Lorenz.

Pela mesma época foi obtido um resultado correspondente sobre atratores robustos de transformações (tempo discreto), por C. Bonatti (França), L. J. Díaz (PUC-Rio), E. Pujals (UFRJ), Raul Ures (Uruguay).

Existencia do atrator de Lorenz

Continuava em aberto saber se as equações originais de Lorenz realmente têm um atrator estranho. Isso foi resolvido em 1998 por W. Tucker (Suécia), que provou

Teorema [W. Tucker]:

As equações de Lorenz admitem um atrator estranho para os valores dos parâmetros originalmente considerados por Lorenz.

A demonstração faz uso do computador (integracao rigorosa) para provar a existencia do atrator estranho:

Existencia do atrator de Lorenz