

# Henri Poincaré

## A gênese dos Sistemas Dinâmicos

Marcelo Viana

IMPA - Rio de Janeiro

Jornadas de Iniciação Científica 2012

# Outline

- 1 Quem é Poincaré?
- 2 Sistemas Dinâmicos
- 3 Mecânica Celeste
- 4 Para saber mais

# Jules-Henri Poincaré (1854-1912)



# Henri Poincaré

- Contribui para a maioria das disciplinas da Matemática e cria novas disciplinas: Teoria das Funções Automorfas, Topologia Algébrica, **Sistemas Dinâmicos**.
- Abre o caminho para a Teoria das Funções de Várias Variáveis Complexas e a Teoria dos Desenvolvimentos Assintóticos.
- Revoluciona a Mecânica Celeste, descobrindo o 'caos'. Encontra novos equilíbrio dos astros e propõe um novo mecanismo para a formação das estrelas duplas.
- É um dos fundadores da Teoria da Relatividade Restrita, de cujas consequências para o movimento dos planetas se apercebe.

# Henri Poincaré

- Influencia o desenvolvimento da Física do seu tempo, participando ativamente nos grandes debates, propondo explicações e sugerindo novos experimentos.
- É professor excepcional. Ensina (na Sorbonne, na École Polytechnique etc) temas muito variados na vanguarda da Matemática e da Física.
- Seus cursos são quase sempre redigidos e publicados, contribuindo para aprimorar e divulgar as novas teorias de Boltzmann, Maxwell, Lorentz e outros.
- Atua frequentemente como perito científico do governo e da justiça (por exemplo, no famoso processo Dreyfus).

# Henri Poincaré

- Participa ativamente nos grandes debates filosóficos do seu tempo. Publica obras de Filosofia da Ciência que alcançam grande popularidade entre o grande público.
- É excepcional divulgador da Ciência.



# Henri Poincaré

- Nasce em Nancy em 29 de abril de 1854. Seu pai é decano da Faculdade de Medicina.
- Em 1860 nasce seu primo Raymond Poincaré, que será Primeiro Ministro e Presidente da República da França.
- Primeiro colocado no vestibular da École Polytechnique, em 1873, e da École des Mines, em 1875. Termina a graduação em 1876.
- Em 1879 trabalha como Engenheiro de Minas, obtém o doutorado em Matemática pela Universidade de Paris e torna-se professor na Universidade de Caen.

# Henri Poincaré

- Casa em 1881 com Louise Poulain d'Andecy. O casal terá quatro filhos: Jeanne, Yvonne, Henriette e Léon.
- Professor na Sorbonne, ensina Mecânica, Física Matemática e Cálculo das Probabilidades, Astronomia Matemática e Mecânica Celeste.
- Desde 1883 também é professor na École Polytechnique. Ensina Análise e, mais tarde, Astronomia Geral.
- A partir de 1902 ensina Eletricidade Teórica na École Professionnelle Supérieure des Postes et Telegraphes. Aplica seus trabalhos à telegrafia sem fio.



# Henri Poincaré

- Eleito membro da Academia das Ciências em 1887 e do Bureau des Longitudes em 1893. Nomeado Engenheiro Chefe de Minas.
- Presidente da Sociedade Francesa de Matemática em 1886 e 1900 da Sociedade Francesa de Física em 1902. Presidente do Bureau des Longitudes, três vezes.
- Juntamente com Émile Zola, Anatole France, George Clemenceau e outros intelectuais franceses, defende publicamente o capitão Alfred Dreyfus.
- Morre em Paris em 17 de julho de 1912. Em 1994 a Universidade de Nancy 1 passa a ter o seu nome.

# Henri Poincaré

Œuvres Scientifiques (Gauthier-Villars), 10 volumes:

- 1 Equações diferenciais
- 2 Funções automorfas
- 3 Integração algébrica de equações diferenciais
- 4 Funções analíticas de uma ou mais variáveis
- 5 Aritmética
- 6 Geometria algébrica, topologia algébrica
- 7 Mecânica analítica, mecânica celeste
- 8 Mecânica celeste e geodesia
- 9 Física matemática, física teórica
- 10 Física matemática, física teórica

# Henri Poincaré

A sua obra inclui muitos outros trabalhos, livros e notas de cursos: *La science et l'hypothèse*, *La valeur de la science*, *Science et méthode*, *Leçons de mécanique céleste*, *Calcul des Probabilités*, *Cours d'astronomie générale*, *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, *Dernières pensées* etc

# Equações diferenciais

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad X \in \mathbb{R}^d$$

Antes de Poincaré, a teoria das equações diferenciais se resume a:

- ‘receitas’ avulsas para resolver analiticamente certas equações e
- rudimentos de teoria local: comportamento das soluções perto de um ponto estacionário.

Poincaré dá importantes contribuições à teoria local na sua tese de doutorado, realizada sob a orientação de Hermite. Esse trabalho dará origem à Teoria dos Desenvolvimentos Assintóticos.

# Equações diferenciais

Mas a grande maioria das equações diferenciais não pode ser resolvida analiticamente... E Poincaré compreende que

- o grande objetivo deve ser o estudo do comportamento **global** das soluções;
- a expressão explícita de uma dada solução (supondo que seja possível encontrá-la) pode não ter muita utilidade para esse fim.

Por isso, ele defende que mais importante do que ‘resolver’ uma equação é descrever **qualitativamente** o comportamento das suas soluções.

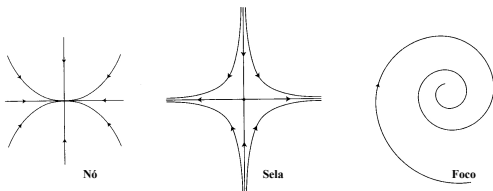
Em *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle* (1881) ele fornece diversas ferramentas para tal.

## Teorema de Poincaré-Hopf

Equações diferenciais polinomiais no plano (ou na esfera)

$$\left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (P(x, y), Q(x, y))$$

têm 3 tipos genéricos de pontos estacionários:



### Teorema

$N - S + F = 2$ , quaisquer que sejam  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$ .

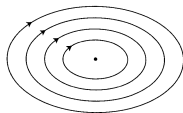
# Teorema de Poincaré-Hopf

Esse teorema será generalizado por Einz Hopf em 1926, para todo campo de vetores diferenciável numa variedade compacta.

Antes disso, Poincaré generaliza a fórmula de Euler para variedades de qualquer dimensão (Topologia Algébrica).

## Problema do centro

Poincaré está interessado em outro tipo de ponto estacionário, que é raro mas importante para sistemas com conservação da energia: o *centro*.



### Problema

Quais campos de vetores (conservativos) admitem centros?

O teorema de Poincaré-Lyapunov dá uma condição necessária e suficiente, para campos de vetores analíticos.



## Teorema de Poincaré-Bendixson

$$\left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (P(x, y), Q(x, y))$$

### Teorema

Seja  $\omega(x, y)$  o conjunto de acumulação, quanto o tempo vai para  $+\infty$ , da solução que passa por  $(x, y)$ . Então,

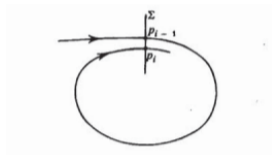
- 1  $\omega(x, y)$  = um ponto de equilíbrio
- 2  $\omega(x, y)$  = uma solução periódica (ciclo limite)
- 3  $\omega(x, y)$  = um grafo

Generalizado por Ivar Otto Bendixson para campos de vetores diferenciáveis do plano ou da esfera.

## Teorema de Poincaré-Bendixson

A demonstração é uma combinação de dois ingredientes:

- o Teorema da Curva Fechada de Jordan
- a noção de ‘transformação de Poincaré’ de uma equação diferencial:



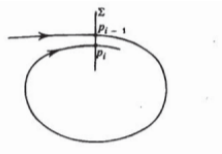
### 16º problema de Hilbert

Qual é o número máximo de ciclos limite de um campo de vetores polinomial de grau  $d \geq 2$ ?

## Teorema de Poincaré-Bendixson

A demonstração é uma combinação de dois ingredientes:

- o Teorema da Curva Fechada de Jordan
- a noção de ‘transformação de Poincaré’ de uma equação diferencial:



### 16º problema de Hilbert

Qual é o número máximo de ciclos limite de um campo de vetores polinomial de grau  $d \geq 2$ ?

## Estabilidade do Sistema Solar

Newton prova que, **se ignorarmos a interação gravitacional entre os planetas**, a Lei de Gravitação implica que os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol num dos focos, tal como proposto por Kepler.

Laplace, Leverrier, Adams e outros grandes astrônomos obtêm soluções cada mais precisas, incorporando sucessivamente as interações entre os maiores planetas (Júpiter, Saturno, Urano). Assim é descoberto Netuno, por Johann Galle.

Isto conduz a tentar obter as soluções do problema na forma de expansão em séries trigonométricas ('séries de Lindstedt'). É tomado como fato que estas séries convergem.

## Estabilidade do Sistema Solar

Newton prova que, **se ignorarmos a interação gravitacional entre os planetas**, a Lei de Gravitação implica que os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol num dos focos, tal como proposto por Kepler.

Laplace, Leverrier, Adams e outros grandes astrônomos obtêm soluções cada mais precisas, incorporando sucessivamente as interações entre os maiores planetas (Júpiter, Saturno, Urano). Assim é descoberto Netuno, por Johann Galle.

Isto conduz a tentar obter as soluções do problema na forma de expansão em séries trigonométricas ('séries de Lindstedt'). É tomado como fato que estas séries convergem.

## Estabilidade do Sistema Solar

Newton prova que, **se ignorarmos a interação gravitacional entre os planetas**, a Lei de Gravitação implica que os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol num dos focos, tal como proposto por Kepler.

Laplace, Leverrier, Adams e outros grandes astrônomos obtêm soluções cada mais precisas, incorporando sucessivamente as interações entre os maiores planetas (Júpiter, Saturno, Urano). Assim é descoberto Netuno, por Johann Galle.

Isto conduz a tentar obter as soluções do problema na forma de expansão em séries trigonométricas ('séries de Lindstedt'). É tomado como fato que estas séries convergem.

# Estabilidade do Sistema Solar

## Problema

O Sistema Solar é estável?

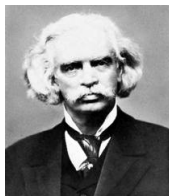
Newton achava que não: ele acreditava que o funcionamento do Sistema Solar requer intervenção regular de Deus.

Na época de Poincaré esse problema estava ligado à questão da convergência das séries de Linstedt. Ele viria a se estender ao longo do século 20 e as respostas ainda são parciais:

- teoria de Kolmogorov, Arnold, Moser (1954-1962)
- simulações numéricas de Laskar (1990).

## Prêmio do Rei Oskar II

Em 1885, o rei Oskar II da Suécia e Noruega anuncia um prêmio para 'uma descoberta importante no domínio da análise matemática superior'. A entrega será em 21 de abril de 1889, aniversário de 60 anos do rei.



Por trás da proposta está o matemático sueco Magnus Gösta Mittag-Leffler, que preside o júri. Os outros membros do júri são Karl Weierstrass e Charles Hermite.



## Prêmio do Rei Oskar II

O júri seleciona quatro temas. Instado a participar, Poincaré escolhe o *estudo do comportamento de um sistema formado por um número qualquer de corpos que se atraem mutuamente segundo a lei de Newton*, incluindo o problema da estabilidade do Sistema Solar.

Mesmo sem resolver o problema (de fato, ele 'só' trata algumas questões do chamado *problema restrito dos três corpos*), o trabalho de Poincaré ganha facilmente o prêmio de KR\$ 2.500.

O artigo com os seus resultados, intitulado *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* vai ser publicado na revista *Acta Mathematica*, dirigida por Mittag-Leffler.

## Prêmio do Rei Oskar II

O júri seleciona quatro temas. Instado a participar, Poincaré escolhe o *estudo do comportamento de um sistema formado por um número qualquer de corpos que se atraem mutuamente segundo a lei de Newton*, incluindo o problema da estabilidade do Sistema Solar.

Mesmo sem resolver o problema (de fato, ele 'só' trata algumas questões do chamado *problema restrito dos três corpos*), o trabalho de Poincaré ganha facilmente o prêmio de KR\$ 2.500.

O artigo com os seus resultados, intitulado *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* vai ser publicado na revista *Acta Mathematica*, dirigida por Mittag-Leffler.

## Prêmio do Rei Oskar II

O júri seleciona quatro temas. Instado a participar, Poincaré escolhe o *estudo do comportamento de um sistema formado por um número qualquer de corpos que se atraem mutuamente segundo a lei de Newton*, incluindo o problema da estabilidade do Sistema Solar.

Mesmo sem resolver o problema (de fato, ele 'só' trata algumas questões do chamado *problema restrito dos três corpos*), o trabalho de Poincaré ganha facilmente o prêmio de KR\$ 2.500.

O artigo com os seus resultados, intitulado *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* vai ser publicado na revista *Acta Mathematica*, dirigida por Mittag-Leffler.

## Prêmio do Rei Oskar II

Mas... ao final da revisão o jovem Lars Edvard Phragmén descobre um erro no artigo! Poincaré confirma que o erro é sério e compromete boa parte do trabalho.

Mittag-Leffler fica muito preocupado. A sua própria reputação, que ele tanto preza, está em risco...



Para piorar a situação, Weierstrass faz questão que o erro seja mencionado no relatório final do júri.

## Prêmio do Rei Oskar II

Mittag-Leffler parte para recuperar (quase) todas as cópias da Acta Mathematica que já tinham sido distribuídas e informa Poincaré de que ele terá que pagar a reimpressão.

Sem questionar, Poincaré paga Kr\$ 3.585 (1 mil coroas mais do que o prêmio!). A edição corrigida é impressa e divulgada.

O idoso Weierstrass não encontra a ocasião para escrever o relatório final do júri e Mittag-Leffler 'esquece' de fazê-lo. Poincaré recebe o prêmio.

## Prêmio do Rei Oskar II

Mittag-Leffler parte para recuperar (quase) todas as cópias da Acta Mathematica que já tinham sido distribuídas e informa Poincaré de que ele terá que pagar a reimpressão.

Sem questionar, Poincaré paga Kr\$ 3.585 (1 mil coroas mais do que o prêmio!). A edição corrigida é impressa e divulgada.

O idoso Weierstrass não encontra a ocasião para escrever o relatório final do júri e Mittag-Leffler 'esquece' de fazê-lo. Poincaré recebe o prêmio.

## Prêmio do Rei Oskar II

Mittag-Leffler parte para recuperar (quase) todas as cópias da Acta Mathematica que já tinham sido distribuídas e informa Poincaré de que ele terá que pagar a reimpressão.

Sem questionar, Poincaré paga Kr\$ 3.585 (1 mil coroas mais do que o prêmio!). A edição corrigida é impressa e divulgada.

O idoso Weierstrass não encontra a ocasião para escrever o relatório final do júri e Mittag-Leffler 'esquece' de fazê-lo. Poincaré recebe o prêmio.

## Méthodes nouvelles

O artigo de Poincaré virá a dar origem à obra em 3 volumes *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, publicada entre 1892 e 1899.

Poincaré confirma que as séries de Lindstedt são **divergentes**, em geral, mas também explica que nem por isso elas deixam de ser úteis. O problema da estabilidade continua aberto.

As *Méthodes nouvelles* contêm muitos outros avanços que vão incorporar a nova disciplina de Sistemas Dinâmicos. E, ao final das contas, o erro conduz Poincaré a descobrir o fenômeno chamado *caos determinístico*.



## Méthodes nouvelles

O artigo de Poincaré virá a dar origem à obra em 3 volumes *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, publicada entre 1892 e 1899.

Poincaré confirma que as séries de Lindstedt são **divergentes**, em geral, mas também explica que nem por isso elas deixam de ser úteis. O problema da estabilidade continua aberto.

*As Méthodes nouvelles* contêm muitos outros avanços que vão incorporar a nova disciplina de Sistemas Dinâmicos. E, ao final das contas, o erro conduz Poincaré a descobrir o fenômeno chamado *caos determinístico*.

## Méthodes nouvelles

O artigo de Poincaré virá a dar origem à obra em 3 volumes *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, publicada entre 1892 e 1899.

Poincaré confirma que as séries de Lindstedt são **divergentes**, em geral, mas também explica que nem por isso elas deixam de ser úteis. O problema da estabilidade continua aberto.

As *Méthodes nouvelles* contêm muitos outros avanços que vão incorporar a nova disciplina de Sistemas Dinâmicos. E, ao final das contas, o erro conduz Poincaré a descobrir o fenômeno chamado *caos determinístico*.

## Para saber mais



Veja também

<http://www.impa.br/viana/out/Poincare2012.pdf>