

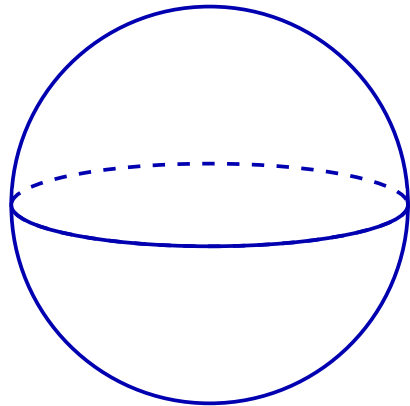
Geometria de Superfícies Planas

Marcelo Viana

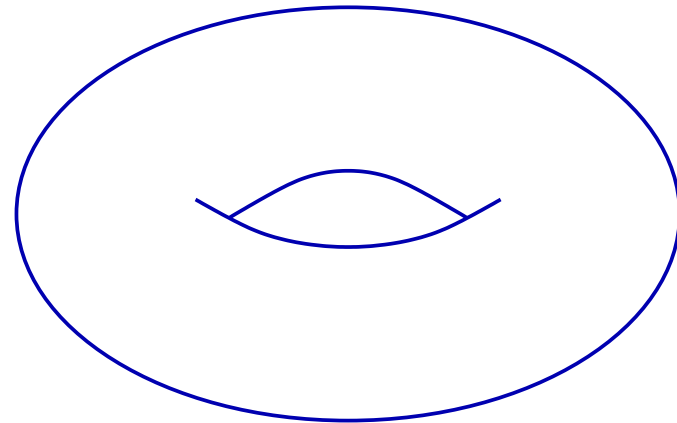
IMPA - Rio de Janeiro

Algumas superfícies (não planas)

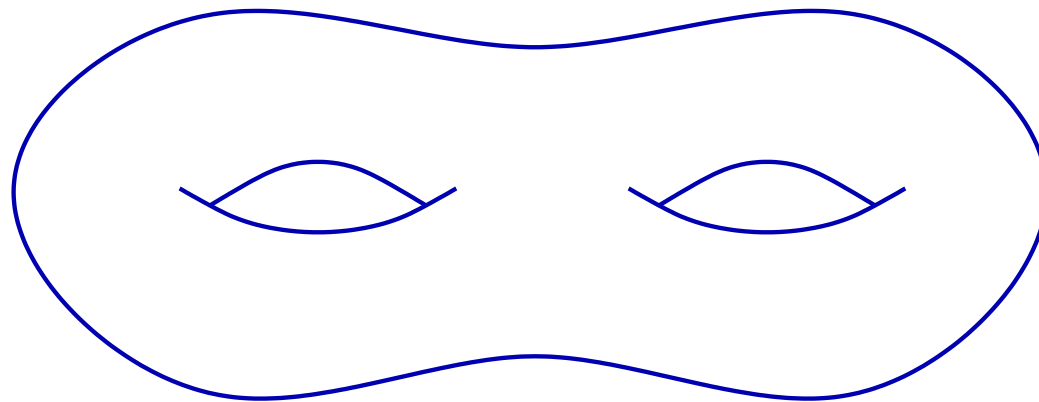
Esfera ($g = 0$)



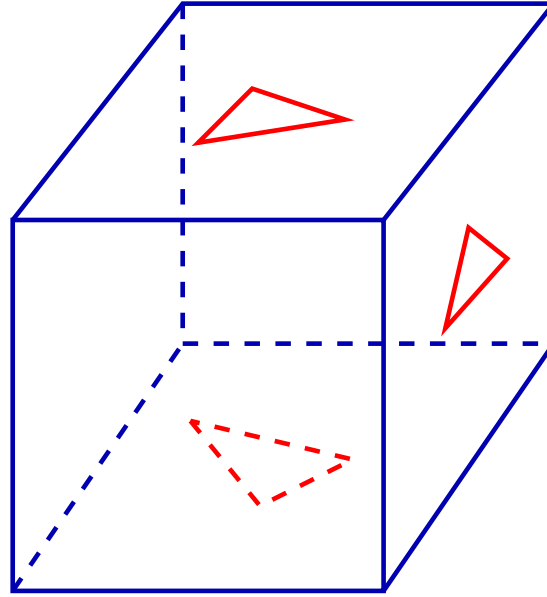
Toro ($g = 1$)



Bitoro ($g = 2$)



Uma "esfera" plana: o cubo

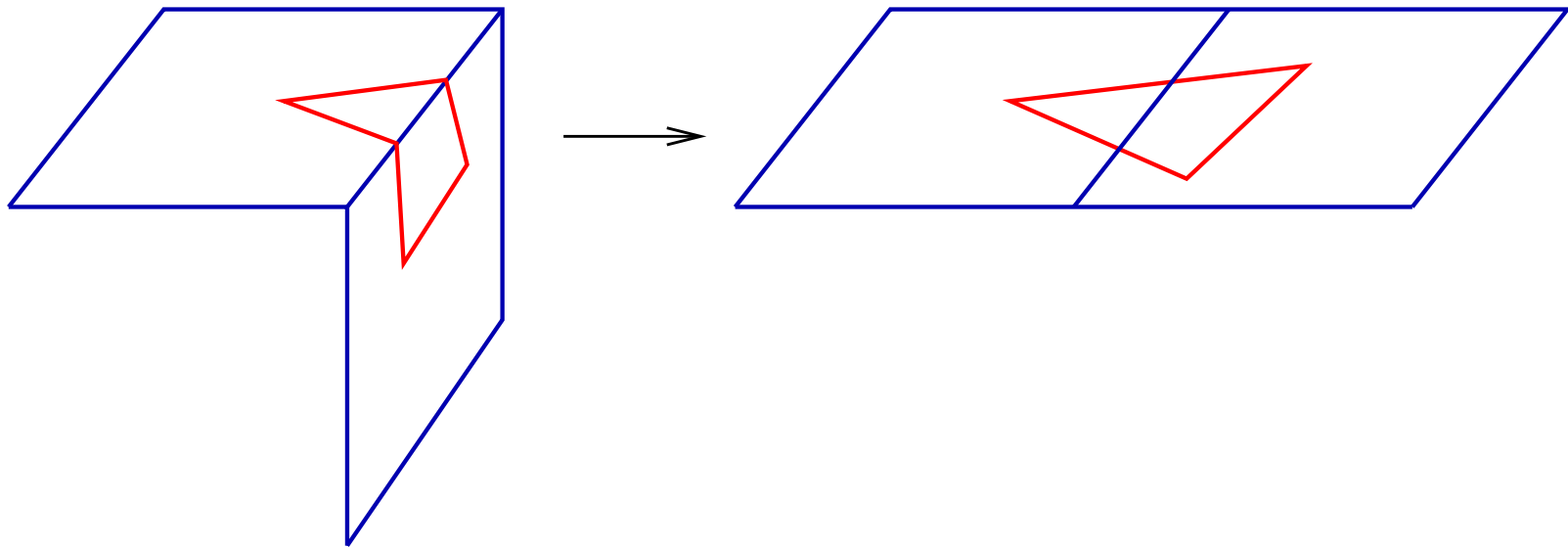


Superfície plana: Os ângulos internos de qualquer triângulo na superfície somam 180 graus.

Qualquer triângulo mesmo ?...

E nas arestas ?

Toda a aresta pode ser "desdobrada" (ou "planificada") sem deformar a superfície:

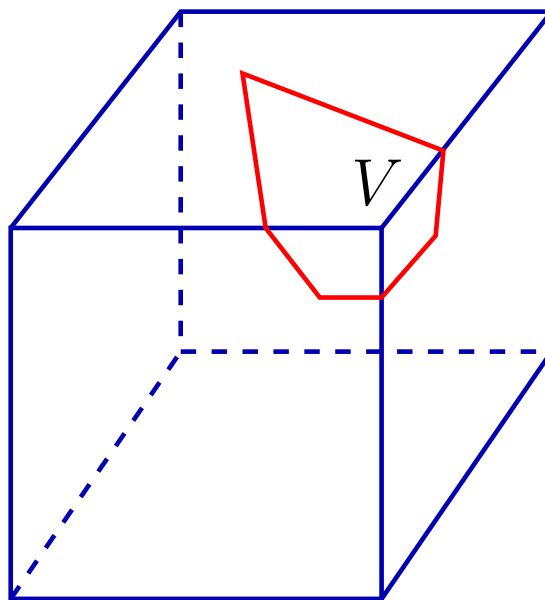


As geodésicas ("caminhos mais curtos") correspondem a segmentos de reta na versão desdobrada.

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.

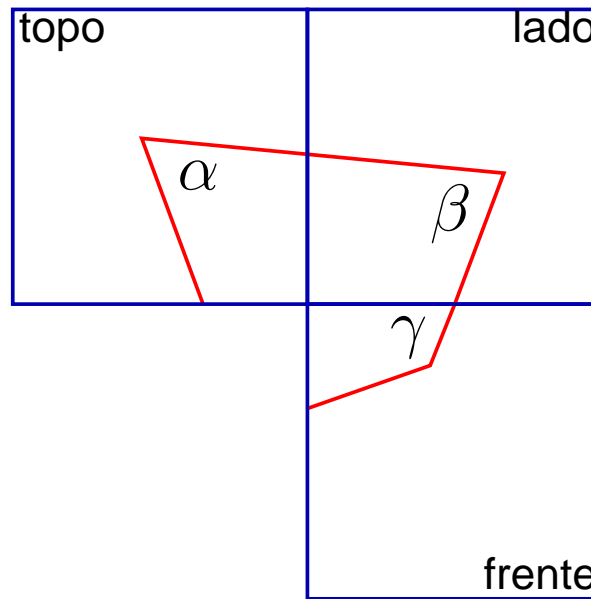
E nos vértices ?

Definimos $\text{ang}(V)$ = soma dos ângulos das faces adjacentes a V . No caso do cubo $\text{ang}(V) = 3\pi/2$.

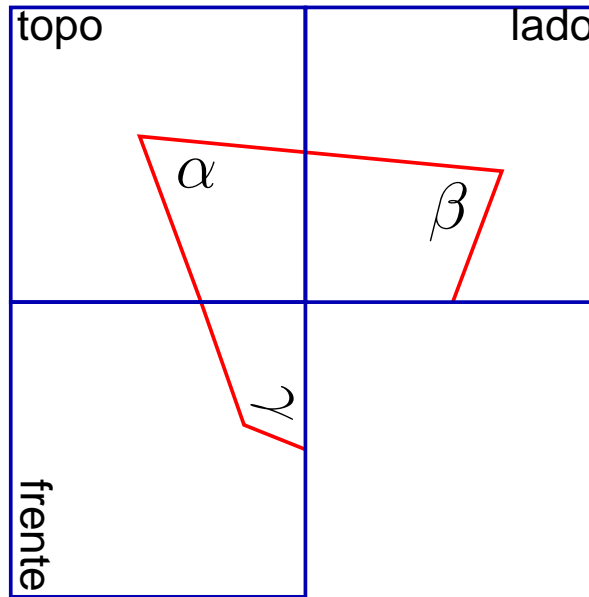


Sempre que $\text{ang}(V) \neq 2\pi$, o vértice não pode ser “planificado” sem deformar ou rasgar a superfície.

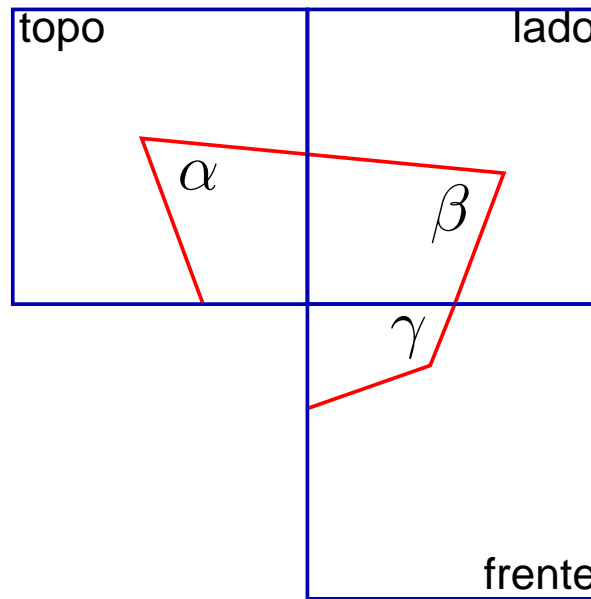
Triângulos num vértice



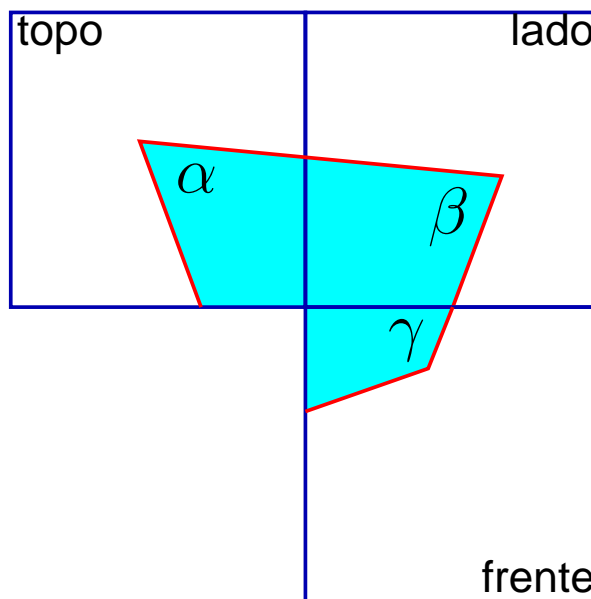
Triângulos num vértice



Triângulos num vértice



Soma dos ângulos internos



A soma dos ângulos internos deste hexágono plano é

$$\alpha + \beta + \gamma + \text{ang}(V) + \pi = 4\pi,$$

logo a soma dos ângulos internos do triângulo no cubo é

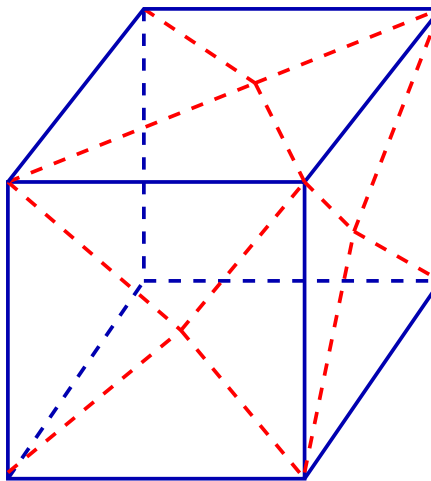
$$\alpha + \beta + \gamma = 3\pi - \text{ang}(V) = 3\pi/2. \quad \text{Qual é a regra geral ?}$$

Característica de Euler

A característica de Euler de uma superfície é definida por

$$\chi = \text{faces} - \text{arestas} + \text{vértices}$$

para uma triangulação qualquer da superfície:



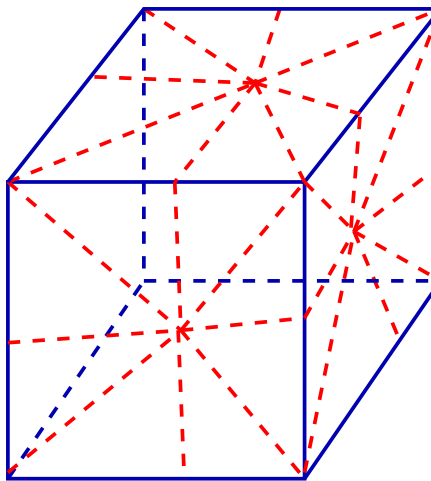
$$\chi(\text{cubo}) = 24 - 36 + 14 = 2$$

Característica de Euler

A característica de Euler de uma superfície é definida por

$$\chi = \text{faces} - \text{arestas} + \text{vértices}$$

para uma triangulação qualquer da superfície:



Ela não depende da escolha da triangulação:

$$\chi(\text{cubo}) = 48 - 72 + 26 = 2$$

Característica de Euler

A característica de Euler de qualquer superfície (orientável) é sempre um inteiro par menor ou igual a 2.

Escrevemos $\chi = 2 - 2g$, onde g é chamado o **gênero** da superfície.

Característica de Euler

A característica de Euler de qualquer superfície (orientável) é sempre um inteiro par menor ou igual a 2.

Escrevemos $\chi = 2 - 2g$, onde g é chamado o **gênero** da superfície.

A característica de Euler é um invariante topológico, isto é, ela não muda se deformamos a superfície (sem “rasgar”).

Qual é a característica de Euler da faixa de Möbius ?

Teorema de Gauss-Bonnet

Numa superfície diferenciável, a curvatura gaussiana total é igual a $2\pi\mathcal{X}$,
onde $\mathcal{X} = 2 - 2g$ é a característica de Euler da superfície.

Teorema de Gauss-Bonnet

Numa superfície diferenciável, a curvatura gaussiana total é igual a $2\pi\mathcal{X}$, onde $\mathcal{X} = 2 - 2g$ é a característica de Euler da superfície.

Versão para superfícies planas:

A soma $\sum_{i=1}^N (2\pi - \text{ang}(V_i))$ é igual a $2\pi\mathcal{X}$, onde V_1, \dots, V_N são os vértices da superfície.

Teorema de Gauss-Bonnet

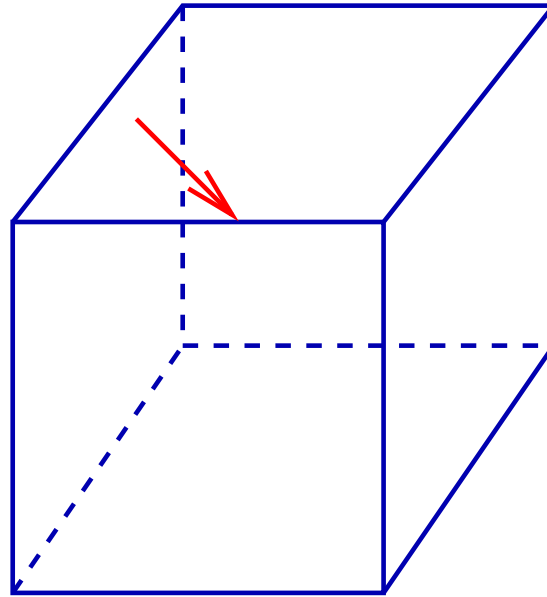
Numa superfície diferenciável, a curvatura gaussiana total é igual a $2\pi\mathcal{X}$, onde $\mathcal{X} = 2 - 2g$ é a característica de Euler da superfície.

Versão para superfícies planas:

A soma $\sum_{i=1}^N (2\pi - \text{ang}(V_i))$ é igual a $2\pi\mathcal{X}$, onde V_1, \dots, V_N são os vértices da superfície.

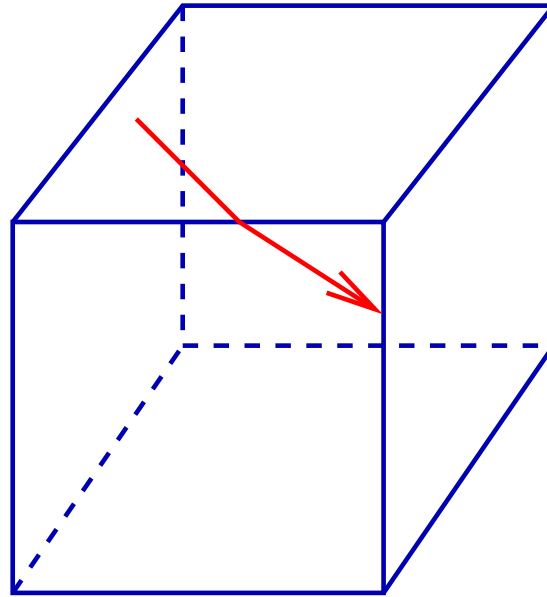
Superfície plana: A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180 graus, exceto num número finito de pontos, os seus vértices, onde está concentrada toda a curvatura da superfície.

Passeios geodésicos



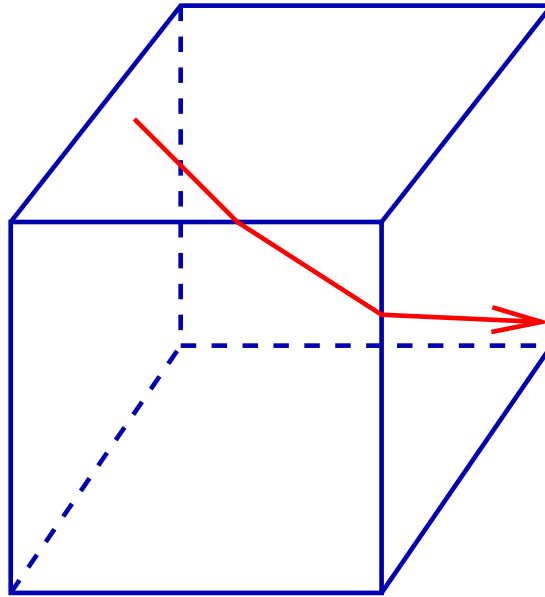
Consideremos linhas "retas" (geodésicas) com uma direção fixada, a partir pontos da superfície.

Passeios geodésicos



Consideremos linhas "retas" (geodésicas) com uma direção fixada, a partir pontos da superfície.

Passeios geodésicos



Queremos entender o comportamento das geodésicas, o modo como se “enroscam” na superfície. Por exemplo:

- Quando é que as geodésicas são fechadas ?
- Quando é que são densas na superfície ?

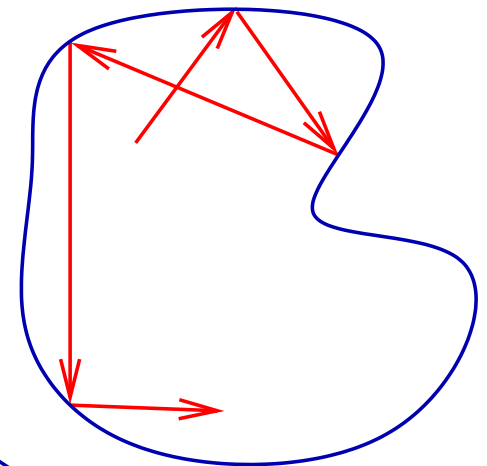
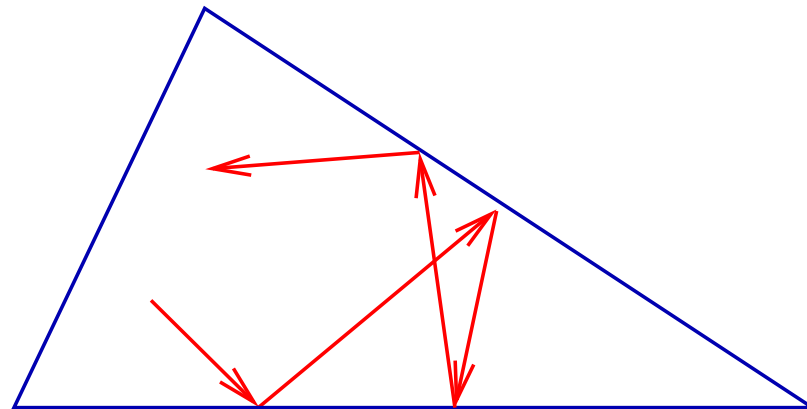
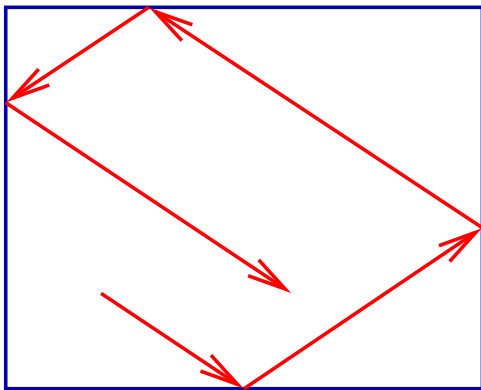
Motivação

O fluxo geodésico em superfícies planas se relaciona com:

- Transformações de intercâmbio de intervalo
- Dinâmica de folheações mensuráveis
- Expoentes de Lyapunov de cociclos lineares
- Espaços e fluxos de Teichmüller
- Espaços de módulos de estruturas complexas
- Diferenciais quadráticas
- Expansões em frações contínuas
- Bilhares em mesas poligonais
- Operadores de renormalização
- ...

Bilhares

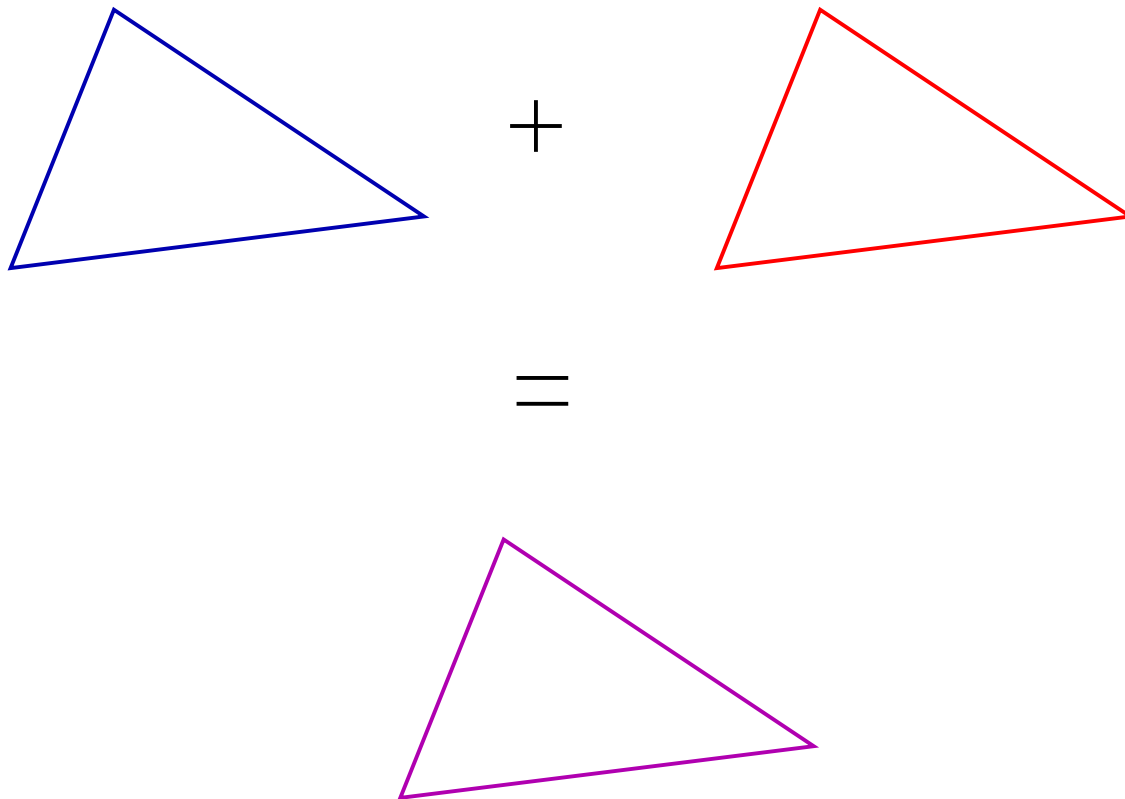
Modelam movimento de partículas numa região do plano, com velocidade constante e choques elásticos no bordo:



Vamos tratar apenas de mesas poligonais, cujos bilhares se relacionam diretamente com fluxos geodésicos em superfícies planas.

Esferas planas

Colando 2 triângulos idênticos ao longo do bordo obtemos uma superfície plana com 3 vértices:

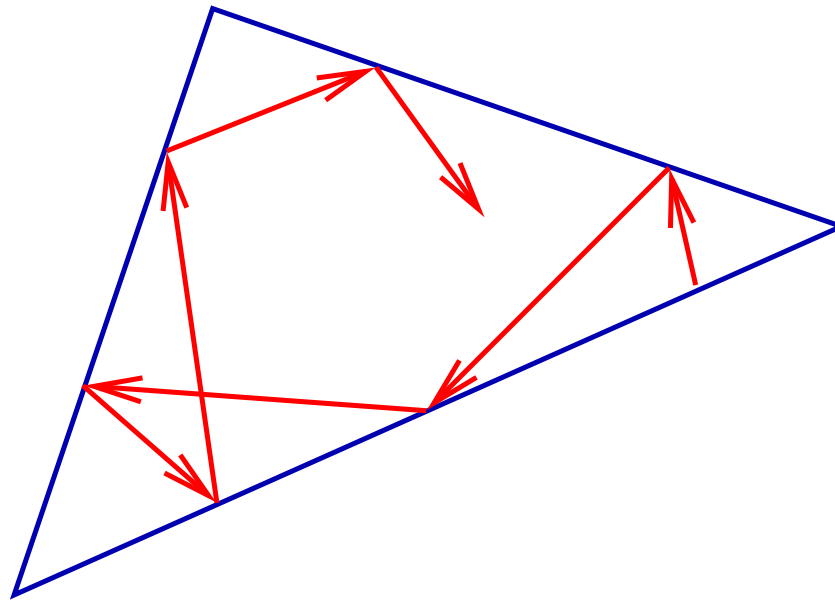


Qual é a característica de Euler desta superfície ?

Bilhares em mesas triangulares

Bilhar numa mesa triangular \Leftrightarrow

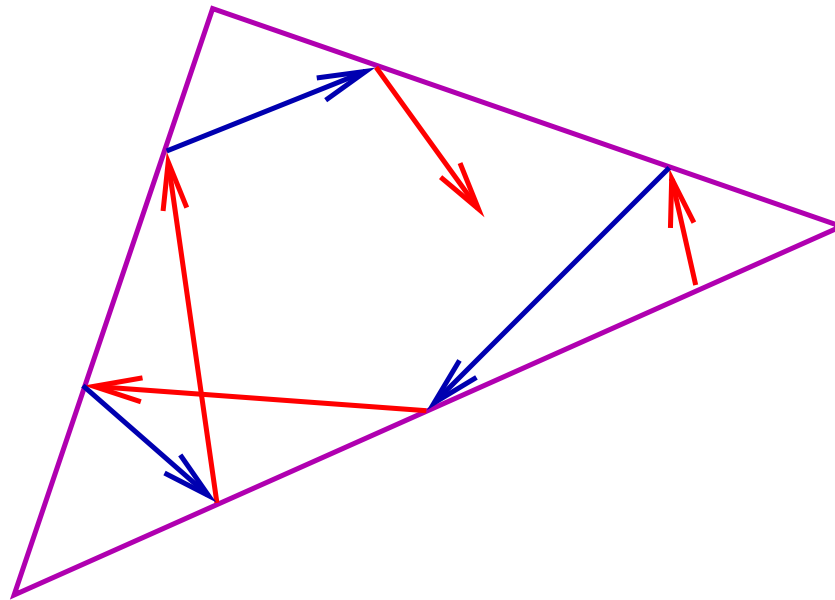
\Leftrightarrow fluxo geodésico numa esfera plana com três vértices.



Mesas triangulares

Bilhar numa mesa triangular \Leftrightarrow

\Leftrightarrow fluxo geodésico numa esfera plana com três vértices.



Um problema em aberto

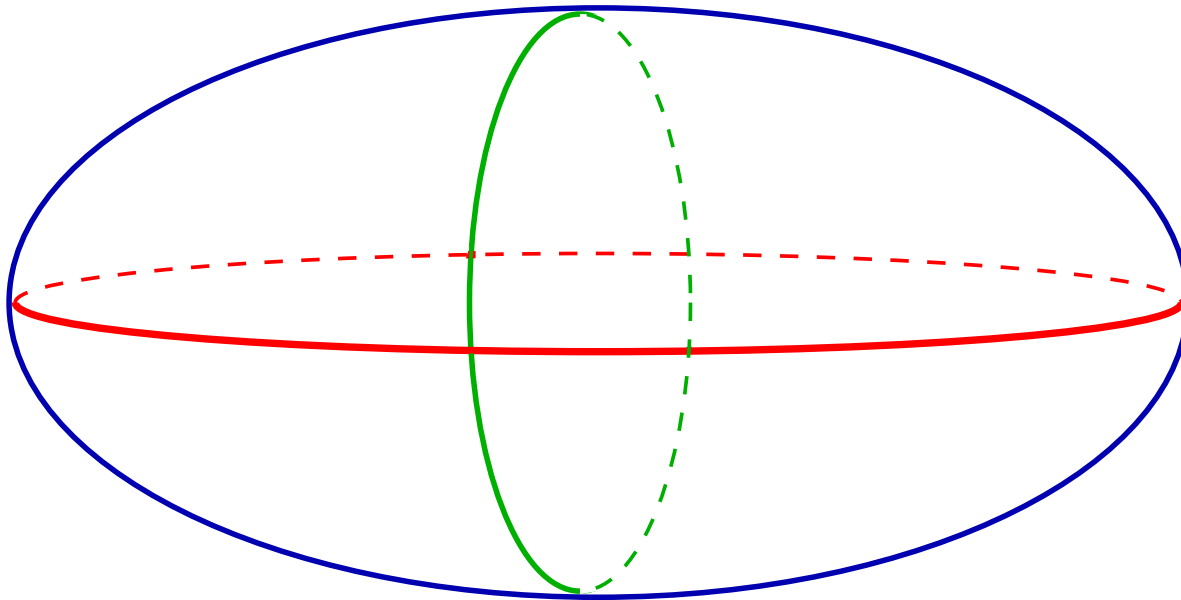
Todo bilhar numa mesa triangular tem alguma trajetória fechada ?

Em outras palavras, numa esfera plana com três vértices sempre existe alguma geodésica fechada ?

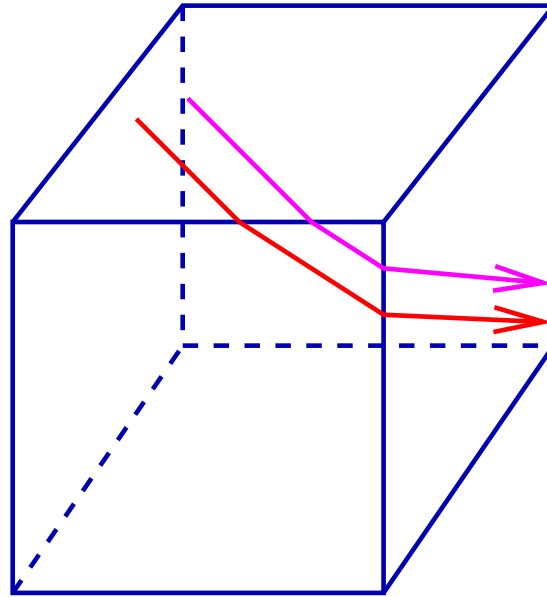
Quando os ângulos são agudos, a resposta é afirmativa .

Esferas diferenciáveis

Para esferas diferenciáveis com curvatura positiva sempre existem pelo menos três geodésicas fechadas:

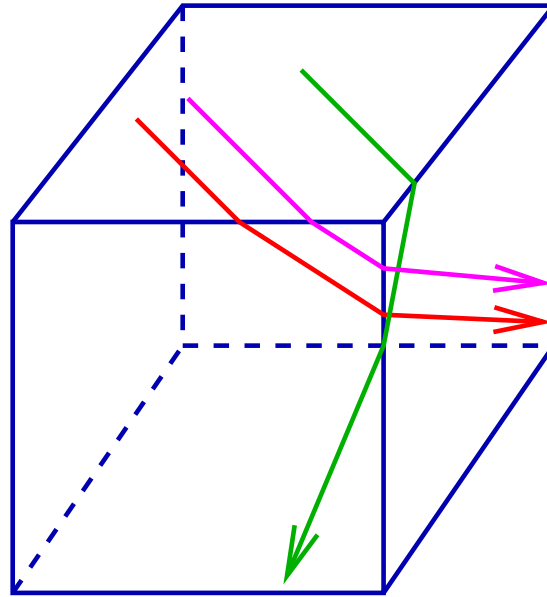


Passeios geodésicos



À primeira vista, o comportamento não depende muito do ponto de partida: as geodésicas permanecem paralelas.

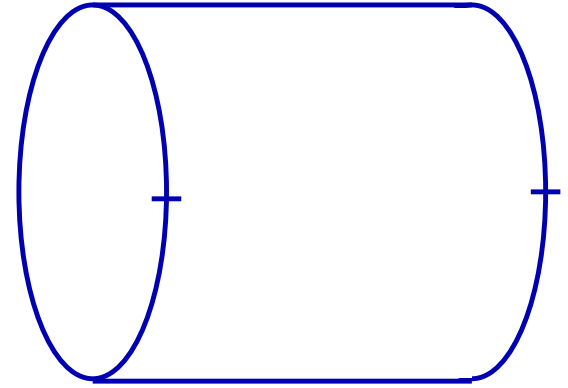
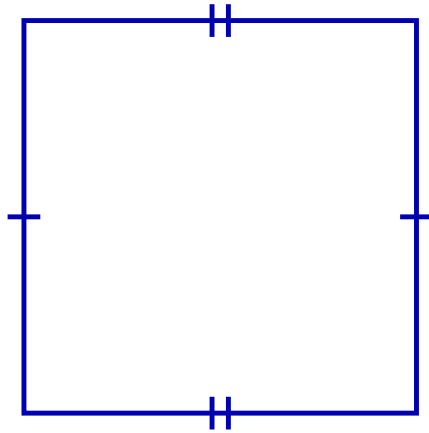
Passeios geodésicos



À primeira vista, o comportamento não depende muito do ponto de partida: as geodésicas permanecem paralelas.

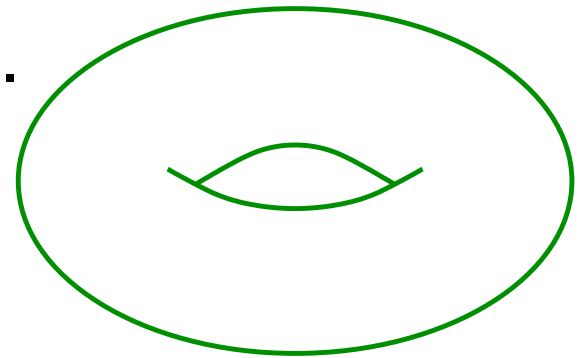
Mas a presença de vértices pode tornar a situação muito mais complicada!

O toro plano

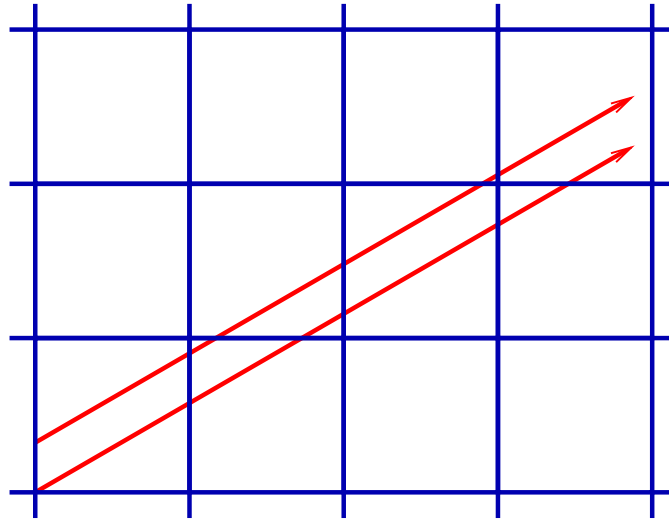


Um único vértice V , com $\text{ang}(V) = 2\pi$.

O toro plano não mergulha em \mathbb{R}^3 .

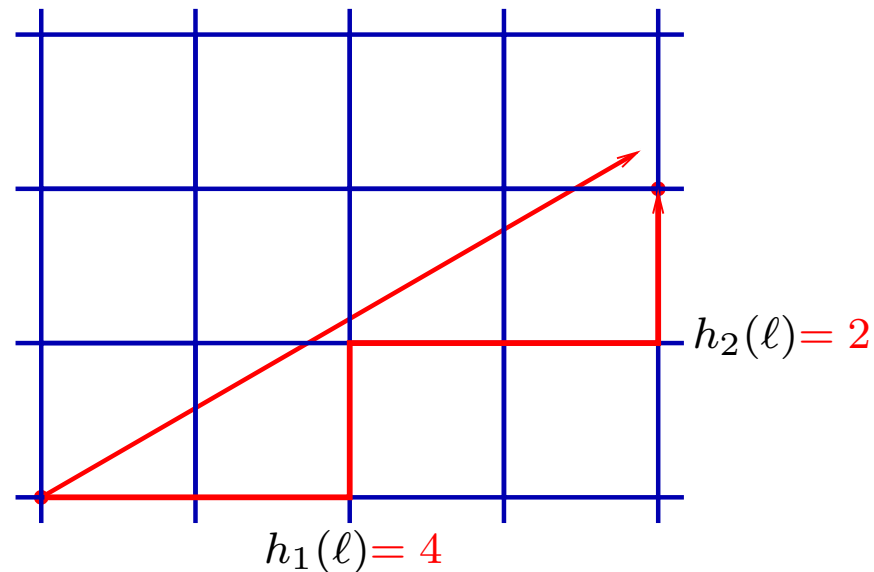


Passeios geodésicos no toro



Geodésicas numa dada direção permanecem paralelas.

Passeios geodésicos no toro

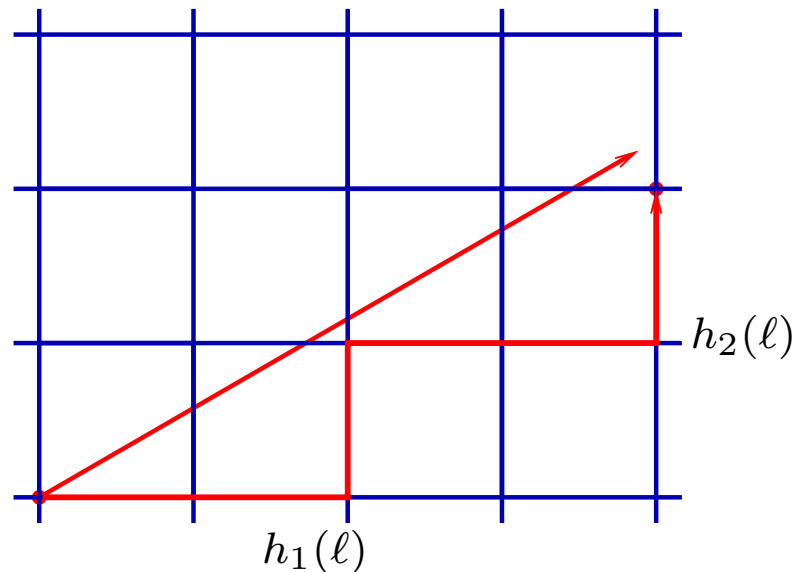


O seu comportamento pode ser descrito usando o vetor

$$(v_1, v_2) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} (h_1(\ell), h_2(\ell)),$$

onde $h_1(\ell), h_2(\ell) =$ “números de voltas” de um segmento de comprimento ℓ em torno do toro, na horizontal e na vertical.

Passeios geodésicos no toro

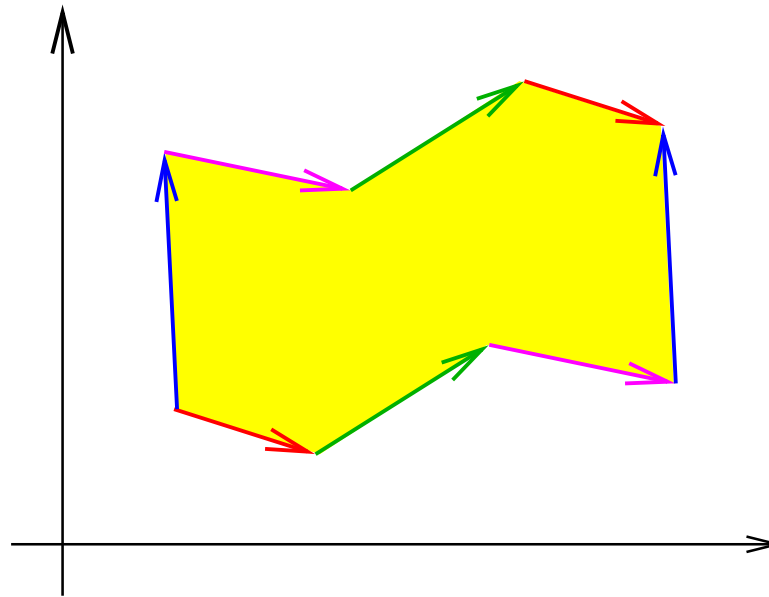


Teorema.

1. Se v_1/v_2 é racional então toda a geodésica é fechada.
2. Se v_1/v_2 é irracional então toda a geodésica é densa e, mesmo, uniformemente distribuída (o fluxo é unicamente ergódico).

Uma construção mais geral

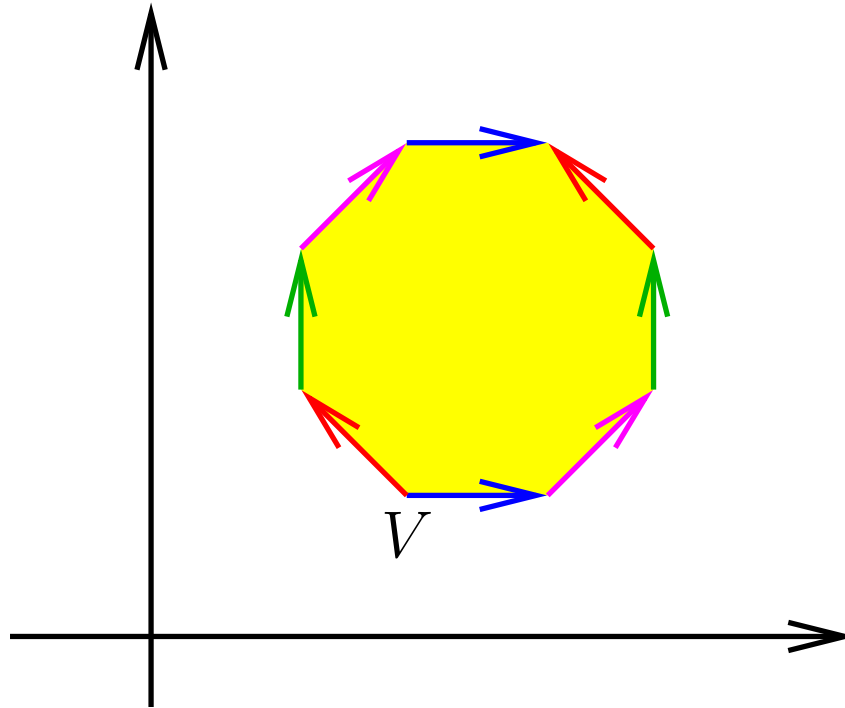
Consideremos qualquer polígono no plano limitado por um certo número de pares de segmentos (não-adjacentes) paralelos e com o mesmo comprimento.



Identificando os segmentos em cada par obtemos uma superfície plana.

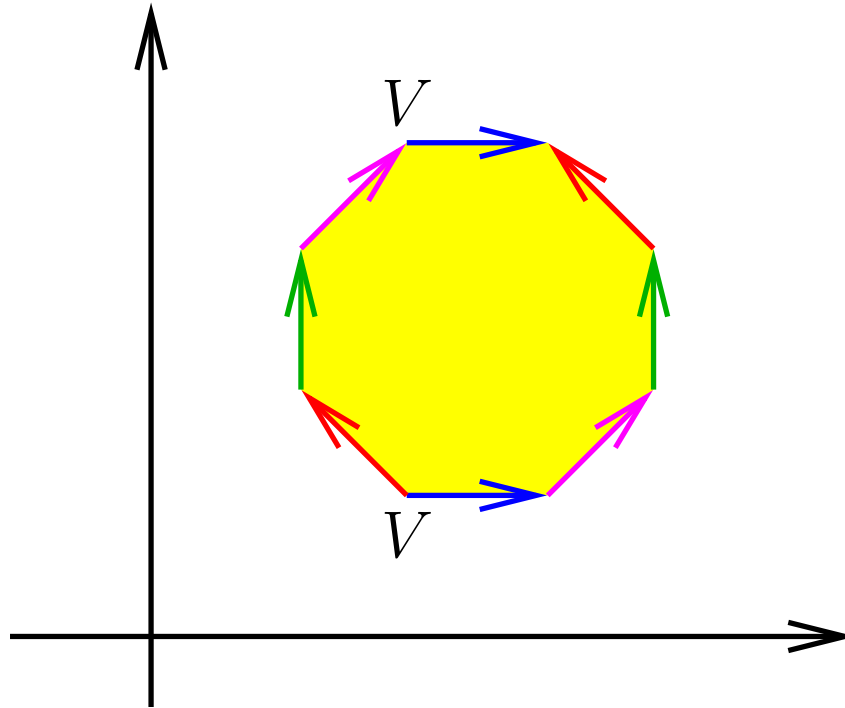
Um exemplo

Consideremos o octógono regular:



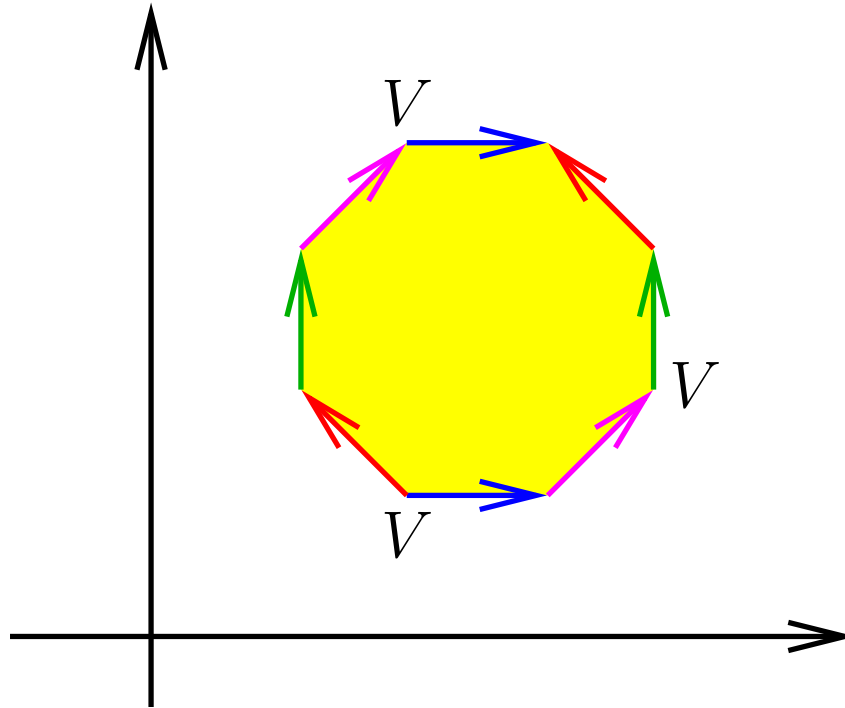
Um exemplo

Consideremos o octógono regular:



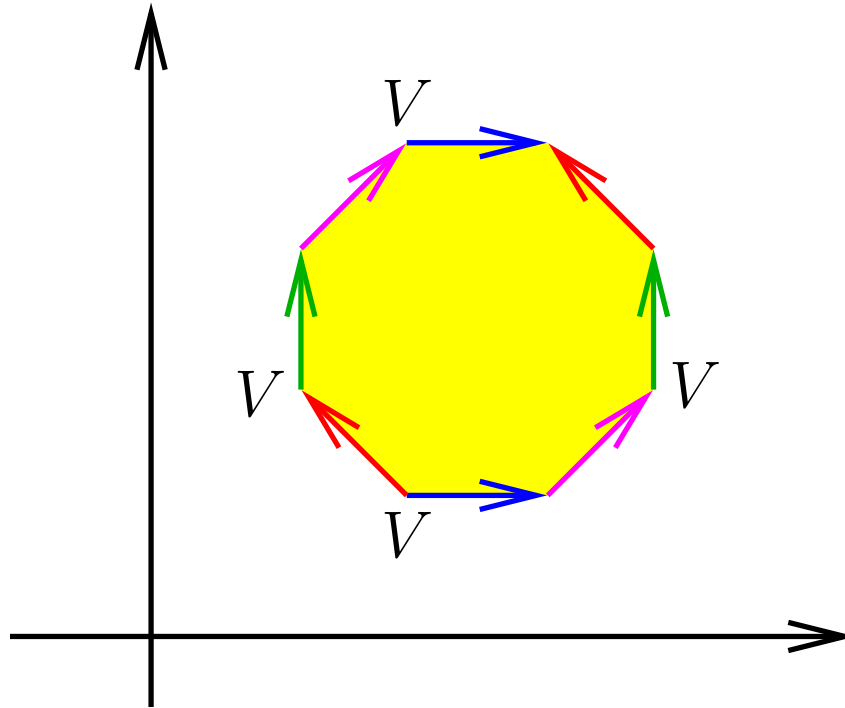
Um exemplo

Consideremos o octógono regular:



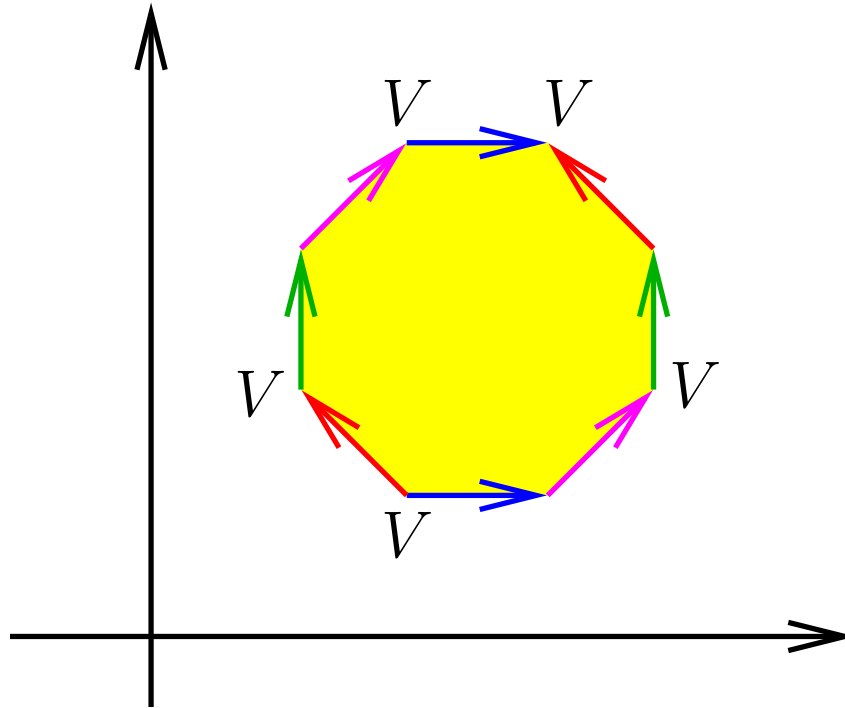
Um exemplo

Consideremos o octógono regular:



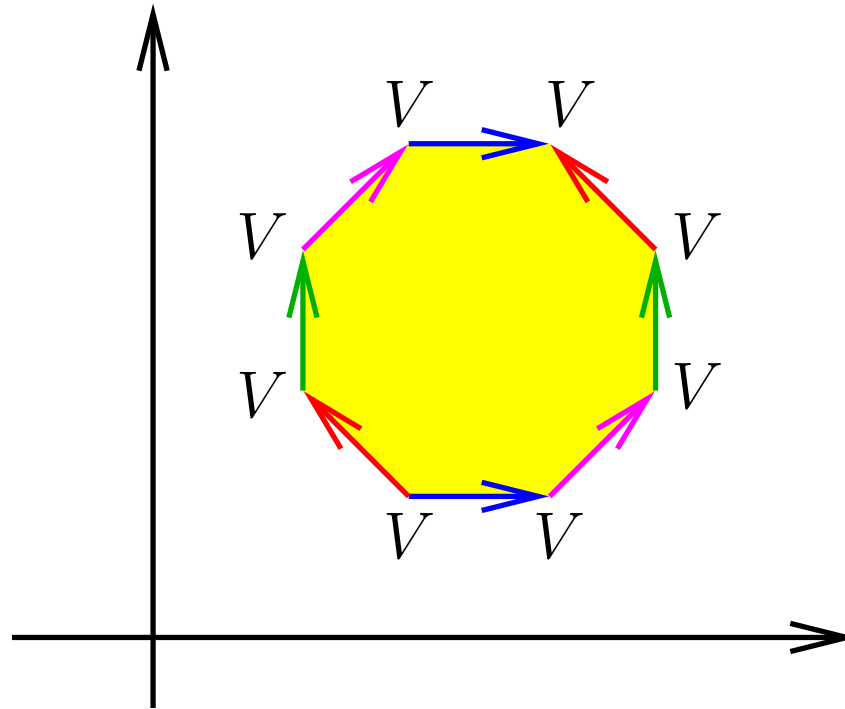
Um exemplo

Consideremos o octógono regular:



Um exemplo

Consideremos o octógono regular:

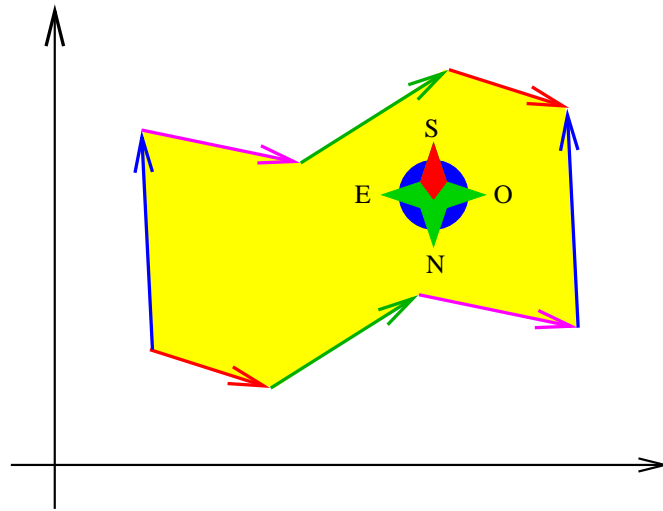


A superfície plana tem um só vértice V , com $\text{ang}(V) = 6\pi$.
Logo (por Gauss-Bonnet) tem gênero $g = 2$: bitoro plano.

Como pode o ângulo ser maior que 2π ??

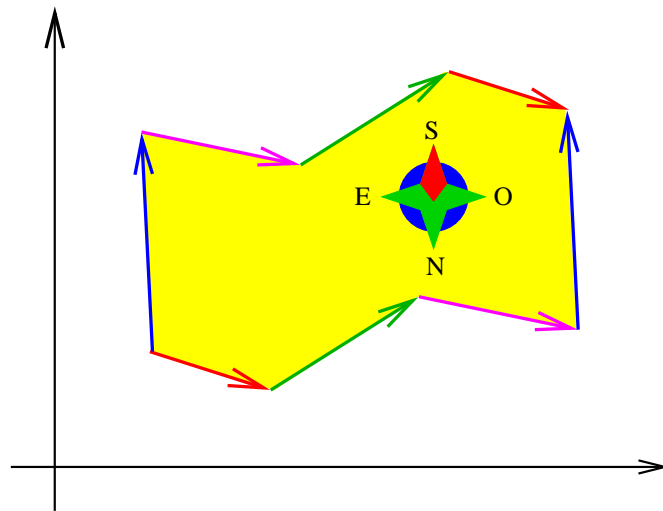
Superfícies de translação

As superfícies planas obtidas a partir de polígonos têm estrutura adicional: "rosa dos ventos" definida globalmente.

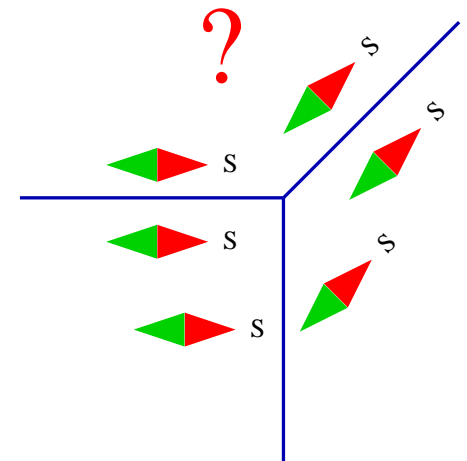


Superfícies de translação

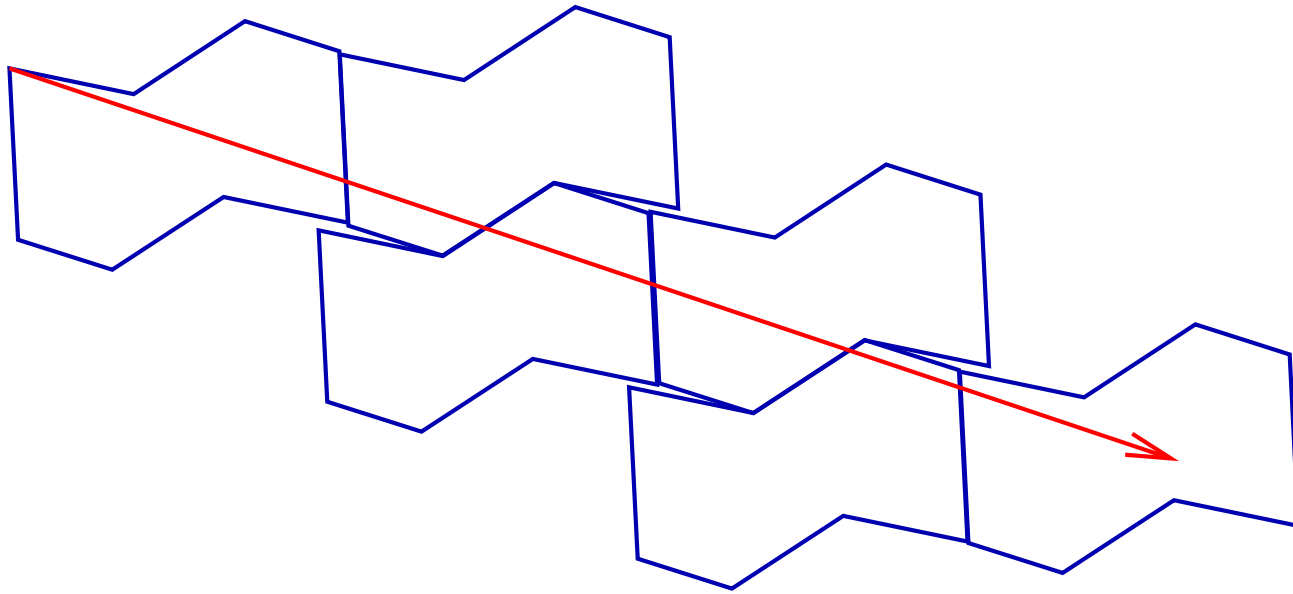
As superfícies planas obtidas a partir de polígonos têm estrutura adicional: "rosa dos ventos" definida globalmente.



Esse não é o caso do cubo:

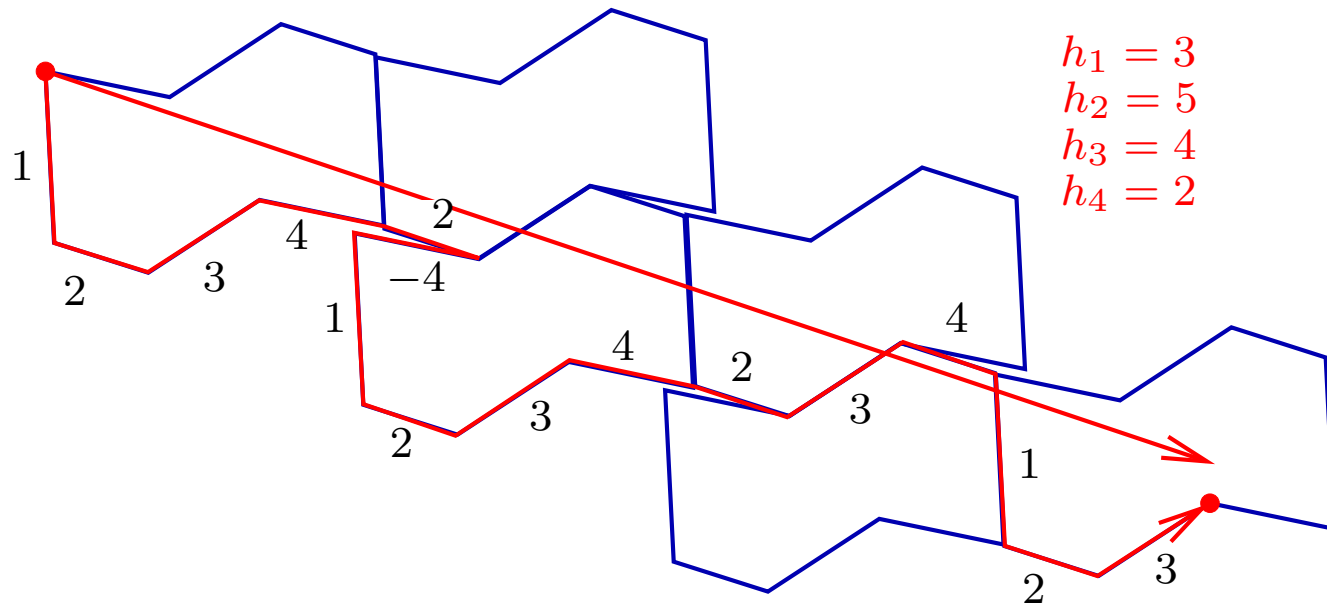


Fluxos de translação



Tal como no caso do toro, consideremos geodésicas com uma dada direção, a partir de pontos da superfície.

Fluxos de translação



A cada segmento geodésico de comprimento ℓ podemos associar um vetor de entradas inteiras

$$H(\ell) = (h_1(\ell), \dots, h_d(\ell))$$

onde $h_i(\ell)$ = “número de voltas” do segmento na direção do i ésimo lado do polígono.

Ciclos assintóticos

S. Schwartzmann (1957):

O *ciclo assintótico* de um par (superfície, direção) é o limite

$$c_1 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} H(\ell)$$

Este vetor $c_1 \in \mathbb{R}^d$ descreve o “número médio de voltas” das geodésicas em torno dos diferentes lados do polígono, por unidade de comprimento.

Ciclos assintóticos

S. Schwartzmann (1957):

O *ciclo assintótico* de um par (superfície, direção) é o limite

$$c_1 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} H(\ell)$$

Este vetor $c_1 \in \mathbb{R}^d$ descreve o “número médio de voltas” das geodésicas em torno dos diferentes lados do polígono, por unidade de comprimento.

Teorema (Kerckhoff, Masur, Smillie 1986). *Para qualquer superfície de translação e quase toda a direção, o fluxo geodésico é unicamente ergódico. Em particular, o ciclo assintótico existe e toda a geodésica é densa.*

Desvios do limite

A partir de experimentos numéricos, os matemáticos A. Zorich e M. Kontsevich conjecturaram que as geodésicas têm um comportamento qualitativo muito bem definido:

Desvios do limite

A partir de experimentos numéricos, os matemáticos A. Zorich e M. Kontsevich conjecturaram que as geodésicas têm um comportamento qualitativo muito bem definido:

Sempre existem números $1 > e_2 > \dots > e_g > 0$ e vetores c_1, c_2, \dots, c_g tais que

$$H(\ell) = c_1\ell + c_2\ell^{e_2} + \dots + c_g\ell^{e_g} + R(\ell)$$

onde o termo de resto $R(\ell)$ é limitado. Os expoentes e_2, \dots, e_g só dependem da superfície plana.

Desvios do limite

A partir de experimentos numéricos, os matemáticos A. Zorich e M. Kontsevich conjecturaram que as geodésicas têm um comportamento qualitativo muito bem definido:

Sempre existem números $1 > e_2 > \dots > e_g > 0$ e vetores c_1, c_2, \dots, c_g tais que

$$H(\ell) = c_1\ell + c_2\ell^{e_2} + \dots + c_g\ell^{e_g} + R(\ell)$$

onde o termo de resto $R(\ell)$ é limitado. Os expoentes e_2, \dots, e_g só dependem da superfície plana.

Teorema (Avila, Viana 2005). *A conjectura de Zorich e Kontsevich é verdadeira.*