NOTAS DE DINÂMICA HIPERBÓLICA

José Ferreira Alves
Eduardo Colli
IMPA - 1995

Referências:

- J. Palis / W. de Melo - "Geometric Theory of Dynamical Systems"
- M. Shub - "Global Stability of Dynamical Systems"
- J.-C. Yoccoz - Notas do curso de Trieste (1991)
- "Sistemas Dinamicos Diferenciables" - Notas nº1 del Seminario de Sistemas Dinamicos (Universidad de Santiago de Chile), 1983

Teorema de Hartman-Grobman

<u>Lema 0</u>: X, Y espaços métricos, Y completo.

$\Theta : X \times Y \to Y$ contínua tq $\exists\, 0<k<1 : d(\Theta(x,y), \Theta(x,y')) \leq k\, d(y,y')$

Então:

1) $\forall x \in X$ $\quad \begin{array}{l} \Theta_x : Y \to Y \\ \quad y \rightsquigarrow \Theta(x,y) \end{array}$ tem um único ponto fixo $\varphi(x)$.

2) $\begin{array}{l} \varphi : X \to Y \\ \quad x \rightsquigarrow \varphi(x) \end{array}$ é contínua

<u>Dem</u>: 1) Teorema do ponto fixo para contrações em espaços completos...

2) $\forall x \in X$ $\forall y \in Y$ temos

$$\begin{aligned} d(y, \varphi(x)) &= d\left(y, \lim_{n\to+\infty} \Theta_x^n(y)\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} d(y, \Theta_x^n(y)) \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \left[d(y, \Theta_x(y)) + d(\Theta_x(y), \Theta_x^2(y)) + \dots + d(\Theta_x^{n-1}(y), \Theta_x^n(y)) \right] \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \left[d(y, \Theta_x(y)) + k\, d(y, \Theta_x(y)) + \dots + k^{n-1} d(y, \Theta_x(y)) \right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} (1 + k + \dots + k^{n-1})\, d(y, \Theta_x(y)) \\ &= \frac{1}{1-k} d(y, \Theta_x(y)) \end{aligned}$$

$$\therefore\ d(\varphi(x'), \varphi(x)) \leq \frac{1}{1-k} d\left(\varphi(x'), \Theta_x(\varphi(x'))\right)$$
$$= \frac{1}{1-k} d\left(\Theta(x', \varphi(x')), \Theta(x, \varphi(x'))\right)$$

logo, φ é contínua

Teorema (Hartman - Grobman)

Sejam $f \in Dif^R(M)$ e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de M (var. de Banach sobre E).
Seja $A = Df(p)$. Então existem U viz. de p em M e V viz. de 0 em T_pM
e um homeomorfismo $h : U \to V$ tais que

$$Ah = hf$$

Dem: Trata-se de um problema local. Podemos supor que f é um difeo de $\mathbf{E}$ com $\underline{0}$ ponto fixo hiperbólico.

Lema 1: E espaço de Banach.

$L \in \mathcal{L}(E,E)$ tal que $\|L\| < a < 1$

$G \in \mathcal{L}(E,E)$ isomorfismo tq $\|G^{-1}\| < a < 1$

Então:

1) $I + L$ é isomorfismo

2) $I + G$ é isomorfismo

(Do teor. da aplicação aberta resulta trivialmente que os isomorfismos têm inversa limitada)

Dem: 1) Queremos ver que dado $y \in E$

$$(I+L)(x) = y$$

tem solução única em x.

$$(I+L)(x) = y \iff x + L(x) = y$$
$$\iff x = y - L(x)$$

O problema é equivalente a ver que

$$F : E \to E \quad \text{tem um único ponto fixo.}$$
$$x \rightsquigarrow y - L(x)$$

Consequência trivial de $\|L\| < a < 1$

2) $I+G = G(G^{-1}+I)$ resulta do caso anterior. ∎

$A = Df(0) : E \longrightarrow E$ iso. hiperbólico

$\Downarrow$

Existe decomposição invariante $E = E^s \oplus E^u$ e uma norma $\| \|$

tal que $\|A^s\| \leq a < 1$, $\|(A^u)^{-1}\| \leq a < 1$

onde $A^{s,u} = A|_{E^{s,u}} : E^{s,u} \longrightarrow E^{s,u}$.

$C_b^0(E) = \{ u \; E \longrightarrow E$ contínua, limitada $\}$

$u \in C_b^0(E)$ $\qquad \|u\| = \sup_{x \in E} \|u(x)\|$

$(C_b^0(E), \| \|)$ espaço de Banach

Lema: Existe $\varepsilon > 0$ tq se $\phi_1, \phi_2 \in C_b^0(E)$ têm const. Lipschitz menor do que ε, então $A+\phi_1$ é conjugado a $A+\phi_2$.

Dem: Queremos $h : E \to E$ homeo tq

$$(A+\phi_1)h = h(A+\phi_2)$$

$h = I + u$, $u \in C_b^0(E)$

$$(A+\phi_1)(I+u) = (I+u)(A+\phi_2)$$

$$\cancel{A+} Au + \phi_1(I+u) = \cancel{A+} \phi_2 + u(A+\phi_2)$$

$$Au - u(A+\phi_2) = \phi_2 - \phi_1(I+u)$$

(4)

Af. $\mathcal{L}: C^0_b(E) \longrightarrow C^0_b(E)$ é um isomorfismo contínuo.

$u \rightsquigarrow Au - u(A+\phi_2)$

Prova: $\bar{A}: C^0_b(E) \longrightarrow C^0_b(E)$ é isomorfismo contínuo.

$u \rightsquigarrow Au$

$$Au - u(A+\phi_2) = A\left(u - A^{-1}u(A+\phi_2)\right)$$

Basta ver que

$\mathcal{L}^*: C^0_b(E) \longrightarrow C^0_b(E)$ é isom. contínuo.

$u \rightsquigarrow u - A^{-1}u(A+\phi_2)$

$E^{s,u}$ invariantes por A^{-1}

$\Downarrow$

$C^0_b(E, E^{s,u})$ invariantes por $\mathcal{L}^*$

$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^{*s} \oplus \mathcal{L}^{*u}$ onde $\mathcal{L}^{*s,u} = \mathcal{L} \mid C^0_b(E, E^{s,u}) : C^0_b(E, E^{s,u})$ ↺

(1) Vejamos que se $\varepsilon > 0$ pequeno, então $(A+\phi_2)$ é homeomorfismo. Basta ver que dado $y \in E$ a equação $(A+\phi_2)(x) = y$ tem solução única em x variando continuamente com y.

$$(A+\phi_2)(x) = y \Leftrightarrow Ax + \phi_2(x) = y$$
$$\Leftrightarrow x = A^{-1}(y - \phi_2(x))$$

$T_y : E \longrightarrow E$, $x \rightsquigarrow A^{-1}(y - \phi_2(x))$ tem um único ponto fixo que varia continuamente com y (Lema 0)

(2) $\mathcal{L}^{*s}$ e $\mathcal{L}^{*u}$ são inversíveis:

$\mathcal{L}^{*u}: C^0_b(E, E^u) \longrightarrow C^0_b(E, E^u)$

$u \rightsquigarrow u - A^{u^{-1}}u(A+\phi_2)$

$\mathcal{L}^* = I + L$ $\quad L: C^0_b(E, E^u) \longrightarrow C^0_b(E, E^u)$

$u \rightsquigarrow -(A^u)^{-1}u(A+\phi_2)$

$\|L\| \le \|(A^u)^{-1}\| \le a < 1 \implies I + L$ inversível

↳ lema 0.

$$\mathcal{L}_0^{*s} : C_b^0(E, E^s) \longrightarrow C_b^0(E, E^s)$$
$$u \rightsquigarrow u - A^{s-1} u (A+\phi_2)$$

$$\mathcal{L}^{*s} = I + G \qquad G^{-1} : C_b^0(E,E^s) \longrightarrow C_b^0(E,E^s)$$
$$u \rightsquigarrow A^s u (A+\phi_2)^{-1}$$

$$\|G^{-1}\| \leq \|A^s\| \leq a < 1 \implies I+G \text{ isomorfismo}$$

$\therefore \mathcal{L}^* = \mathcal{L}^{*s} \oplus \mathcal{L}^{*u}$ é um isomorfismo

$\mathcal{L}^*$ limitada $\implies \mathcal{L}^{*-1}$ limitada.

$$F : C_b^0(E) \longrightarrow C_b^0(E)$$
$$u \rightsquigarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\phi_2 - \phi_1(I+u)\right)$$

$$\|F(u_1) - F(u_2)\| = \|\mathcal{L}^{-1}(-\phi_1(I+u_1) + \phi_1(I+u_2))\|$$

$$\leq \underbrace{\|\mathcal{L}^{-1}\|\,\varepsilon}_{<1 \text{ se } \varepsilon>0 \text{ pequeno}} \|u_1 - u_2\|$$

$\therefore F$ é uma contração se $\varepsilon > 0$ pequeno

$\Downarrow$

F tem um único ponto fixo u

$\Downarrow$

$$\exists^1 u \in C_b^0(E) : \quad u = \mathcal{L}^{-1}\left(\phi_2 - \phi_1(I+u)\right)$$

$$\therefore \mathcal{L}(u) = \phi_2 - \phi_1(I+u)$$

$$\therefore Au - u(A+\phi_2) = \phi_2 - \phi_1(I+u)$$

$$(A+\phi_1)(I+u) = (I+u)(A+\phi_2)$$

Analogamente podemos provar que

$$\exists^1 v \in C_S^0 \quad (I+v)(A+\phi_1) = (A+\phi_2)(I+v)$$

$$(I+u)(I+v)(A+\phi_1) = (I+u)(A+\phi_2)(I+v)$$
$$= (A+\phi_1)(I+u)(I+v)$$

$$\begin{cases} \text{i) } (I+u)(I+v) = I + \underbrace{v+u+uv}_{\in C_S^0(E)} \\ \text{ii) } I(A+\phi_1) = (A+\phi_1)I \end{cases}$$

$\Downarrow$ Unicidade em $C_S^0(E)$

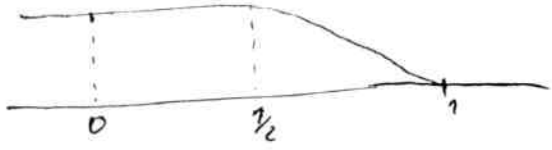
$$I = (I+u)(I+v)$$

Analogamente se vê que $I = (I+v)(I+u)$.

Lema 3. Dado $\varepsilon > 0$ existe U viz. de 0 em E e existe uma extensão de $f|_U$ da forma $A+\phi$ onde $\phi \in C_S^0(E)$ tem constante de Lipschitz limitada por ε.

Dem: Temos $f = A + \varphi$ com $\varphi(0) = 0$ e $D\varphi(0) = 0$.

$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞ tq
i) $\alpha(t) = 0 \quad t \geq 1$
ii) $\alpha(t) = 1 \quad t \leq 1$
iii) $|\alpha'(t)| < K \quad K > 2$



$$R > 0 : \quad \|D\varphi(x)\| < \varepsilon/2K \quad \forall x \in B_R(0)$$

$$\phi : E \to E$$
$$x \mapsto \alpha\left(\frac{\|x\|}{R}\right)\varphi(x)$$

Em $B_{R/2}(0)$: $A+\phi = A+\varphi = f$.

Desta vem que $Lip(\phi) < \varepsilon$, ou seja, $\|\phi(x_1)-\phi(x_2)\| < \varepsilon\|x_1-x_2\| \ \forall x_1,x_2$

i) $x_1, x_2 \notin B_R(0)$

$$\|\phi(x_1)-\phi(x_2)\| = \|0-0\| < \varepsilon\|x_1-x_2\|$$

ii) $x_1 \in B_R(0)$

$$\|\phi(x_1)-\phi(x_2)\| = \left\|\alpha\left(\frac{\|x_1\|}{R}\right)\varphi(x_1) - \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{R}\right)\varphi(x_2)\right\|$$

$$= \left\|\left[\alpha\left(\frac{\|x_1\|}{R}\right) - \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{R}\right)\right]\varphi(x_1) + \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{R}\right)\left(\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\right)\right\|$$

$$\leq \underbrace{\left|\alpha\left(\frac{\|x_1\|}{R}\right) - \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{R}\right)\right|\|\varphi(x_1)\|}_{\leq \ \frac{K}{\cancel{R}}\|x_1-x_2\|\frac{\varepsilon}{2\cancel{K}}\cancel{\|x_1\|}} + \underbrace{\alpha\left(\frac{\|x_2\|}{R}\right)\|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\|}_{\leq \ \begin{cases} = 0 & \text{se } x_2 \notin B_R(0) \\ \leq \frac{\varepsilon}{2K}\|x_1-x_2\| & \text{se } x_2 \in B_R(0)\end{cases}}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\|x_1-x_2\| + \frac{\varepsilon}{2K}\|x_1-x_2\| \leq \varepsilon\|x_1-x_2\| \quad (K>2).$$

Teorema da variedade estável

$f \in \mathrm{Dif}^R(M)$, $R \geq 1$, p ponto fixo hiperbólico, $T_pM = E^s \oplus E^u$.

Então:

a) $W^s(p)$ é uma imersão C^R de E^s e $T_p(W^s(p)) = E^s$.

b) $\exists N$ viz. de f em $\mathrm{Dif}^R(M)$ e U viz. de p tq

i) $\forall g \in N$ g tem um único ponto fixo $p_g \in U$ que é hiperbólico e varia continuamente com g.

ii) $W^s(p_g)$ varia continuamente em partes compactas contendo p_g.

Dem: $W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W^s_\varepsilon(p))$

Provaremos que a variedade estável local é o gráfico de uma aplicação C^R de E^s em E^u.

Passando a uma carta podemos supor de f é um difeo de uma vizinhança V de 0 em E (espaço de Banach que modela M).
↳ pto fixo hip.

$$f : V \longrightarrow E$$

$$Df(0) = A$$

$$f = A + \phi \qquad \phi(0) = 0 \qquad D\phi(0) = 0$$

$$E = E^s \oplus E^u \qquad A = A^s \oplus A^u \qquad A^{s,u} = A|E^{s,u}$$

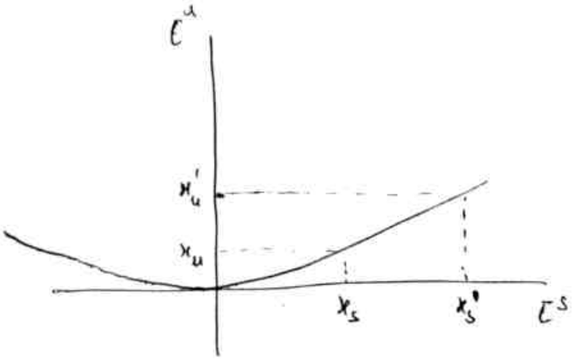
$$|A^s|_s < a < 1 \quad , \quad |(A^u)^{-1}|_s < a < 1$$

$$|x^s + x^u| = \max\{|x^s|_s, |x^u|_u\}$$

$$\varepsilon > 0 \text{ tq } \quad \begin{array}{l} a + \varepsilon < 1 \\ a^{-1} - \varepsilon > 1 \end{array}$$

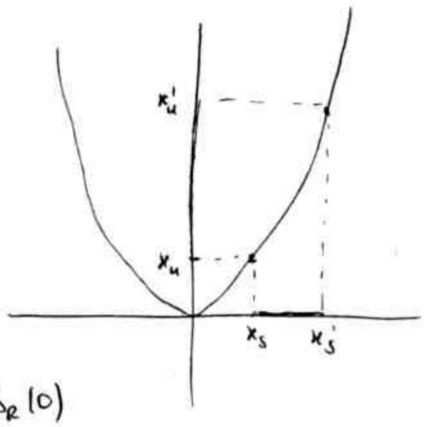
$$f = (f^s, f^u)$$

$$\phi = (\phi^s, \phi^u)$$



Lema 1: Se $z = (x_s, x_u)$, $z' = (x_s', x_u')$ são tais que $f^n(z), f^n(z') \in B_R(0)$ $\forall n \geq 0$, então $|x_u - x_u'| < |x_s - x_s'|$.

Dem: Se assim não fosse a norma de $z - z'$ seria dada por $|x_u - x_u'|$.



Como f expande nas componentes "u" dos vectores em $B_R(0)$ $(a^{-1} - \varepsilon > 1)$ e contrai nas "s" $(a + \varepsilon < 1)$ a norma dos iterados $f^n(z)$, $f^n(z')$ será sempre a da componente "u". Como essas expandem, temos um absurdo.

$$K = \{ \gamma : \mathbb{N}_0 \to E \mid \lim_{n \to +\infty} \gamma(n) = 0 \}$$

$\gamma \in K$ $\quad \|\gamma\| = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |\gamma(n)|$ $\quad (K, \| \|)$ espaço de Banach

$G = \{ \gamma \in K \mid \gamma(n) \in B_R(0) \ \forall n \geq 0 \}$ aberto K, $0 \in G$.

Caso particular:

$$\gamma(n) = f^n(z) \qquad z = (z_s, z_u) \in W_R^s(0)$$

$$\begin{aligned}
\gamma(n) &= f(\gamma(n-1)) \\
&= A(\gamma(n-1)) + \phi(\gamma(n-1)) \\
&= A\left[f(\gamma(n-2))\right] + \phi(\gamma(n-1)) \\
&= A\left[A(\gamma(n-2)) + \phi(\gamma(n-2))\right] + \phi(\gamma(n-1)) \\
&= A^2(\gamma(n-2)) + A\phi(\gamma(n-2)) + \phi(\gamma(n-1)) \\
&\ \vdots \\
&= A^n z + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j}\phi(\gamma(j))
\end{aligned}$$

2ª componente:

$$\begin{aligned}
\gamma^u(n) &= (A^u)^n z_u + \sum_{j=0}^{n-1} (A^u)^{n-1-j}\phi^u(\gamma(j)) \\
&= (A^u)^n\left(z_u + \sum_{j=0}^{n-1} (A^u)^{-1-j}\phi^u(\gamma(j))\right)
\end{aligned}$$

Para que $\gamma^u(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ terá que ser

$$z_u = -\sum_{j=0}^{\infty} (A^u)^{-1-j}\phi^u(\gamma(j))$$

$\downarrow$

esta é uma expressão que nos interessa pois não envolve z_u.

(12)

Definimos

$$\mathcal{F}: B^s_R(0) \times G \longrightarrow K$$
$$(x, \gamma) \rightsquigarrow \gamma(n) - \left((A^s)^n x + \sum_{j=0}^{n-1} (A^s)^{n-1-j} \phi^s(\gamma(j)), - \sum_{j=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-j} \phi^u(\gamma(j)) \right)$$

$\mathcal{F}(0,0) = 0$

Vamos ver que $\mathcal{F}$ define γ como função de x numa viz. de $(0,0)$.

1) $\mathcal{F}$ está bem definida:

Temos que $\gamma(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ e $|(A^s)^n x| \leq a^n |x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Falta ver que

i) $\sum_{j=0}^{n-1} (A^s)^{n-1-j} \phi^s(\gamma(j)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

ii) $-\sum_{j=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-j} \phi^u(\gamma(j)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\exists b>0$ $|\phi(\gamma(j))| < b$ $\forall j \in \mathbb{N}$ $(\gamma(j) \in B_R(0))$

i) $0 \leq m < n$

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} (A^s)^{n-1-j} \phi^s(\gamma(j)) \right| \leq \left| \sum_{j=0}^{m-1} (A^s)^{n-1-j} \phi^s(\gamma(j)) \right| + \left| \sum_{j=m}^{n-1} (A^s)^{n-1-j} \phi^s(\gamma(j)) \right|$$

$$\leq \frac{a^{n-m}}{1-a} b + \frac{1}{1-a} \sup_{j\geq m} |\phi^s(\gamma(j))|$$

$\varepsilon > 0$

m grande tq $\sup_{j \geq m} |\phi^s(\gamma(j))| < (1-a)\frac{\varepsilon}{2}$

n grande tq $\frac{a^{n-m}}{1-a} b < \frac{\varepsilon}{2}$

ii) $\left| \sum_{j=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-j} \phi^u(\gamma(j)) \right| \leq \frac{a}{1-a} \sup_{j \geq n} \|\gamma^u(j)\|$

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos n grande tq $\sup_{j \geq n} |\gamma(j)| < \left(\frac{1-a}{a}\right) \varepsilon$

2) $\underline{F \text{ é } C^1}$

i) Para $\gamma \in G$

$$\begin{aligned} B_R^s &\longrightarrow K \\ x &\rightsquigarrow F(x,\gamma) \end{aligned}$$

é afim contínua. Logo $D_1 F$ existe e é contínua.

ii) Pode-se verificar que

$$D_2 F(x,\gamma)(u)(n) = u(n) - \left(\sum_{j=0}^{n-1} (A^s)^{n-1-j} D\phi^s(\gamma(i))(u(i)), - \sum_{j=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-j} D\phi^u(\gamma(i))(u(i)) \right)$$

$\hookrightarrow$ contínua, pois ϕ é de classe C^r $(r \geq 1)$.

$\therefore F$ é C^1.

3) $F(0,0) = 0$, $D_2 F(0,0) = Id$ $\qquad F: B_R^s(0) \times G \longrightarrow K$

$\Downarrow$ T.F.I.

$\exists\, B_\varepsilon^s(0)$ $(\varepsilon < R)$ bola em E^s e $\varphi: B_\varepsilon^s \to G$ C^1 tal que

$\varphi(0) = 0$ e $F(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in B_\varepsilon^s(0)$

(14)

$$\mathcal{F}(x,\varphi(x)) \equiv 0 \Leftrightarrow \varphi(x)(n) = \left((A^s)^n x + \sum_{j=0}^{n-1} A^{s^{n-1-j}} \phi^s(\varphi(x)(j)) \, , \, - \sum_{j=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-j} \phi^u(\varphi(x)(j)) \right)$$

$$\varphi(x)(0) = \left(x \, , \, - \sum_{j=0}^{\infty} (A^u)^{-1-j} \phi^u(\varphi(x)(j)) \right)$$

Definimos

$$h : B_\varepsilon^s(0) \longrightarrow E^u$$
$$x \rightsquigarrow - \sum_{j=0}^{\infty} (A^u)^{-1-j} \phi^u(\varphi(x)(j))$$

(1) <u>h é C^1:</u>

$$\Pi_u : E \xrightarrow{\text{linear}} E^u \qquad \Theta : G \xrightarrow{\text{linear}} E \qquad \varphi : B_\varepsilon^s \xrightarrow{C^1} G$$
$$(x_s, x_u) \rightsquigarrow x_u \qquad \gamma \rightsquigarrow \gamma(0) \qquad x \rightsquigarrow \varphi(x)$$

$$h = \varphi \circ \Theta \circ \Pi_u \text{ é } C^1.$$

(2) Pelo modo como $\mathcal{F}$ foi definida e φ obtida, facilmente se deduz que

$$\varphi(x)(n) = f^n(\varphi(x)(0)) = f^n(x, h(x)) \quad \forall n \geq 0$$

- $z \in \operatorname{graf}(h)$

$z = (x, h(x)) = \varphi(x)(0)$

$$f^n(z) = \varphi(x)(n) \in B_R(0) \quad \forall n \geq 0 \quad \text{pois } \varphi(x) \in G$$

Como $|x| < \varepsilon$ e $f^n(z) \in B_R(0)$ $\forall n \geq 0$, resulta do lema 1 que, mais precisamente

$$f^n(z) \in B_\varepsilon(0) \quad \forall n \geq 0$$

ou seja, $z \in W_\varepsilon^s(0)$.

- $z \in W^s_\varepsilon(0)$

$z = (x, y)$ com $x \in B^s_\varepsilon$

$f^n(x,y) \in B_\varepsilon \subset B_R \quad \forall n \geq 0$

Também $f^n(x, h(x)) \in B_R \quad \forall n \geq 0$

Lema 1 $\Rightarrow y = h(x)$

$\therefore z \in \mathrm{graf}(h)$.

Para concluir que a variedade estável local é tangente a E^s ou ao basta mostrar que $Dh(0) = 0$.

$$F(x, \varphi(x)) = 0 \qquad \forall x \in B^s_\varepsilon(0)$$

$$\Downarrow$$

$$D_1F(x,\varphi(x)) + D_2F(x,\varphi(x))\, D\varphi(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$D_1F(0,0) = -D\varphi(0) \qquad (D_2F(0,0) = Id)$$

É fácil ver que $D_1F(x,\gamma)(v)(n) = ((A^s)^n_0 v, 0)$

$$h = \underbrace{\pi_2 \circ \Theta}_{\text{lineares}} \circ \varphi \Rightarrow Dh(0)\cdot v = \pi_2 \circ \Theta \circ D\varphi(0)\cdot v$$

$$= \pi_2 \circ \Theta\left(\left(A^{s^n}\cdot v, 0\right)_n\right)$$

$$= \pi_2\left(A^{s^0}\cdot v, 0\right)$$

$$= 0.$$

Variedade estável para conjuntos hiperbólicos

Def. $f \in \mathrm{Dif}^r(M)$, $\Lambda \subset M$ compacto invariante ($f(\Lambda) = \Lambda$)

Λ tem estrutura hiperbólica relativamente a f se

1) $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$

2) E^s e E^u são Df-invariantes.

3) $\exists\, C > 0 \quad \lambda < 1$:

$$\| Df^n(x) \cdot v \| \leq C \lambda^n \|v\| \quad \forall x \in \Lambda \ \forall v \in E^s_x \ \forall n \geq 0$$

$$\| Df^{-n}(x) \cdot v \| \leq C \lambda^n \|v\| \quad \forall x \in \Lambda \ \forall v \in E^u_x \ \forall n \geq 0$$

Proposição: Existe métrica $\|\ \|'$ adaptada a f, i.e., podemos supor $C = 1$.

Dem.: Seja $\rho \in (\lambda, 1)$

$$v \in E^s_x \qquad \|v\|_s = \sum_{n \geq 0} \rho^{-n} \| Df^n(x) \cdot v \|$$

$$w \in E^u_x \qquad \|w\|_u = \sum_{n \geq 0} \rho^{-n} \| Df^{-n}(x) \cdot w \|$$

Tomamos $\|v + w\|' = \max \{ \|v\|_s , \|w\|_u \}$

Estendemos a métrica em Λ a todo M.

De agora em diante trabalharemos com métrica adaptada

(18)

$B(\Lambda, M) = \{ \alpha : \Lambda \to M \mid \alpha \text{ limitada} \}$ — métrica sup (norma em Γ)

$\Gamma^b(\Lambda) = \Gamma^b(\Lambda, T_\Lambda M) = \{ \text{secções limitadas } \sigma : \Lambda \to T_\Lambda M \}$

$B(\Lambda, M)$ é variedade de Banach modelada em $\Gamma^b(\Lambda)$

$$F : B(\Lambda, M) \longrightarrow B(\Lambda, M)$$
$$\alpha \rightsquigarrow f \circ \alpha \circ f^{-1}_{|\Lambda}$$

inc_Λ é ponto fixo para F.

<u>Carta local em inc_Λ</u>:

$\exists R>0 : \forall x \in \Lambda \ \forall \varepsilon < R$

$$\exp_x|_{B(0,\varepsilon)} : B(0,\varepsilon) \longrightarrow B(x,\varepsilon) \text{ é difeo } C^\infty \text{ (isometria)}$$

$$U(\varepsilon) = \{ \alpha \in B(\Lambda, M) \mid d(i_\Lambda, \alpha) < \varepsilon \}$$

$$\Gamma^b_\varepsilon(\Lambda) = \{ \sigma \in \Gamma^b(\Lambda) \mid \|\sigma\| < \varepsilon \}$$

$$\phi : \Gamma^b_\varepsilon(\Lambda) \longrightarrow U(\varepsilon)$$
$$\sigma \rightsquigarrow \phi(\sigma) : \Lambda \longrightarrow M$$
$$x \rightsquigarrow \exp_x(\sigma(x))$$

$$\phi^{-1} : U(\varepsilon) \longrightarrow \Gamma^b_\varepsilon(\Lambda)$$
$$\alpha \rightsquigarrow \phi^{-1}(\alpha) : \Lambda \longrightarrow T_\Lambda M$$
$$x \rightsquigarrow \exp_x^{-1}(\alpha(x))$$

$\varepsilon' < \varepsilon$

$$\begin{array}{ccc} B(\Lambda, M) & \xrightarrow{F} & B(\Lambda, M) \\ \uparrow \phi & & \downarrow \phi^{-1} \\ \Gamma^s_{\varepsilon'}(\Lambda) & \xrightarrow{\tilde{F}} & \Gamma^s_{\varepsilon}(\Lambda) \end{array} \qquad \tilde{F} = \phi^{-1} \circ F \circ \phi$$

(1) $\tilde{F}(0) = 0$ immediato

(2) $\tilde{F}(\sigma)x = \exp_x^{-1} \circ f \circ \exp_{f^{-1}(x)}(\sigma(f^{-1}(x)))$ $\quad x \in \Lambda$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\sigma)x &= (\phi^{-1} \circ F \circ \phi)(\sigma)\, x \\ &= \phi^{-1}[F(\phi(\sigma))]x \\ &= \phi^{-1}[f \circ \phi(\sigma) \circ f^{-1}_{|\Lambda}]x \\ &= \exp_x^{-1}[(f \circ \phi(\sigma) \circ f^{-1}_{|\Lambda})(x)] \\ &= \exp_x^{-1}[f(\phi(\sigma)(f^{-1}_{|\Lambda}(x)))] \\ &= \exp_x^{-1}[f(\exp_{f^{-1}(x)}(\sigma f^{-1}(x)))] \end{aligned}$$

(3) $D\tilde{F}(0)\sigma = Df \circ \sigma \circ f^{-1}$

$$\begin{aligned} (D\tilde{F}(0)\sigma)_x = \left(\lim_{t\to 0} \frac{\tilde{F}(t\sigma)}{t}\right)_x &= \lim_{t\to 0} \frac{\exp_x^{-1}(f \circ \exp_{f^{-1}(x)}(t\sigma(f^{-1}(x))))}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(\exp_x^{-1} \circ f \circ \exp_{f^{-1}(x)})(t\,\sigma(f^{-1}(x)))}{t} \\ &= D(\exp_x^{-1} \circ f \circ \exp_{f^{-1}(x)})(0)(\sigma(f^{-1}(x))) \\ &= Df(f^{-1}(x))(\sigma(f^{-1}(x))) \end{aligned}$$

$D\exp_x = Id$

<u>Proposição</u>: Λ hiperbólico $\iff$ inc_Λ é ponto fixo hiperbólico para

$$\mathcal{F}: B(\Lambda, M) \longrightarrow B(\Lambda, M)$$
$$\alpha \rightsquigarrow f\circ\alpha\circ f^{-1}_{|\Lambda}$$

<u>Dem</u>: Por ③, basta ver que

Λ hiperbólico $\iff$ 0 (secção nula) ponto fixo hiperbólico de

$$f_\#: \Gamma^b(\Lambda) \longrightarrow \Gamma^b(\Lambda)$$
$$\sigma \rightsquigarrow Df\circ\sigma\circ f^{-1}$$

($\Rightarrow$) Λ hiperbólico $\Rightarrow$ $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$

$$\Gamma^b(\Lambda) = \Gamma^b(E^s)\oplus\Gamma^b(E^u) \quad \text{onde } \Gamma^b(E^{s,u}) = \{\sigma\in\Gamma^b(\Lambda) \mid \sigma(x)\in E^{s,u}_x\}$$

i) $\Gamma^b(E^s)$ e $\Gamma^b(E^u)$ são $f_\#$ invariantes ...

ii) $\sigma\in\Gamma^b(E^s)$

$$\|f_\#(\sigma)\| = \sup_{x\in\Lambda}\|f_\#(\sigma)(x)\|$$
$$= \sup_{x\in\Lambda}\| Df_{f^{-1}(x)}(\overbrace{\sigma(f^{-1}(x))}^{\in E^s_{f^{-1}(x)}})\|$$
$$\leq \sup_{x\in\Lambda}\lambda\|\sigma(f^{-1}(x))\|$$
$$\leq \lambda\|\sigma\|$$

Análogo para $\Gamma^b(E^u)$.

($\Leftarrow$) $f_\#$ hiperbólico $\Rightarrow$ $\Gamma^b(\Lambda) = \Gamma^s\oplus\Gamma^u$, $\Gamma^{s,u}$ $f_\#$ invariantes

$$\|f_\#(\sigma)\|\leq\lambda\|\sigma\| \quad \sigma\in\Gamma^s.$$
$$\|f_\#^{-1}(\sigma)\|\leq\lambda\|\sigma\| \quad \sigma\in\Gamma^u.$$

Definimos $E^{s,u}_x = \{ \sigma(x) \mid \sigma \in \Gamma^{s,u} \}$

$$E^{s,u} = \bigcup_{x\in\Lambda} E^{s,u}_x$$

Prova-se que $E^{s,u}$ são subfibrados de $T_\Lambda M$ Df-invariantes tais que $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ e conferem a Λ uma estrutura hiperbólica para Λ.

<u>Definição</u>: Definimos para $x \in \Lambda$

$$W^s(x) = \{ y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \}$$

$$W^u(x) = \{ y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \}$$

$$W^s_\varepsilon(x) = \{ y \in W^s(x) : d(f^n(y), f^n(x)) \le \varepsilon \quad \forall n \ge 0 \}$$

$$W^u_\varepsilon(x) = \{ y \in W^u(x) : d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \le \varepsilon \quad \forall n \ge 0 \}$$

<u>Teorema</u> (<u>Variedade estável para conjuntos hiperbólicos</u>)

$f \in Dif(M)$, $\Lambda \subset M$ conjunto hiperbólico.

Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que

1) $W^s_\varepsilon(x)$ é um disco de classe C^k mergulhado em M variando continuam/ c/ x.

2) $T_x W^s_\varepsilon(x) = E^s_x$

3) $\forall y \in W^s_\varepsilon(x)$ $\quad d(f^n(y), f^n(x)) \le \lambda^n d(y,x)$

<u>Dem</u>: Λ hiperbólico para f

$$\Downarrow$$

$\tilde{F} : \Gamma^s_\varepsilon(\Lambda) \to \Gamma^s(\Lambda)$ definida por $\tilde{F}(\sigma)(x) = \exp^{-1}_x \circ f \circ \exp_{f^{-1}(x)}(\sigma(f^{-1}(x)))$

tem 0 como ponto fixo hiperbólico.

(22) Temos que

$$D\tilde{F}(0) = f_{\#} : \Gamma^b(\Lambda) \longrightarrow \Gamma^b(\Lambda)$$
$$\sigma \rightsquigarrow Df \circ \sigma \circ f^{-1}$$

induz uma decomposição $\Gamma^b(\Lambda) = \Gamma^b(E^s) \oplus \Gamma^b(E^u)$.

Pelo Teor. var. est. para pontos fixos hiperbólicos temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $W^s_\varepsilon(0, \tilde{F})$ é uma variedade de classe C^k dada pelo gráfico de uma aplicação

$$G : \Gamma^b_\varepsilon(E^s) \longrightarrow \Gamma^b_\varepsilon(E^u)$$

Notação: $\Gamma^{s,u}_\varepsilon = \Gamma^b_\varepsilon(E^{s,u})$. viz. de 0 de tamanho ε em $\Gamma^b(E^{s,u})$.

Lema: Existe uma aplicação fibrada de E^s_ε em E^u_ε, $H : E^s_\varepsilon \longrightarrow E^u_\varepsilon$, satisfazendo:

1) $G(\sigma) = H \circ \sigma \quad \forall \sigma \in \Gamma^s_\varepsilon$

2) $\forall x \in \Lambda \quad H_x : E^s_{x,\varepsilon} \longrightarrow E^u_{x,\varepsilon}$ é C^k

$$\begin{tikzcd} E^s_\varepsilon \arrow[r, "H"] & E^u_\varepsilon \\ \Lambda \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, "id"] & \Lambda \arrow[u, "G(\sigma)"'] \end{tikzcd}$$

Além disso H_x varia continuamente com x.

Dem: A construção de H é baseada no facto de que $G(\sigma)(x)$ só depende de $\sigma(x)$, e não nos valores de σ nos outros pontos.

Af. $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma^s_\varepsilon \quad \sigma_1(x) = \sigma_2(x) \Longrightarrow G(\sigma_1)(x) = G(\sigma_2)(x)$

Suponhamos que $G(\sigma_1)(x) \neq G(\sigma_2)(x)$

Sabemos que

$$\tilde{F}^n(\sigma_1, G(\sigma_1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\tilde{F}^n(\sigma_2, G(\sigma_2)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

e $G(\sigma_1) = \tau$ é a única secção em Γ^u_ε tq $\tilde{F}^n(\sigma_1, \tau) \longrightarrow 0$

Definimos $\tau \in \Gamma^u_\varepsilon$ por

$$\tau(y) = \begin{cases} G(\sigma_1)(y) & y \neq x \\ G(\sigma_2)(x) & y = x \end{cases}$$

Temos

$$d\left(\tilde{F}^n(\sigma_1,\tau),0\right) = \sup_{z\in\Lambda} d\left(\tilde{F}^n(\sigma_1,\tau)(z),\ 0(z)\right)$$

$$= \sup_{z\in\Lambda} \left\| \exp_z^{-1} \circ f^n \circ \exp_{f^{-n}(z)}\left((\sigma_1,\tau)(f^{-n}(z))\right) \right\|$$

$$= \max\left\{ \sup_{\substack{z\in\Lambda \\ f^{-n}(z)\neq x}} \left\| \exp_z^{-1} \circ f^n \circ \exp_{f^{-n}(z)}\left(\sigma_1, G(\sigma_1)\right)(f^{-n}(z)) \right\| ,\right.$$
$$\left. \left\| \exp^{-1}_{f^n(x)} \circ f^n \circ \exp_x \left(\sigma_2, G(\sigma_2)\right)(x) \right\| \right\}$$

$$\leq \max\left\{ \tilde{F}^n\left(\sigma_1, G(\sigma_1)\right),\ \tilde{F}^n\left(\sigma_2, G(\sigma_2)\right) \right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Temos uma contradição, pois $\tau \neq G(\sigma_1)$.

Definimos

$$H : E^s_\varepsilon \longrightarrow E^u_\varepsilon \qquad \text{onde } \sigma \in \Gamma^s_\varepsilon \text{ é tal que } \sigma(x) = v$$
$$(x,v) \rightsquigarrow (x, G(\sigma)x)$$

e.g. $\sigma(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \neq x \\ v & \text{se } y = x \end{cases}$

Denotamos $\sigma = \sigma^v_x$

H está bem definida (pelo que vimos)

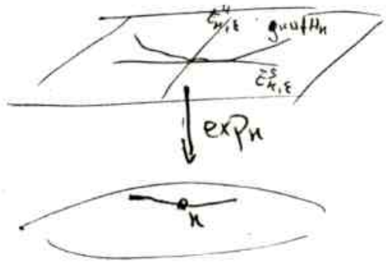
Af. $H_x : E^s_{x,\varepsilon} \longrightarrow E^u_{x,\varepsilon}$ é C^k

$$H_x : E^s_{x,\varepsilon} \xrightarrow{\text{linear}} \Gamma^s_\varepsilon \xrightarrow{C^k} \Gamma^u_\varepsilon \xrightarrow{\text{linear}} E^u_{x,\varepsilon}$$
$$v \rightsquigarrow \sigma^v_x \rightsquigarrow G(\sigma^v_x) \rightsquigarrow G(\sigma^v_x)(x)$$

$\therefore H_x$ é C^k

<u>Nota</u>(*): Pode-se provar que a restrição de H à fibra sobre x e as suas derivadas até à ordem K variam continuamente com x.

<u>Lema 2</u>: $W^s_\varepsilon(x,f) = \exp_x\big(\text{graf}(H_x)\big)$



<u>Dem</u>: Começamos por observar que

$$\exp_x\big(\text{graf}(H_x)\big) = \exp_x\Big(\{(v_s,v_u)\in E^s_{x,\varepsilon}\oplus E^u_{x,\varepsilon} : v_u = H_x(v_s)\}\Big)$$

$$= \exp_x\Big(\{(v_s,v_u)\in E^s_{x,\varepsilon}\oplus E^u_{x,\varepsilon} : v_u = G(V)(x),\ \text{algum } V\in\Gamma^s_\varepsilon \text{ tq } V(x)=v_s\}\Big)$$

$$= \exp_x\Big(\{(V(x), G(V)(x))\in E_{x,\varepsilon} : \sigma\in\Gamma^s_\varepsilon\}\Big)$$

$$= \{\exp_x(\sigma(x)) \mid \sigma\in W^s_\varepsilon(0,\tilde{F})\}$$

$$= \{\alpha(x) \mid \alpha\in W^s_\varepsilon(inc_\Lambda, F)\}$$

Basta então provar que $W^s_\varepsilon(x,f) = \{\alpha(x)\mid \alpha\in W^s_\varepsilon(inc_\Lambda,F)\}$

$$\alpha\in W^s_\varepsilon(inc_\Lambda,F) \Rightarrow d\big(F^n(\alpha), inc_\Lambda\big)\le\varepsilon \quad \forall n\ge 0$$

$$\Rightarrow \sup_{y\in\Lambda} d\big(F^n(\alpha)(y), y\big)\le\varepsilon \quad \forall n\ge 0$$

$$\Rightarrow \sup_{y\in\Lambda} d\big(f^n\circ\alpha\circ f^{-n}(y), y\big)\le\varepsilon \quad \forall n\ge 0$$

$$\Rightarrow d\big(f^n\circ\alpha(x), f^n(x)\big)\le\varepsilon \quad \forall n\ge 0$$

$$\Rightarrow \alpha(x)\in W^s_\varepsilon(x,f).$$

$y\in W^s_\varepsilon(x,f)$

Definimos $\delta^y_x \in B(\Lambda,M)$ por $\delta^y_x(z) = \begin{cases} y & \text{se } z=x \\ z & \text{se } z\neq x\end{cases}$

Temos $\delta_x^y(x) = y$. Vejamos que $\delta_x^y \in W_\varepsilon^s(inc_\Lambda, F)$

$n \geq 0$

$$d\left(F^n(\delta_x^y), F^n(inc_\Lambda)\right) = \sup_{z\in\Lambda} d\left(f^n \circ \delta_x^y \circ f^{-n}(z), z\right)$$

$$= \sup_{z\in\Lambda} d\left(f^n\left(\delta_x^y\left(f^{-n}(z)\right)\right), z\right)$$

$f^{-n}(z) \neq x \Rightarrow \delta_x^y(f^{-n}(z)) = f^{-n}(z)$

$$= d\left(f^n(y), f^n(x)\right) \leq \varepsilon$$

$$\therefore \delta_x^y \in W_\varepsilon^s(inc_\Lambda, F).$$

■

Atendendo a que H_x é C^k resulta que $W_\varepsilon^s(x,f)$ é um disco com $\dim = \dim E_x^s$ de classe C^k mergulhado em M.

Resulta ainda que $T_x W_\varepsilon^s(x,f) = E_x^s$ pois $DH_x(0) = 0$.

$$\left\| D(f|W_\varepsilon^s(x,f))(x) \right\| = \left\| Df | E_x^s \right\| < \lambda$$

$$\Downarrow$$

$\exists \varepsilon > 0$ tq: se $y \in W_\varepsilon^s(x,f)$ e $d(x,y) < \varepsilon$, então $d(f(x), f(y)) \leq \lambda\, d(x,y)$

Λ compacto $\Rightarrow$ $\varepsilon > 0$ pode ser escolhido independente de x.

(*) Temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} C^0(\Lambda, M) & \xrightarrow{F} & C^0(\Lambda, M) \\ \downarrow inc & & \downarrow inc \\ B(\Lambda, M) & \xrightarrow{F} & B(\Lambda, M) \end{array}$$

inc_Λ é pto fixo hiperbólico de $F: C^0(\Lambda, M) \to C^0(\Lambda, M)$

Numa carta, var. est. inc_Λ é gráfico de $G': \Gamma_\varepsilon^0(E^s) \xrightarrow{C^k} \Gamma_\varepsilon^0(E^u)$

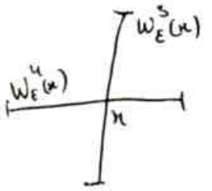
$$G' = G|\Gamma_\varepsilon^0(E^s) \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{cont.}}}{G'(\sigma)} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{cont.}}}{H \circ \sigma} \Rightarrow H_x \text{ var. cont. com } x.$$

26

<u>Proposição 1</u>: Λ conj. hiperbólico para f

Existe $\varepsilon_0 > 0$ tq para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ existe $\delta > 0$ tq $\forall x, y \in \Lambda$ com $d(x,y) < \delta$ temos $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y) = p$ onde p é um ponto de intersecção transversal.

<u>Dem</u>:



Escolher $\varepsilon_0 > 0$ tq os teoremas da var. est. e inst. sejam válidos e $W^u_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(x) = x$ $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Dado $x_0 \longrightarrow \exists\, \delta_{x_0}$

Compacidade de Λ

<u>Def</u>. (X, d) e.m., $f: X \to X$ homeo

$Y \subset X$ invariante $(f(Y) = Y)$

f diz-se <u>expansivo</u> em Y se existe $\varepsilon > 0$ tq

$$\forall x \in X\ \forall y \in Y\ (y \neq x) \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{Z}} \{ d(f^n(x), f^n(y)) \} \geq \varepsilon$$

<u>Prop. 2</u>: Λ conj. hiperbólico para $f \in \mathrm{Diff}^k(M)$, $k \geq 1$

$\Rightarrow f$ é expansivo em Λ.

Continuação hiperbólica

$f \in \mathrm{Dif}^R(M)$, $\Lambda \subset M$ conjunto hiperbólico para f.

$$C(\Lambda, M) = \{ \alpha : \Lambda \to M \ \text{contínua} \}$$

$$d(\alpha,\beta) = \sup_{x\in\Lambda} d(\alpha(x), \beta(x)) \qquad \alpha,\beta \in C(\Lambda,M)$$

$$\Gamma^0(\Lambda) = \{ \text{secções } \sigma : \Lambda \to T_\Lambda M \ \text{contínuas} \}$$

$$\|\sigma\| = \sup_{x\in\Lambda} \|\sigma(x)\|$$

Analogamente ao que fizemos com $B(\Lambda,M)$ e $\Gamma^b(\Lambda)$, podemos verificar que $C(\Lambda,M)$ é uma variedade de Banach modelada em $\Gamma^0(\Lambda)$ e obter o seguinte resultado:

" Λ é um conjunto hiperbólico para f "

$$\Updownarrow$$

inc_Λ é um ponto fixo hiperbólico para $F : C(\Lambda,M) \to C(\Lambda,M)$
$\alpha \mapsto f\circ\alpha\circ f^{-1}_{|\Lambda}$

Teorema (continuação hiperbólica)

$f \in \mathrm{Dif}^r(M)$, $\Lambda \subset M$ hiperbólico para f.
Existe $\mathcal{N}$ viz. de f em $\mathrm{Dif}^r(M)$ e $\phi : \mathcal{N} \to C^0(\Lambda,M)$ contínua tq:

1) $\phi(f) = inc_\Lambda$

2) $\forall g \in \mathcal{N}$ $\Lambda_g = \phi(g)(\Lambda)$ é hiperbólico para g
e $\phi(g)\circ f_{|\Lambda} = g_{|\Lambda_g} \circ \phi(g)$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{f_{|\Lambda}} & \Lambda \\ {\scriptstyle \phi(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi(g)} \\ \Lambda_g & \xrightarrow{g_{|\Lambda_g}} & \Lambda_g \end{array}$$

28

<u>Dem</u>: Dado $g \in \mathrm{Dif}^R(M)$ definimos

$$H_g : C(\Lambda, M) \longrightarrow C(\Lambda, M)$$
$$\alpha \rightsquigarrow g \circ \alpha \circ f_{|\Lambda}^{-1}$$

<u>Obs.</u> 1) $\phi(g)$ será um ponto fixo para H_g.

2) $H_f = F$ (definida anteriormente).

3) g C^R próximo de $f \Rightarrow H_g$ C^R próximo de H_f.

inc_Λ ponto fixo hiperbólico para H_f $\Rightarrow \exists\, \mathcal{N}$ viz. de f $\overbrace{\text{tq}}^{\exists U \text{ viz. de } \mathrm{inc}_\Lambda}$ para $g \in \mathcal{N}$ existe um único ponto fixo para H_g em U o qual é hiperbólico.

Λ hiperbólico para $f \Rightarrow f_{|\Lambda} : \Lambda \to \Lambda$ expansivo

$$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall x, y \in \Lambda,\; x \neq y \;\; \exists n \in \mathbb{Z} : d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon$$

Tomemos $U \subset B(\mathrm{inc}_\Lambda, \varepsilon/2) = \{ \alpha \in C(\Lambda, M) \mid d(\alpha, \mathrm{inc}_\Lambda) < \varepsilon/2 \}$

Para $g \in \mathcal{N}$ seja $\phi(g)$ o único <u>ponto fixo de H_g em U</u>.

$$\Downarrow$$

$$\phi(g) \circ f_{|\Lambda} = g \circ \phi(g)$$

1) $\phi(g) : \Lambda \longrightarrow M$ é injectiva:

$x, y \in \Lambda$ com $x \neq y$

$\exists\, n \in \mathbb{Z}$ tq $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon$

$$\varepsilon \le d\left(f^n(x), f^n(y)\right) \le \underbrace{d\left(f^n(x), \phi(g) f^n(x)\right)}_{< \varepsilon/2 \text{ pois } \phi(g)\in V} + \underbrace{d\left(\phi(g) f^n(x), \phi(g) f^n(y)\right)}_{= d\left(g^n \phi(g)(x),\, g^n \phi(g)(y)\right)} + \underbrace{d\left(\phi(g) f^n(y), f^n(y)\right)}_{< \varepsilon/2}$$

$$\therefore\ d\left(g^n(\phi(g)(x)), g^n(\phi(g)(y))\right) > 0$$

$$\therefore\ \phi(g)(x) \neq \phi(g)(y)$$

2) $\phi(g)$ contínua, por definição.

3) $\phi(g)$ contínua, injectiva, definida num compacto

$\Downarrow$

$\phi(g)$ é homeo sobre a imagem.

Definimos $\Lambda_g = \phi(g)\Lambda$

Temos i) $\phi(g) \circ f_{|\Lambda} = g \circ \phi(g)$

ii) $g(\Lambda_g) = \Lambda_g$

$$g(\Lambda_g) = g\circ\phi(g)(\Lambda) = \phi(g)\circ f(\Lambda) = \phi(g)(\Lambda) = \Lambda_g$$

iii) $\phi(f) = inc_\Lambda$

iv) Λ_g é hiperbólico para g:

Equivalentemente, $G: C(\Lambda_g, M) \to C(\Lambda_g, M)$, $\alpha \mapsto g\circ\alpha\circ g^{-1}_{|\Lambda_g}$ tem inc_{Λ_g} como ponto fixo hiperbólico.

Consideramos o difeo

$$\begin{aligned} \Psi : C(\Lambda_g, M) &\longrightarrow C(\Lambda, M) \\ \alpha &\longmapsto \alpha\circ\phi(g) \end{aligned} \qquad \Psi^{-1}(\alpha) = \alpha\circ\phi(g)^{-1}$$

i) $G = \Psi^{-1} \circ H_g \circ \Psi$

$$(\Psi^{-1} \circ H_g \circ \Psi)(\alpha) = (\Psi^{-1} \circ H_g)(\alpha \circ \phi(g))$$
$$= \Psi^{-1}\left(g \circ \alpha \circ \phi(g) \circ f_{|\Lambda}^{-1}\right)$$
$$= g \circ \alpha \circ \phi(g) \circ f_{|\Lambda}^{-1} \circ \phi(g)^{-1}$$
$$= g \circ \alpha \; g^{-1}_{|\Lambda_g}$$
$$= G(\alpha)$$

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "f_{|\Lambda}"] \arrow[d, "\phi(g)"'] & \Lambda \arrow[d, "\phi(g)"] \\
\Lambda_g \arrow[r, "g"'] & \Lambda_g
\end{tikzcd}$$

ii) $\Psi(inc_{\Lambda_g}) = \phi(g) \rightarrow$ pto fixo hiperbólico para H_g

$\therefore$ inc_{Λ_g} é ponto fixo hiperbólico para G.

Def. Dizemos que $f \in Dif^r(M)$ é um difeomorfismo de Anosov se M é hiperbólica para f.

Teorema: Os difeomorfismos de Anosov são estruturalmente estáveis e formam um aberto de $Dif^r(M)$.

Dem. Seguindo a demonstração do teor. anterior, basta-nos provar que para g próximo de f $\phi(g)(M) = M$

$$\Lambda_f = M \qquad inc_{\Lambda_f} = id_M$$

$\phi(g)$ prox. $id_M \Rightarrow$ grau$(\phi(g))$ = grau$(id_M) = 1$

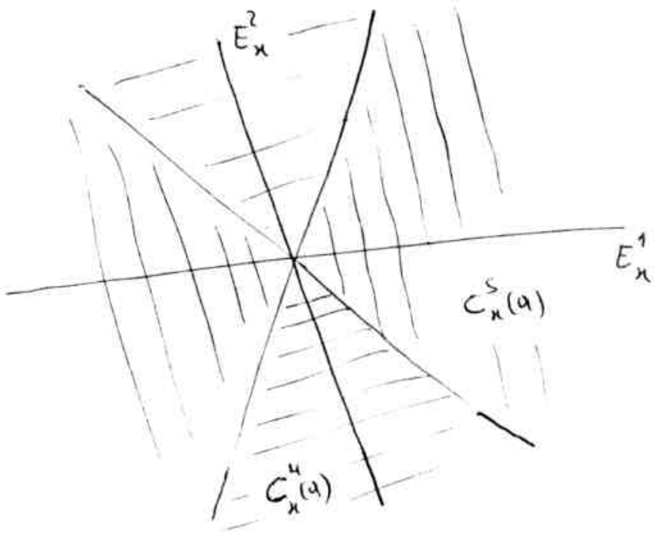
$\Rightarrow \phi(g)$ é sobrejectiva.

Def. Sejam $K \subset M$ um compacto e $(E^1_x)_{x\in K}$, $(E^2_x)_{x\in K}$ famílias de subespaços de T_xM tais que $T_xM = E^1_x \oplus E^2_x$ $\forall x \in K$.

Para $a>0$ definimos os cones

$$C^u_x(a) = \{ v_1+v_2 \in E^1_x \oplus E^2_x : |v_1| \le a\,|v_2| \}$$

$$C^s_x(a) = \{ v_1+v_2 \in E^1_x \oplus E^2_x : |v_1| \ge a\,|v_2| \}$$



Teorema: Seja $K \subset M$ um compacto invariante por $f \in \mathrm{Dif}^k(M)$, $k\geq 1$ e sejam $(C^u_x(a))_{x\in K}$, $(C^s_x(a))_{x\in K}$ como na definição anterior.

Suponhamos que existem $\lambda, \mu > 1$ tais que

1) $\dim(E^i_x) = \dim(E^i_{f(x)})$, $i=1,2$

2) (i) $\|Df(x)\cdot v\| \geq \mu \|v\|$ $\forall x\in K$ $\forall v \in C^u_x(a)$

(ii) $\|Df^{-1}(x)\cdot v\| \geq \mu\|v\|$ $\forall x \in K$ $\forall v \in C^s_x(a)$

3) (i) $Df(x)\cdot C^u_x(a) \subset C^u_{f(x)}(\lambda^{-1}a)$

$Df^{-1}(x)\; C^s_x(a) \subset C^s_{f^{-1}(x)}(\lambda^{-1}a)$

Então K é hiperbólico para f.

32

Dem: Seja $\{f^n(x),\ n\in\mathbb{Z}\}$ uma órbita de f.

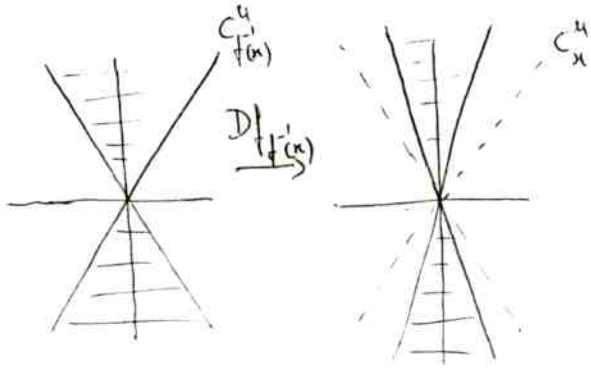
Distinguiremos dois casos

(I) x não é periódico:

Definimos

$$E^u_x = \bigcap_{j\geq 0} Df^j_{f^{-j}(x)}\left(C^u_{f^{-j}(x)}(a)\right)$$

$$E^s_x = \bigcap_{j\geq 0} Df^{-j}_{f^j(x)}\left(C^s_{f^j(x)}(a)\right)$$



Exercício: E^s_x e E^u_x são subespaços vectoriais de T_xM com dimensões d^1_x e d^2_x respectivamente.

Definimos $E^{s,u}_{f^n(x)} = Df^n(x)\left(E^{s,u}_x\right) \quad \forall n\in\mathbb{Z}$.

(II) x é periódico:

Seja p o período de x e $A = Df^p(x) : T_xM \longrightarrow T_xM$

A é hiperbólica:

Se A tivesse um autovalor (complexo) de módulo 1, então existiria $0\neq v\in T_xM$ e $c>0$ tais que

$$c^{-1}\|v\| \leq \|A^n v\| \leq c\|v\| \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

$v\in C^s_x(a)$ contradiz 2) (ii)

$v\in C^u_x(a)$ contradiz 2) (i)

Logo A é hiperbólica.

Definimos E^s_x (resp. E^u_x) o espaço estável (resp. instável) de A. Temos $E^s_x \subset C^s_x(a)$ e $E^u_x \subset C^u_x(a)$.

Para $i = 1, \dots, p$ definimos

$$E^s_{f^i(x)} = Df^i(x)\left(E^s_x\right)$$

$$E^u_{f^i(x)} = Df^i_{(x)}\left(E^u_x\right)$$

Temos então para cada $x \in K$ uma decomposição $T_xM = E^s_x \oplus E^u_x$ satisfazendo:

1) $Df_x\left(E^{s,u}_x\right) = E^{s,u}_{f(x)} \quad \forall x \in K$

2) $\| Df(x) \cdot v \| \leq \mu^{-1} \| v \| \quad \forall x \in K \quad \forall v \in E^s_x$

3) $\| Df^{-1}(x) \cdot v \| \leq \mu^{-1} \| v \| \quad \forall x \in K \quad \forall v \in E^u_x$

Sejam

$\Gamma^s = \{ \sigma : K \to TM$ secção limitada tal que $\sigma(x) \in E^s_x \}$

$\Gamma^u = \{ \sigma : K \to TM$ " " " " $\sigma(x) \in E^u_x \}$

$\Gamma^b(K) = \Gamma^s \oplus \Gamma^u$ e esta é uma decomposição hiperbólica para

$$\begin{aligned} f_\# : \Gamma^b(K) &\longrightarrow \Gamma^b(K) \\ \sigma &\longmapsto f_\#(\sigma) : K \to TM \\ & \qquad x \rightsquigarrow Df_{f^{-1}(x)}\, \sigma\left(f^{-1}(x)\right) \end{aligned}$$

$\therefore$ K é hiperbólico para f.

Obs. Reciprocamente, se K é hiperbólico para entrão temos um campo de cones em K satisfazendo as hipóteses do teorema anterior. Basta tomar $E_x = E_x^{s,u}$, onde $E_x^{s,u}$ são dados pela hiperbolicidade de K.

Corolário: Seja $f \in \mathrm{Dif}^k(M)$, $k \geq 1$ e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico. Existem uma viz. $\mathcal{N}$ de f em $\mathrm{Dif}^k(M)$ e uma viz. U de Λ em M tais que para toda $g \in \mathcal{N}$, qualquer compacto g-invariante contido em U é hiperbólico para g.

Dem: Exercício.

Λ conjunto hiperbólico para $f \in \mathrm{Dif}^k(M)$

Sabemos que dado $\varepsilon > 0$ pequeno existe $\delta > 0$ tq

$$x, y \in \Lambda,\ d(x,y) < \delta \Rightarrow W^s_\varepsilon(x) \pitchfork W^u_\varepsilon(x) = \text{"único ponto"} \overset{\text{def}}{=} [x,y]_\varepsilon$$

$$U_\delta(\Lambda) = \{(x,y) \in \Lambda^2 : d(x,y) < \delta\}$$

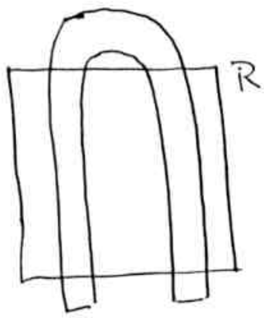
$$[\cdot,\cdot] \quad U_\delta(\Lambda) \longrightarrow M$$
$$(x,y) \rightsquigarrow \text{contínua}$$

Def. Λ tem a <u>estrutura de produto local</u> sse

$$[x,y]_\varepsilon \in \Lambda \quad \forall x, y \in \Lambda$$

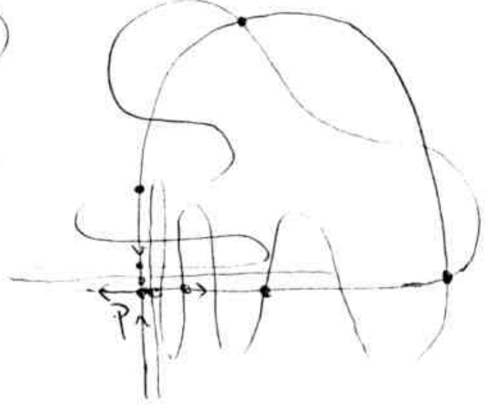
Exemplos

(1)



$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(R)$ tem a estrutura de produto local.

(2)



$\Lambda = \{p\} \cup$ "órbita homoclínica" não tem a estrutura de produto local

(36)

<u>Definição</u>: X e.m. compacto, $f: X \to X$ homeo, $\alpha > 0$.

Uma sequência $\underline{x} = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ diz-se uma <u>α-pseudo-órbita</u> para f se $d(f(x_k), x_{k+1}) < \alpha \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Se $\exists N \geq 0$ tq $x_{k+N} = x_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ dizemos que $\underline{x}$ é uma <u>α-pseudo-órbita periódica</u> e denotamos $\underline{x} = [x_0, \ldots, x_{N-1}, x_N]$.

<u>Definição</u>: $\underline{x} = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ α-pseudo-órbita de f, $\beta > 0$.

Um $y \in X$ diz-se uma <u>β-sombra</u> de $\underline{x}$ se

$$d(f^i(y), x_i) \leq \beta \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

Lema de sombreamento

Λ conjunto hiperbólico com estrutura de produto local.

Dado $\beta>0$ existe $\alpha>0$ tal que qualquer α-pseudoórbita em Λ é β-sombreada por pm ponto em Λ.

Dem: $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ α-pseudoórbita

Af: Basta-nos provar o lema para pseudoórbitas finitas

$[x_{-n},\dots,x_n]$:

y_n sombreia $[x_{-n},\dots,x_n]$

$(y_{n_k})_k$ subsequência convergente para y.

Vejamos que y sombreia $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$

Temos $\quad d(f^i(y_{n_k}),x_i)\le\beta$ para $-n_k\le i\le n_k$

Tomando limite quando $k\to+\infty$

$$d(f^i(y),x_i)\le\beta \quad \text{para } -\infty< i<\infty$$

$\varepsilon>0$ tal que $W^u_\varepsilon(x)$, $W^s_\varepsilon(x)$ estão definidas para todo $x\in\Lambda$.

$\delta>0$ tal que $d(x,y)<\delta \Rightarrow \exists\ [x,y]_\varepsilon\in\Lambda$

$[x_0,\dots,x_n]$ α pseudo-órbita

a determinar

8)

$y_0 = x_0$

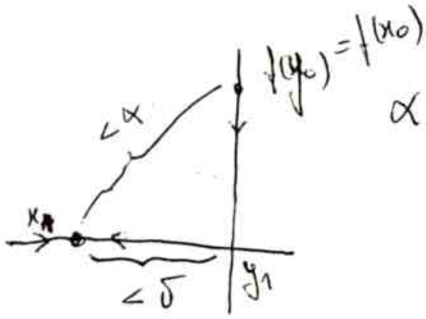
$y_1 = [x_1, f(y_0)]$

$y_2 = [x_2, f(y_1)]$

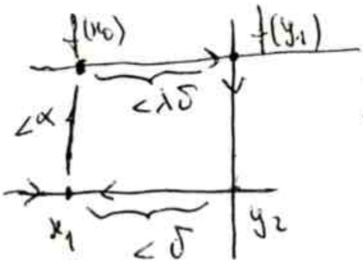
$\vdots$

$y_n = [x_n, f(y_{n-1})]$

Porque existem?

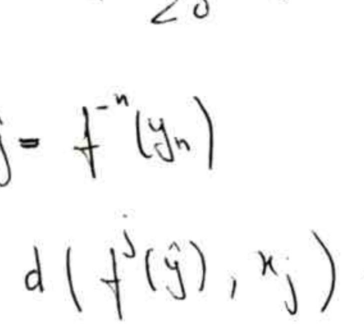


$\alpha: \ d(z,w) < \alpha \Longrightarrow [z, w] \subset W^s_\delta(z)$



$\exists \alpha: \ d(z,w) < \alpha \Longrightarrow [z, W^s_{\lambda\delta}(w)] \subset W^s_\delta(z)$

↳ Usar continuidade de [ ] e o facto de que vale para $w = z$



$\hat{y} = f^{-n}(y_n)$

$$d(f^j(\hat{y}), x_j) \leq d(f^j(\hat{y}); y_j) + \underbrace{d(y_j, x_j)}_{< \delta}$$

$$d(f^j(\hat{y}), y_j) = d(f^{j-n}(y_n), y_j)$$

$$\forall k \quad y_k \in W^u_\varepsilon(f(y_{k-1}))$$
$$\Downarrow$$
$$f^{-\ell}(y_k) \in W^u_{\lambda^\ell \varepsilon}(f^{-\ell+1}(y_{k-1})) \qquad \forall \ell \geq 0$$
$$\Downarrow$$
$$d\left(f^{-\ell}(y_k), f^{-\ell+1}(y_{k-1})\right) \leq \lambda^\ell \varepsilon \qquad \forall \ell \geq 0$$

Então:

$$d(f^j(y), y_j) = d\left(f^{j-n}(y_n), y_j\right)$$
$$\leq d\left(f^{j-n}(y_n), f^{j-n+1}(y_{n-1})\right) + d\left(f^{j-n+1}(y_{n-1}), f^{j-n+2}(y_{n-2})\right) + \dots + d\left(f^{-1}(y_{j+1}), y_j\right)$$
$$\leq \lambda^{n-j}\varepsilon + \dots + \lambda\varepsilon$$
$$\leq \frac{\lambda\varepsilon}{1-\lambda}$$

Escolhemos ε e δ de modo a que

$$\frac{\lambda\varepsilon}{1-\lambda} + \delta < \beta$$

Versão forte do lema de sombreamento.

Λ conjunto hiperbólico para f.
$\exists\, U$ viz. de Λ, $K>0$ ~~tal que~~, $\alpha_0>0$ tal que se $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ é uma α pseudo-órbita em U $(\alpha<\alpha_0)$ existe $y\in U$ tal que $d(f^i(y), x_i) < K\alpha \quad \forall i\in\mathbb{Z}$

(ver adiante)

Obs.

(1) Se Λ é ε-expansivo e $\beta < \varepsilon/2$ então a β-sombra é única:

$$\left.\begin{array}{ll} d(f^i(y), x_i) < \beta & \forall i \in \mathbb{Z} \\ d(f^i(y'), x_i) < \beta & \forall i \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow d(f^i(y), f^i(y')) < 2\beta < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$y = y'.$$

(2) Se Λ é ε-expansivo $(\beta < \varepsilon/2)$ e a α-pseudo órbita é periódica

$(d(f(x_n), x_0) < \alpha$ com algum $n > 0)$ então existe

$y \in \Lambda$ com $f^n(y) = y$ e $d(f^i(y), f^i(x)) < \beta \quad \forall 0 \leq i \leq n$

Tomar a α-pseudo órbita

$$\ldots x_0, \ldots, x_n, x_0, \ldots, x_n, \ldots$$

$f^n(y)$ e y são duas β-sombras.

Anosov Closing lemma:

f Anosov $\Rightarrow$ f Axioma A.

Dem. É preciso ver que os pontos periódicos são densos em $\Omega(f)$.

$x \in \Omega(f)$

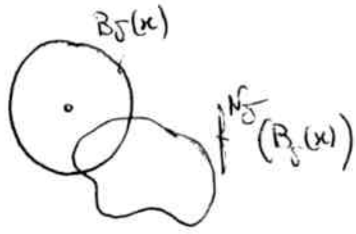
$\beta < \frac{1}{2}$(const. expansividade)

α dado pelo lema de sombreamento

($\hookrightarrow$ é aplicável, porque se H é hiperbólica então tem estrutura de produto local.

Seja $0 < \delta < \alpha/2$

$B_\delta(x)$ viz. de x



$\exists N_\delta$ tq $f^{N_\delta}(B_\delta(x)) \cap B_\delta(x) \neq \phi$

$\exists y \in B_\delta$ tq $f^{N_\delta}(y) \in B_\delta(x)$ $\qquad y_i = f^i(y)$

$\ldots y_{N_\delta}, y_0, y_1, \ldots, y_{N_\delta}, y_0, \ldots$ α pseudo órbita

p β-sombra

Obs (2) $\Rightarrow f^{N_\delta}(p) = p$

$$d(p,x) < \underbrace{d(p,y)}_{<\beta} + \underbrace{d(y,x)}_{<\delta}$$

Tomando $\beta + \delta$ pequeno, temos o pretendido.

<u>Def.</u> Λ conjunto hiperbólico para $f \in \mathrm{Dif}^k(M)$, $k \geq 1$
Dizemos que Λ é <u>localmente maximal</u> se existe U vizinhança de Λ tq

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$$

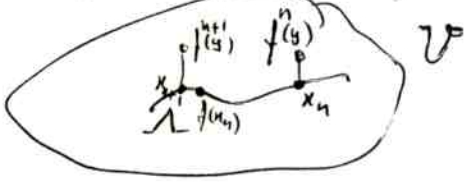
Proposição: Λ conjunto hiperbólico para $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$

Λ possui estrutura de produto local

$\iff \Lambda$ é localmente maximal.

Dem:

$(\Longrightarrow)$ $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$ vizinhança de Λ do tipo $\{x \in M \mid d(x,\Lambda) < \gamma\}$



$\Downarrow$

$\forall n \in \mathbb{Z} \quad f^n(y) \subset U$

$\beta > 0$ pequeno

$\downarrow$

α dado pelo lema do sombreamento

$n \rightsquigarrow x_n \in \Lambda$ tq $d(f^n(y), x_n) < \gamma$

$$d(f(x_n), x_{n+1}) \leq \underbrace{d(f(x_n), f(f^n(y)))}_{\alpha/2} + \underbrace{d(f^{n+1}(y), x_{n+1})}_{<\gamma}$$

$\gamma \left(< \frac{\alpha}{2}\right)$ tq $d(x,y) < \gamma \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \alpha/2$

$\therefore (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é α-pseudo órbita

$\exists z \in \Lambda$ β-sombra

$$d(f^n(z), f^n(y)) \leq \underbrace{d(f^n(z), x_n)}_{<\beta} + \underbrace{d(x_n, f^n(y))}_{<\gamma}$$

$\beta + \gamma <$ const. expansividade

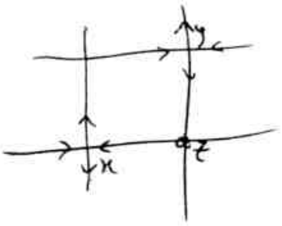
$\Longrightarrow y = z \in \Lambda$.

$(\Leftarrow)$ U viz. de Λ tq $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U) = \Lambda$

$U \supset U_\varepsilon = \{ x \in M \mid d(x, \Lambda) < \varepsilon \}$

$\hookrightarrow$ $\varepsilon > 0$ tq $W^{u,s}_\varepsilon(x)$ existe $\forall x \in \Lambda$

$z \in W^u_\varepsilon(y) \cap W^s_\varepsilon(x) \Rightarrow z \in \Lambda$?



$z \in W^s_\varepsilon(x) \Rightarrow d(f^n(z), f^n(x)) \leq \lambda^n \varepsilon < \varepsilon$

$z \in W^u_\varepsilon(y) \Rightarrow d(f^{-n}(z), f^{-n}(y)) \leq \lambda^n \varepsilon < \varepsilon$

Como $f^n(x), f^{-n}(y) \in \Lambda$ $\forall n \geq 0$, temos que $f^n(z) \in U_\varepsilon \subset U$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

$\therefore z \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U) = \Lambda$

<u>Proposição</u>: Λ hiperbólico com estrutura de produto local

$\Downarrow$

$$W^s(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x) \quad \text{e} \quad W^u(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x)$$

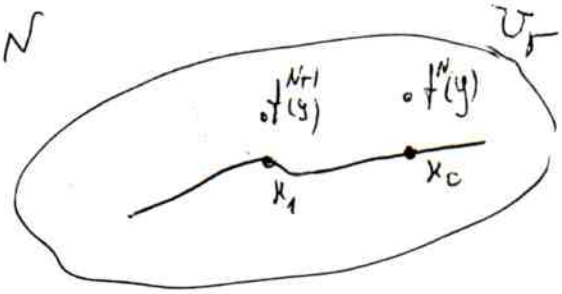
<u>Dem</u>: Caso W^s.

Obviamente $W^s(x) \subset W^s(\Lambda)$ $\forall x \in \Lambda$

$y \in W^s(\Lambda)$

$U_\gamma = \{ x \in M \mid d(x, \Lambda) < \gamma \}$

(44) $\exists\, N>0$ tq $f^n(y) \in U_\gamma \ \forall n \geq N$



Para $n \geq 0$ tomamos $x_n \in \Lambda$ tal que

$$d(f^{N+n}(y), x_n) \leq \gamma$$

Para $n<0$ definimos $x_n = f^n(x_0)$

$\beta = \varepsilon/2 \to$ dado pelo Teor. da Var. Estável.

α dado pelo lema do sombreamento.

Af. γ pequeno $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ α-pseudo-órbita em Λ.

Basta ver para $n \geq 0$

$$d(f(x_n), x_{n+1}) \leq d(f(x_n), f(f^{N+n}(y))) + d(\overbrace{f(f^{N+n}(y))}^{f^{N+n+1}}, x_{n+1})$$

$$\leq \frac{\alpha}{2} + \gamma < \alpha$$

$\gamma > 0$ tq $d(x,y) < \gamma \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \alpha/2$ $\quad (\gamma < \min\{\varepsilon/2, \alpha/2\})$

$\exists\, x \in \Lambda$ β sombra de $(x_n)_n$

$n \geq 0$ $\quad d(f^n(x), f^{N+n}(y)) \leq d(f^n(x), x_n) + d(x_n, f^{N+n}(y))$

$$\leq \beta + \gamma < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$\therefore f^N(y) \in W^s_\varepsilon(x)$

$\therefore y \in W^s(x)$.

Proposição: Λ conjunto hiperbólico com estrutura de produto local tal que $f|_\Lambda$ é top mixing. Então:

(1) $\forall x\in\Lambda$ $W^s(x)\cap\Lambda$ e $W^u(x)\cap\Lambda$ são densos em Λ

(2) $\forall x,y\in\Lambda$ $W^s(x)\cap W^u(y)\cap\Lambda$ é denso em Λ

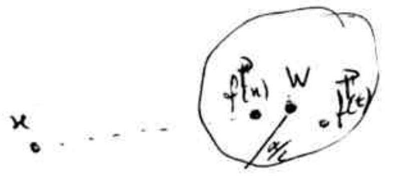
(3) $\forall x\in\Lambda$ $W^s(x)$ é denso em $W^s(\Lambda)$

(Análogo para $W^u(x)$).

Dem: (1) $x\in\Lambda$

Provaremos que dado $z\in\Lambda$ $\exists$ ponto de $W^s(x)\cap\Lambda$ arbitrariamente próximo de z.

Seja $w\in\omega(x)$



$\delta>0$, $\begin{cases}\beta<\delta/2\\ \beta<\varepsilon \to \text{em est. local}\end{cases}$

$f|_\Lambda$ top mixing $\Rightarrow \exists N: n\geq N \Rightarrow f^n(B_{\delta/2}(z)\cap\Lambda)\cap B_\delta(w)\neq\emptyset$

Tomemos $p\in\mathbb{N}$ e $t\in B_{\delta/2}(z)\cap\Lambda$ tais que

$$d(f^p(x),w)<\alpha/2,\quad d(f^p(t),w)<\alpha/2$$

$$\begin{matrix}\dots & f^{-1}(t), & t, & f(t), & \dots, & f^{p-1}(t), & f^p(x), & f^{p+1}(x), & \dots\\ & x_{-1} & x_0 & x_1 & & x_{p-1} & x_p & x_{p+1} & \end{matrix}$$ α pseudo órbita

$u\in\Lambda$, β sombrea: $d(f^i(u),x_i)<\beta$ $\forall i\in\mathbb{Z}$

Em particular $d(f^n(u),f^n(x))$ para $n\geq p$

logo $\quad f^p(u) \in W^s_\varepsilon(f^p(x))$

$$\therefore\ u \in W^s(x)$$

$$d(u,z) < d(u,t) + d(t,z)$$
$$< \beta + \delta/2$$
$$< \delta.$$

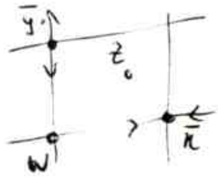
(2) $x, y \in \Lambda$

$W^s(x) \cap \Lambda$ denso em Λ.

$W^u(y) \cap \Lambda$ denso em Λ.

Sejam $z \in \Lambda$ e $R > 0$.

$$\exists\ \varepsilon < R/2,\ \delta > 0 \text{ tais que } \underset{u,v\in\Lambda}{d(u,v) < \delta} \Rightarrow [u,v]_\varepsilon \in \Lambda.$$



$$\exists\ \bar{x} \in W^s(x) \cap \Lambda \ :\ d(\bar{x}, z) < \begin{cases} R/2 \\ \delta/2 \end{cases}$$

$$\exists\ \bar{y} \in W^u(y) \cap \Lambda \ :\ d(\bar{y}, t) < \begin{cases} R/2 \\ \delta/2 \end{cases} \qquad \text{(por (1))}$$

$$w = [\bar{x}, \bar{y}]_\varepsilon \in \Lambda$$

$$d(w,z) \le d(w,\bar{x}) + d(\bar{x},z)$$
$$\le \varepsilon + R/2$$
$$< R$$

$$w \in \underset{\substack{\parallel \\ W^s(x)}}{W^s(\bar{x})} \cap \underset{\substack{\parallel \\ W^u(y)}}{W^u(\bar{y})} \cap \Lambda$$

(3) Λ tem est. prod. local $\Rightarrow$ $W^s(\Lambda) = \bigcup_{x\in\Lambda} W^s(x)$

$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n} \bigcup_{x\in\Lambda} W^s_\varepsilon\left(f^n(x)\right)$$

Definimos $W^s_\varepsilon(\Lambda) = \bigcup_{x\in\Lambda} W^s_\varepsilon(x)$

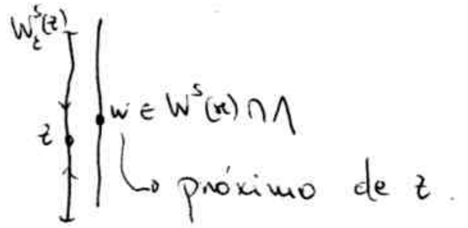
Basta ver que $W^s(x) \cap W^s_\varepsilon(\Lambda)$ é denso em $W^s_\varepsilon(\Lambda)$.

Sabemos que

$W^s(x) \cap \Lambda$ é denso em Λ

$W^s_\varepsilon(w)$ varia continuamente com w.

Fixemos $z \in \Lambda$



$W^s_\varepsilon(w)$ próxima de $W^s_\varepsilon(z)$ e $W^s(x) \supset W^s_\varepsilon(w)$

$$\Downarrow$$

$W^s(x) \cap W^s_\varepsilon(\Lambda)$ é denso em $W^s_\varepsilon(\Lambda)$.

Λ conjunto hiperbólico para $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$

d: métrica Riemanniana em M

Lema de Sombreamento I

Suponha que Λ tem estrutura de produto local.

Então, dado $\beta > 0$ pequeno, $\exists\ \alpha > 0$ t.q. p/ $\forall$ α-pseudo-órbita $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ contida em Λ, $\exists\ x \in \Lambda$ t.q.

$$d(f^i x, x_i) \leq \beta, \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}.$$

(Se β é pequeno, da expansividade segue que x é único)

Lema de Sombreamento II (Λ hiperbólico)

Existem vizinhança U de Λ e constante $\theta > 0$ com a seguinte propriedade:

$\forall\ \alpha > 0$ e $\forall$ α-pseudo-órbita $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ contida em U, $\exists\ x \in M$ t.q.

$$d(f^i x, x_i) \leq \theta \alpha, \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}$$

— // —

Unicidade de x no Lema II

Vale a seguinte propriedade de expansividade:

"$\exists\ \varepsilon > 0$ e U viz. de Λ t.q. se $y \neq y'$ e $f^i y, f^i y' \in U$ $\forall i \in \mathbb{Z}$, então

$$\sup_i d(f^i y, f^i y') > \varepsilon \text{ .''}$$

Dem.:

Tome U tal que $\forall$ conjunto invariante em U seja hiperbólico para f. Logo

$$y, y' \in L = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(U)$$

e vale a propriedade de expansividade p/ L.

Portanto, para U e α pequenos, x do Lema II é único.

Obs: $x \in L = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(U)$, obviamente.

Proposição São equivalentes:

(i) Λ tem estrutura de produto local

(ii) Λ é localmente maximal

(iii) $\exists\ \alpha_0 > 0$ e $U_0 \supset \Lambda$ t.q. se $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ é uma α_0-pseudo-órbita em U_0 e $x \in M$ satisfaz $d(f^i x, x_i) < \theta \alpha_0 \implies x \in \Lambda$.

Já demonstrado: (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

(i) $\Rightarrow$ (iii)

(É o Lema de Sombreamento I disfarçado)

(1) Tome $\beta > 0$ pequeno para valer o Lema I com unicidade.

(2) Seja $\alpha_1 = \alpha(\beta)$ dada pelo Lema I.

(3) Seja $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{U}$ t.q. vale unicidade no Lema II, e seja θ a constante garantida no Lema II. Faça ainda $\tilde{\alpha} \le \alpha_1$, $\tilde{\alpha} \le \beta/\theta$ e $\tilde{\alpha} \le \dfrac{\varepsilon}{2(\cancel{3}\theta + \frac{1}{3})}$

(4) Escolhe $U_0 \subset \tilde{U}$ tal que

- U_0 é η-viz. de Λ, $\eta \le \tilde{\alpha}/3$
- $d(z,z') \le \eta \Rightarrow d(fz, fz') \le \tilde{\alpha}/3$

(5) Escolhe $\alpha_0 \le \tilde{\alpha}/3$. ~~(e t.q. $\alpha_0 \le \frac{\varepsilon}{2(3\theta+1)}$)~~, onde ε é a constante de expansividade na viz. U_0.

Se $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ é α_0-pseudo-órbita em U_0, então $\exists$ $(\bar{x}_i)_{i\in\mathbb{Z}} \subset \Lambda$ com $d(x_i, \bar{x}_i) \le \eta$.

$(\bar{x}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ é $\tilde{\alpha}$-pseudo-órbita

$$d(f\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}) \le \underbrace{d(f\bar{x}_i, fx_i)}_{\le \tilde{\alpha}/3} + \underbrace{d(fx_i, x_{i+1})}_{\le \alpha_0 \le \tilde{\alpha}/3} + \underbrace{d(x_{i+1}, \bar{x}_{i+1})}_{\le \eta \le \tilde{\alpha}/3} \le \tilde{\alpha}$$

Pelo Lema II, $\exists\,!\ x$ t.q. $d(f^i x, \bar{x}_i) \leq \theta\tilde{\alpha} \leq \beta$.

Por outro lado, pelo Lema I, $\exists\,!\ y \in \Lambda$ t.q.

$$d(f^i y, \bar{x}_i) \leq \beta$$

$$\Rightarrow\ x = y \in \Lambda .$$

Mas x também sombreia $(x_i)_i$:

$$d(f^i x, x_i) \leq \underbrace{d(f^i x, \bar{x}_i)}_{} + \underbrace{d(\bar{x}_i, x_i)}_{}$$

$$\leq \theta\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}/3 = (\cancel{3}\theta + \tfrac{1}{3}) . \tilde{\alpha} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Mas já sabemos que $\exists\,!\ x'$ t.q.

$$d(f^i x', x_i) \leq \theta\alpha_0 \leq \frac{\theta}{\theta + \frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{6}\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{6} .$$

Logo $d(f^i x', f^i x) \leq \varepsilon$, $\forall\ i \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow\ x = x' .$$

<u>(iii) $\Rightarrow$ (ii)</u>

Seja U_0 como em (iii) e seja x t.q.

$f^i x \in U_0$, $\forall\ i \in \mathbb{Z}$ $\left(x \in \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(\bar{U}_0) \right)$. Então

x sombreia trivialmente $\{f^i x\}_i \Rightarrow x \in \Lambda$.

Aplicação do Lema de Sombreamento II

Proposição: Seja Λ hiperbólico localmente maximal para f. Então $\exists$ U viz. de Λ e $\mathcal{U}$ viz. de f t.q.

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U) = \Lambda \quad , \quad \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(U) = \Lambda_g \quad , \forall\, g\in\mathcal{U} \, ,$$

e onde Λ_g é a imagem de Λ pela conjugação ϕ_g dada na continuação hiperbólica.

Outra formulação: se Λ é localmente maximal para f, então $\Lambda_g = \phi_g(\Lambda)$ também é para g, $g\in\mathcal{U}$.

Para a demonstração, usaremos a seguinte generalização da propriedade de expansividade:

Lema: "$\exists$ $\mathcal{U}$ viz. de f e $\varepsilon>0$ t.q. se $g\in\mathcal{U}$ e $x\in\Lambda$, $\exists\,!$ y tal que

$$d(f^n x, g^n y) < \varepsilon \, , \quad \forall\, n\in\mathbb{Z}"$$

Dem. da Prop.

Seja U t.q. $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$.

Já sabemos que

$$g \in \mathcal{U} \Rightarrow \Lambda_g \subset U \Rightarrow \Lambda_g \subset \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(U).$$

$\vdash$: $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(U) \subset \Lambda_g$

$$y \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(U) \Rightarrow g^n y \in U \quad , \forall n$$

Quero ver que : $\exists \ x \in \Lambda$ t.q. $\Phi_g(x) = y$.

Candidato: $\{g^n y\}_n$ é pseudo-órbita para f, pois

$$d\left(f(g^n y), g^{n+1}(y) \right) \le \| f - g \|_0$$

Se $\mathcal{U}$ peq., U peq.,

$$\Rightarrow \exists ! \ x \in \Lambda \quad \text{t.q.} \quad d(f^n x, g^n y) \le \Theta . \| f-g \|_0 \underset{\mathcal{U}\text{ peq.}}{<} \varepsilon$$

$\Phi_g(x) = y$ Chame $z = \Phi_g(x)$.

$$d(f^n x, g^n z) =$$
$$= d\left(f^n x, g^n \Phi_g(x)\right) = d\left(f^n x, \Phi_g f^n x\right) \underset{\mathcal{U}\text{ peq.}}{<} \varepsilon$$

Da expansividade, $y = z = \Phi_g(x)$.

O Lema

$\exists$ $\varepsilon > 0$ e $\mathcal{U} \ni f$ t.q.

$\forall x \in \Lambda$, $\exists !\, y$ t.q. $d(f^n x, g^n y) < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Dem:

$x \in \Lambda$. $\boxed{\text{Candidato: } y = \Phi_g(x)}$,

onde $\Phi_g \in B(\Lambda, M)$ é a única conjugação entre $f|\Lambda$ e $g|\Lambda_g$ na viz. da identidade.

É bom candidato:

$$d(f^n x, g^n \Phi_g(x)) = d(f^n x, \Phi_g f^n x) \underset{\mathcal{U} \text{ pef.}}{<} \varepsilon$$

Unicidade:

Suponha $z \neq y$ t.q. $d(f^n x, g^n z) < \varepsilon$.

Defina $\tilde{\Phi}_g : \Lambda \to M$ por

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_g(p) = g^n(z) & \text{se } p = f^n x,\ n \in \mathbb{Z} \\ \tilde{\Phi}_g(p) = \Phi_g(p) & \text{se } p \notin \{f^n x\}_{n \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

$$\|\tilde{\Phi}_g - id\| \leq \begin{cases} d(f^n x, f^n z) < \varepsilon \\ \|\Phi_g - id\| \end{cases} \Rightarrow \tilde{\Phi}_g \text{ está na viz. da identidade}$$

$\tilde{\Phi}_g$ é conjugação: (formal)

$$\begin{cases} g\tilde{\Phi}_g(p) = g\tilde{\Phi}_g(f^n x) = g^{n+1} z = \tilde{\Phi}_g(f^{n+1} x) = \tilde{\Phi}_g(f(p)) \\ g\tilde{\Phi}_g(p) = g\Phi_g(p) = \Phi_g(f(p)) = \tilde{\Phi}_g(f(p)). \end{cases}$$

~~18~~ 56

Teorema de ponto fixo (para usar no Lema de Sombreamento II adiante)

E espaço de Banach, $T: E \circlearrowleft$ isomorfismo linear hiperbólico

T é λ-hiperbólico, $| \ |$ norma adaptada.

$f: E \to E$ Lipschitz t.q.

$$\varepsilon = \mathrm{Lip}(f - T) < \varepsilon_0 = 1 - \lambda .$$

Então f tem um único ponto fixo $p \in E$ e temos:

$$|p| < \frac{1}{\varepsilon_0 - \varepsilon} |f(0)| .$$

Prova: $E = E_s \oplus E_u$, $|x_s + x_u| = \max(|x_s|, |x_u|)$,

$P_s: E \to E_s$, $P_u: E \to E_u$ projeções canônicas,

$f_s = P_s \circ f$, $f_u = P_u \circ f$ coordenadas de f na decomposição, isto é:

se $x = (x_s, x_u)$,

$$f(x) = f(x_s, x_u) = (f_s(x_s, x_u), f_u(x_s, x_u)) .$$

Vamos definir $\bar{f}$ contração que tenha os mesmos pontos fixos da f.

$$\boxed{\bar{f}(x_s, x_u) = \left(f_s(x_s, x_u), \ x_u + T_u^{-1}\left(x_u - f_u(x_s, x_u)\right) \right)}$$

• mesmos pontos fixos

$f(x_s, x_u) = (x_s, x_u) \Rightarrow \bar{f}(x_s, x_u) = (x_s, x_u + T_u^{-1}(0)) = (x_s, x_u)$

$\bar{f}(x_s, x_u) = (x_s, x_u) \Rightarrow f_s(x_s, x_u) = x_s$

Lema de Sombreamento II

$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ $\quad \Lambda$ hiperbólico para f

d: métrica Riemanniana em M.

Teorema $\exists$ vizinhança U de Λ e constante $\theta > 0$ com a seguinte propriedade:

$\forall\, \alpha > 0$ e $\forall$ α-pseudo-órbita $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ contida em U, $\exists\, x \in M$ t.q.

$$d(f^i x, x_i) \leq \theta \alpha \quad , \forall\, i \in \mathbb{Z}.$$

Dem:

Idéia: transformar em problema de seção invariante no fibrado.

(1) Podemos assumir $\alpha < \alpha_0$.

Se $\alpha \geq \alpha_0$, para $\forall$ órbita de $x \in \Lambda$ ($\subset U$ pef.),

$$d(f^i x, x_i) < (\operatorname{diam} \Lambda + 1) = \theta\, \alpha_0 \leq \theta \alpha \,,$$

onde $\quad \theta = \alpha_0^{-1} \cdot (\operatorname{diam} \Lambda + 1)$.

(2) Construção do fibrado

U pequena.

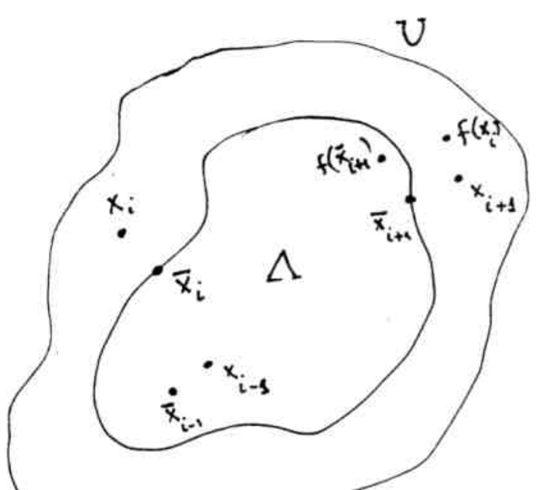
$\forall\, i \in \mathbb{Z}$, escolhemos $\bar{x}_i \in \Lambda$ t.q.

$x \in \Lambda \Rightarrow d(x, x_i) \geq d(\bar{x}_i, x_i)$

($\sup_i d(x_i, \bar{x}_i)$ é determinado por U)

$\Downarrow$

$f(\bar{x}_i)$ está próximo de $\bar{x}_{i+1}$



<u>Notação</u>: $E = TM|\Lambda$, $F = Tf|\Lambda$

e $(|\ |_x)_{x\in\Lambda}$ família de normas adaptadas.

Seja λ t.q.

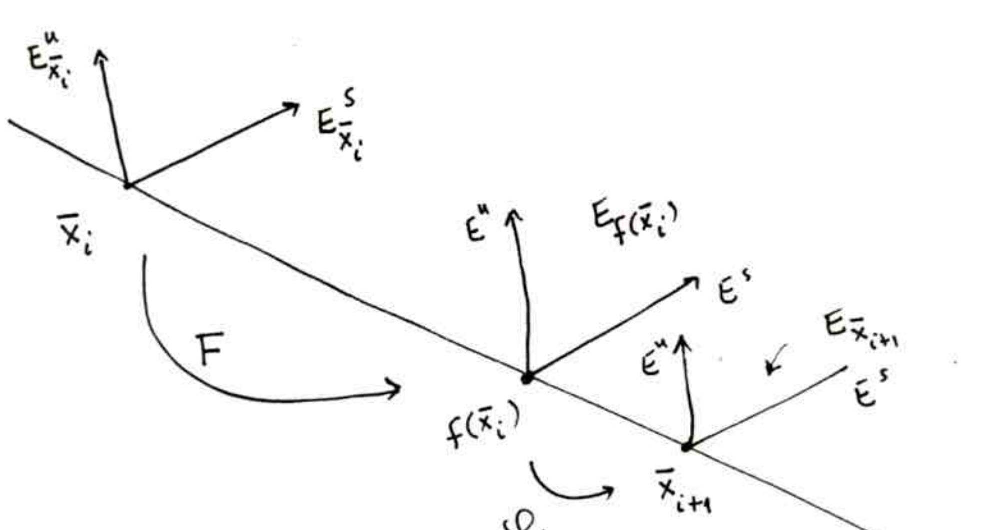
$$|F^n(v)|_{f^n(x)} \leq \lambda^n \cdot |v|_x \ , \quad v \in E^s_x$$

$$|F^{-n}(v)|_{f^{-n}x} \leq \lambda^n |v|_x \ , \quad v \in E^u_x .$$

Escolha isomorfismo $\varphi_i : E_{f(\bar{x}_i)} \longrightarrow E_{\bar{x}_{i+1}}$ t.q.

(a) $\varphi_i(E^s_{f(\bar{x}_i)}) = E^s_{\bar{x}_{i+1}}$, $\varphi_i(E^u_{f(\bar{x}_i)}) = E^u_{\bar{x}_{i+1}}$ (conserva subespaços)

(b) $|\varphi_i \circ F|_{E^s_{\bar{x}_i}}| \leq \lambda' = \frac{1+\lambda}{2}$, $|\varphi_i \circ F|_{E^u_{\bar{x}_i}}| \leq \lambda'$ (não se perde a hiperbolicidade)



<u>Notação</u>: $E_i = E_{\bar{x}_i}$, $|\ |_i = |\ |_{\bar{x}_i}$

$F_i : E_i \to E_{i+1}$, $F_i = \varphi_i \circ F_{\bar{x}_i}$

$v_i = \exp^{-1}_{\bar{x}_i}(x_i) \in E_i$: pseudo.órbita vista em E_i

Agora trazemos, pela exponencial, a f numa viz. de $\bar{x}_i$:

$\exists \quad \tilde{F}_i : E_i \longrightarrow E_{i+1} \quad (i \in \mathbb{Z}) \quad$ t.q.

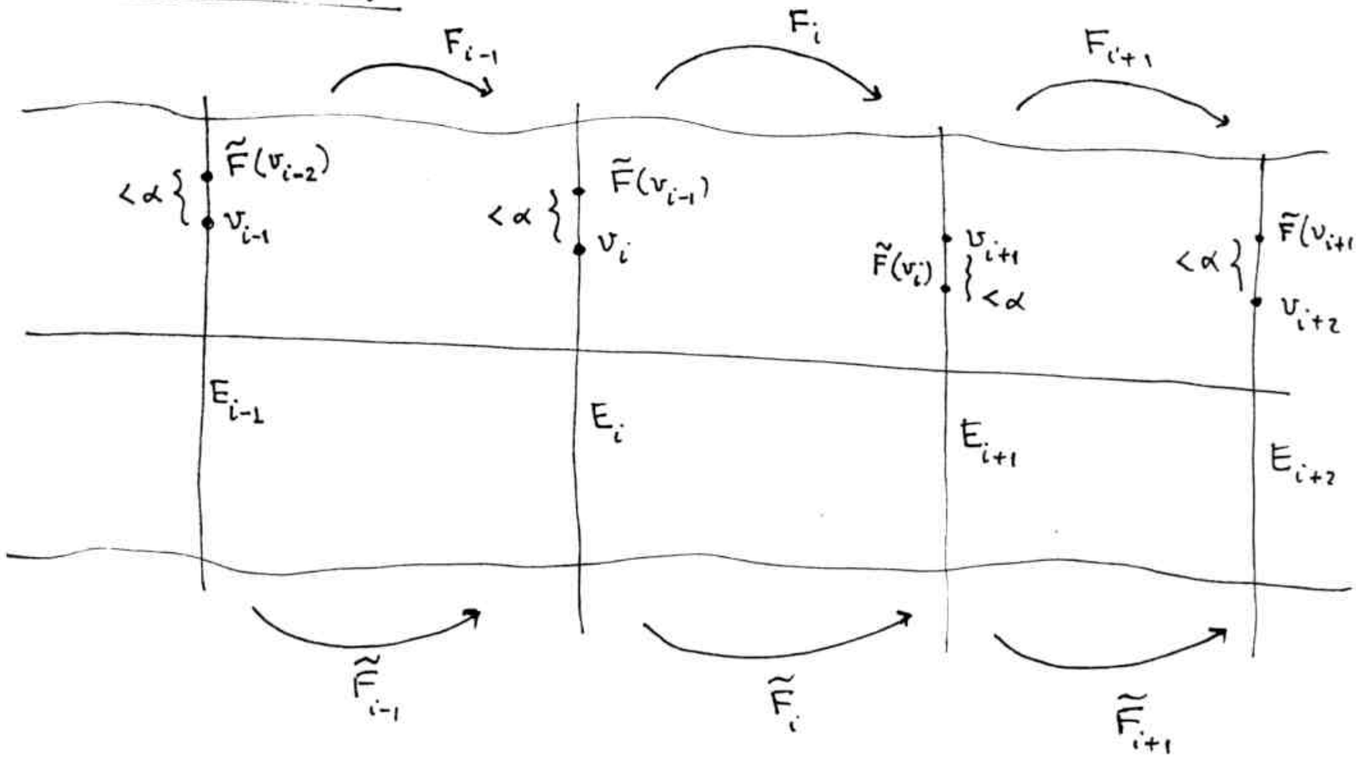
(c) $\tilde{F}_i(v) = \exp^{-1}_{\bar{x}_{i+1}} \circ f \circ \exp_{\bar{x}_i}(v)$, $|v|$ pequena

(d) $\tilde{F}_i$ é Lipschitz, $\forall\, i \in \mathbb{Z}$ e

$\sup_i \mathrm{Lip}(\tilde{F}_i - F_i) \leq \varepsilon = \frac{1}{2}(1-\lambda')$.

se for preciso, diminua α_0 e υ para tudo cair nesta viz.

Situação até agora



(3) Solução

Queremos: uma órbita por $\tilde{F}$ que sombreie $\{v_i\}$ e esteja tanto mais próxima de $\{v_i\}$ quanto menor seja α.

Para usar o Teorema de Ponto Fixo, o ideal é colocar $\{v_i\}$ como o zero das coordenadas.

Seja $\mathcal{E} = \{ (w_i)_{i\in\mathbb{Z}} ,\ w_i \in E_i ,\ \sup_i |w_i|_i = \|(w_i)_{i\in\mathbb{Z}}\| < +\infty \}$

$(F_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ e $(\tilde{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ induzem de maneira convencional respectivamente $\mathcal{F}_0 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ automorfismo linear hiperbólico e $\tilde{\mathcal{F}}_0 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, com $\mathrm{Lip}(\tilde{\mathcal{F}} - \mathcal{F}) < \varepsilon$.

A maneira convencional seria:

$$\mathcal{F}_0\left((w_i)_{i\in\mathbb{Z}} \right) = (w_i')_{i\in\mathbb{Z}} \quad \text{onde} \quad w_{i+1}' = F_i(w_i)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_0\left((w_i)_{i\in\mathbb{Z}} \right) = (w_i')_{i\in\mathbb{Z}} \quad \text{onde} \quad w_{i+1}' = \tilde{F}_i(w_i)$$

<u>Mudança de coordenadas</u>:

$$u_i = w_i - v_i \ , \quad \forall\ i \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{tikzcd}
u_i \arrow[d, mapsto] & E_i \arrow[r] \arrow[d] & E_{i+1} & u_{i+1} = w_{i+1} - v_{i+1} \\
w_i = u_i + v_i & E_i \arrow[r, "F_i, \tilde{F}_i"'] & E_{i+1} \arrow[u] & w_{i+1} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Nas novas coordenadas:

$$u_i \longmapsto u_i + v_i \longmapsto F_i(u_i + v_i) \longmapsto F_i(u_i + v_i) - v_{i+1}$$ (o mesmo p/ $\tilde{F}$)

As novas definições são:

$$\mathcal{F}\left((u_i)_{i\in\mathbb{Z}} \right) = (u_i')_{i\in\mathbb{Z}} \quad \text{onde} \quad u_{i+1}' + v_{i+1} = F_i(u_i+v_i)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}\left((u_i)_{i\in\mathbb{Z}} \right) = (u_i')_{i\in\mathbb{Z}} \quad \text{onde} \quad u_{i+1}' + v_{i+1} = \tilde{F}_i(u_i+v_i)$$

Essa mudança de coordenadas não altera o fato de que:

- $\tilde{\mathcal{F}}$ é Lipschitz
- $\mathrm{Lip}(\mathcal{F}-\tilde{\mathcal{F}}) \le \varepsilon = \frac{1}{2}(1-\lambda')$
- $\mathcal{F}$ é λ'-hiperbólico.

Então $\exists$ $(\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ponto fixo de $\tilde{\mathcal{F}}$ tal que:

$$\| (\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}} \| < \frac{2}{(1-\lambda')} \| \tilde{\mathcal{F}}(0) \| .$$

Mas

$$\| \tilde{\mathcal{F}}(0) \| = \sup_i | \tilde{F}_i(v_i) - v_{i+1} |_{i+1} < \text{const.}\, \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{|\omega_i|_i < \text{const.}\, \alpha}$$

Chame $\bar{v}_i = \omega_i + v_i$ (ω_i nas coordenadas originais)

$$\Rightarrow \quad \sup_i |\bar{v}_i - v_i| \le \text{const.}\, \alpha \qquad (\mathrm{I})$$

e

$$\tilde{F}(\bar{v}_i) = \tilde{F}(\omega_i + v_i) = \omega_{i+1} + v_{i+1} = \bar{v}_{i+1} \quad (\mathrm{II})$$

Chame

$$x = \exp_{\bar{x}_0}(\bar{v}_0)$$

$(\mathrm{II}) \Rightarrow \quad f^i x = \exp_{\bar{x}_i}(\bar{v}_i)$

$(\mathrm{I}) \Rightarrow \quad d(f^i x, x_i) \le \text{const.}\, |\bar{v}_i - v_i| \le \text{const.}\, \alpha .$

Conjuntos Invariantes

$f: M \to M$ homeo., M compacta

Def $\quad Per(f) = \{ x \in M ;\ f^k x = x$ para algum $k \in \mathbb{Z} \}$

= conjunto dos pontos periódicos de f

Def $\quad Rec(f) = \{ x \in M ;\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $d(f^k x, x) < \varepsilon \}$

= conjunto dos pontos recorrentes de f

Também:

$$Rec_{\pm}(f) = \{ x \in M ;\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ k \gtrless 0 \text{ t.q. } d(f^k x, x) < \varepsilon \}$$

e $\quad Rec(f) = Rec_+(f) \cup Rec_-(f)$.

Def $\quad \omega_f(x) = \{ y \in M ;\ \exists$ seq. $n_i \to \infty$ com $f^{n_i}(x) \to y \}$

$\alpha_f(x) = \{ y \in M ;\ \exists$ seq. $n_i \to -\infty$ com $f^{-n_i}(x) \to y \}$

são os conjuntos ω- e α-limites de x.

(ponto de acumulação das órbitas positiva e negativa de x)

$$L_+(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \omega_f(x)} \qquad L_-(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \alpha_f(x)}$$

$$L(f) = L_+(f) \cup L_-(f)$$

é o conjunto limite de f.

<u>Def</u>: $\Omega(f) = \{x \in M;\ \forall\, U \ni x,\ \exists\, k \text{ t.q. } f^k(U) \cap U \neq \emptyset\}$

conjunto <u>não-errante</u> de f

<u>Def</u>: $R(f)$ = conjunto dos pontos <u>recorrentes</u> <u>por cadeia</u> de f

$x \in R(f)$ se para qualquer $\alpha > 0$, $\exists\ (x_i)_{i=0}^{k}$ α-pseudo órbita periódica com $x_0 = x_k = x$.

$d(f(x_i), x_{i+1}) < \alpha$, $\forall\ 0 \leq i < k$

<u>Proposição</u>:

$$Per(f) \subset \overline{Per(f)} \subset Rec(f) \subset \overline{Rec(f)} \subset L(f) = \overline{L(f)} \subset \Omega(f) = \overline{\Omega(f)} \subset R(f) = \overline{R(f)}$$

(de maneira curta $\overline{Per(f)} \subset \overline{Rec(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset R(f)$)

Tb: $Per(f) \subset Rec_+(f) \cap Rec_-(f)$.

<u>Exercício</u>:

- relacionar todas as definições com os exemplos conhecidos
- provar inclusões e igualdades
- dar exemplos de inclusões estritas.
- provar tb invariância dos conjuntos.

Proposição: Se $L(f)$ é hiperbólico, $\overline{Per(f)} = L(f)$.
(o mesmo vale para $L_+(f)$ e $L_-(f)$)

Dem. para $L_+(f)$

- V viz. de $L_+(f)$
Dado $y \in M$, $\exists\, n_0$ t.q. $\forall\, n \geq n_0 \Rightarrow f^n(y) \in V$

Dem. Suponha que não. Então $\exists\, n_i \to \infty$ t.q.
$f^{n_i}(y) \in M - V \Rightarrow L^+(f) \cap (M-V) \neq \phi$, absurdo.

- Fixe vizinhança V e $\alpha_0 > 0$ onde vale unicidade p/ o Lema de Sombreamento I. ~~...~~

Tome $y \in L_+(f) \Rightarrow y \in \omega(x)$ para algum $x \in M$.

Seja $\alpha < \alpha_0$ e n, k t.q.

$n \geq n_0$

$$f^n(x), f^{n+k}(x) \in B_{\alpha/2}(y)$$

Temos a α pseudo-órbita periódica
$x_0 = f^n(y)$, $x_1 = f^{n+1}(y)$, ..., $x_{k-1} = f^{n+k-1}(y)$, $x_k = x_0$
contida na viz V de $L^+(f)$ hiperbólica.

~~...~~

$$\Downarrow$$

$\exists\,!\; z$ (periódico) que $\epsilon\alpha$-sombreia

$\rightarrow \quad d(z, y) < (\epsilon + \frac{1}{2})\alpha$

Como α é arbitrário, $y \in \overline{Per(f)}$.

<u>Proposição</u>: Se $R(f)$ é hiperbólico, então $R(f) = \overline{Per(f)}$.

<u>Dem</u>: Veremos que vale $\boxed{R(f|_{R(f)}) = R(f)}$

pseudo-órbitas periódicas <u>em</u> $R(f)$, logo <u>dentro</u> de uma viz. de $R(f)$.

pseudo-órbitas periódicas <u>em M</u>, eventualmente fora de uma viz. de $R(f)$

Supondo isso, temos:

$y \in R(f) \Rightarrow$ y é α-pseudo-periódico, $\forall \alpha > 0$, com a pseudo-órbita <u>em $R(f)$</u>.

$\Rightarrow$ como $R(f)$ é hiperbólico, $\exists$ z periódico com $d(z,y) \leq \theta\alpha$.

<u>Proposição</u>: <u>$R(f|_{R(f)}) = R(f)$</u>

- $R(f|_{R(f)}) \subset R(f)$ (óbvio)
- $x \in R(f)$. $n \geq 0$: $(x_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ $\frac{1}{n}$-pseudo-órbita periódica c/ $x_0^n = x$.

Queremos ver que $x \in R(f|_{R(f)})$.

Basta mostrar que p/ <u>$\forall$ viz. U de $R(f)$</u>,

<u>$(x_i^n)_i \subset U$ se n é grande.</u>

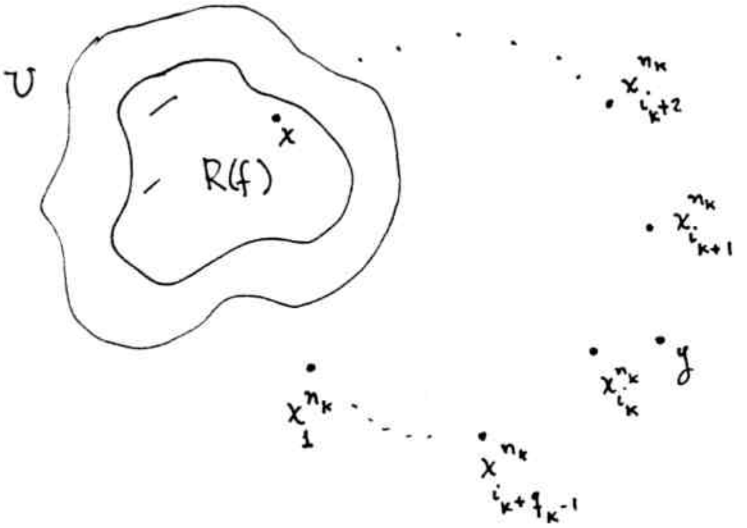
(pois basta trocar a pseudo-órbita por uma que está em $R(f)$)

71

Suponha que não:

$\exists\ y \notin R(f)$ e seqs. $(n_k)_{k\geq 0}$ $(i_k)_{k\geq 0}$ t.q.

$$\lim_{k\to+\infty} x_{i_k}^{n_k} = y \quad , \quad \lim_{k\to+\infty} n_k = \infty$$



q_k: período de $(x_i^{n_k})$.

Considere as pseudo-órbitas periódicas:

$$\{ y, x^{n_k}_{i_k+1}, x^{n_k}_{i_k+2}, \dots, x, x^{n_k}_1, \dots, x^{n_k}_{i_k+q_k-1}, y \}$$

$\Longrightarrow \quad y \in R(f).$

Falso: $\Omega(f)$ hiperbólico $\not\Rightarrow$ $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$

(vale em dim. 2, contra-exemplo em dim. 3)

Exercício Averiguar para $Rec(f)$. (Na verdade sai da Obs. abaixo)

Obs: Valem também:

$R(f|_{\overline{Per f}}) = \overline{Per f}$, $R(f|_{\overline{Rec f}}) = \overline{Rec f}$, $R(f|_{L(f)}) = L(f)$,

mas pode haver $R(f|_{\Omega(f)}) \subsetneq \Omega(f)$.

Claramente vale:

"Se $\Omega(f)$ é hiperbólico, então $\overline{Per(f)} = R(f|_{\Omega(f)})$."

<u>Def</u> f é <u>Axioma A</u> se

(i) $\Omega(f)$ é hiperbólico

(ii) $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$.

—— " ——

<u>Proposição</u>: $\overline{Per(f)}$ hiperbólico $\Rightarrow$ $\overline{Per(f)}$ tem estrutura de produto local

<u>Corolário</u>: $L(f)$ hip., $R(f)$ hip. ou f Axioma A

$\Rightarrow$ tem estrutura de produto local

<u>Dem. da Prop.</u>

Chame $\Lambda = \overline{Per f}$. U e α_0 ref. p/ valer lema de Sombreamento com unicidade.

$\varepsilon > 0$ pequeno t.q. $\forall\, x \in \Lambda$

$\Rightarrow W^s_\varepsilon(x) \cup W^u_\varepsilon(x) \subset U$.

Já sabemos que $\exists\ \delta$ t.q.

$x, y \in \Lambda$, $d(x,y) < \delta \Rightarrow \underbrace{W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)}_{[x,y]}$ é um único ponto.

Queremos ver que $[x,y] \in \Lambda$.

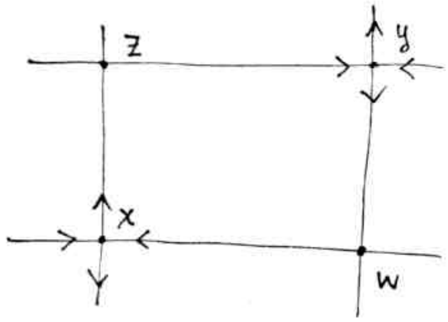
(1) <u>Basta provar para x, y periódicos</u>

Suponha $u, v \in \Lambda$, $x_n \to u$, $y_n \to v$, x_n, y_n periódicos.

$$\Rightarrow \quad \underset{\Lambda}{\underset{\cap}{[x_n, y_n]}} \longrightarrow [u, v] \text{ , por continuidade de } [\cdot,\cdot]$$

e $[u,v] \in \Lambda$ porque Λ é fechado.

(2) <u>Se x e y fossem de período 1:</u>



Chame $w = [x,y]$
$z = [y,x]$

Para w, tome a pseudo-órbita

$$\{ w, f(w), \dots, f^{n_1-1}(w), f^{-n_2}(z), f^{-n_2+1}(z), \dots, f^{-1}z, z, fz, \dots, f^{n_3-1}(z),$$
$$f^{-n_4}(w), f^{-n_4+1}(w), \dots, f^{-1}w, w \}$$

com
$$f^{n_1}(w), f^{-n_2}(z) \in B_{\alpha/2}(x)$$
$$f^{n_3}(z), f^{-n_4}(w) \in B_{\alpha/2}(y)$$

$\Rightarrow$ é α-pseudo-órbita

α arbitrário $\Rightarrow w \in \overline{\mathrm{Per} f}$

(3) <u>x e y de períodos arbitrários</u>

Exercício (ver Shub).

<u>Def</u>: X espaço métrico compacto.

$f: X \to X$ é <u>topologicamente transitivo</u> se, para U, V abertos não-vazios quaisquer, $\exists\ n$ t.q. $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

$f: X \to X$ é <u>topologicamente mixing</u> se para U e V $\exists\ N$ t.q. $n > N \Rightarrow f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

<u>Teorema da Decomposição Espectral</u>

Suponha $\overline{Per(f)}$ hiperbólico. Existe uma decomposição de $\overline{Per(f)}$ em conjuntos fechados disjuntos,

$$\overline{Per(f)} = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_s$$

tal que:

(a) Cada Λ_i é f invariante e $f|\Lambda_i$ é topologicamente transitiva.

(b) Cada Λ_i se decompõe em conjuntos fechados disjuntos

$$\Lambda_i = X_{1,i} \cup \ldots \cup X_{n_i,i}$$

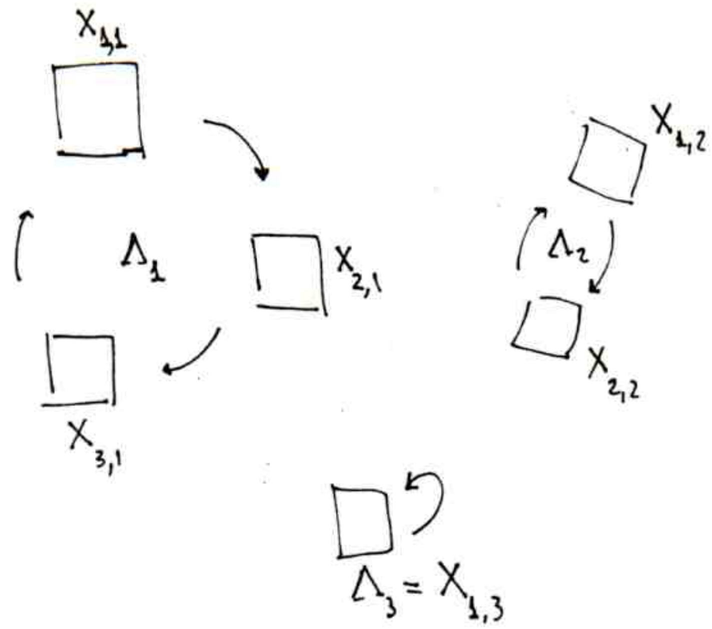
t.q.

$$f(X_{j,i}) = X_{j+1 (\text{mod}\, n_i), i} \quad , \quad 1 \leq j \leq n_i$$

e

$$f^{n_i} : X_{j,i} \longrightarrow X_{j,i} \quad , \quad 1 \leq j \leq n_i$$

é topologicamente mixing



Def

Λ conjunto básico :

- compacto
- invariante
- hiperbólico
- localmente maximal
- transitivo

Cor : $\overline{\text{Per} f}$ se decompõe em conjs. básicos $\Lambda_1, \dots, \Lambda_s$.

Dem. Teo.

$\Lambda \equiv \overline{\text{Per}(f)}$

$\mathcal{R}$: relação definida em Per(f)

$$x \mathcal{R} y \iff \begin{cases} W^s(x) \cap W^u(y) \cap \Lambda \neq \emptyset \\ W^s(y) \cap W^u(x) \cap \Lambda \neq \emptyset \end{cases}$$

Lema 1 : $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência

reflexiva ✓

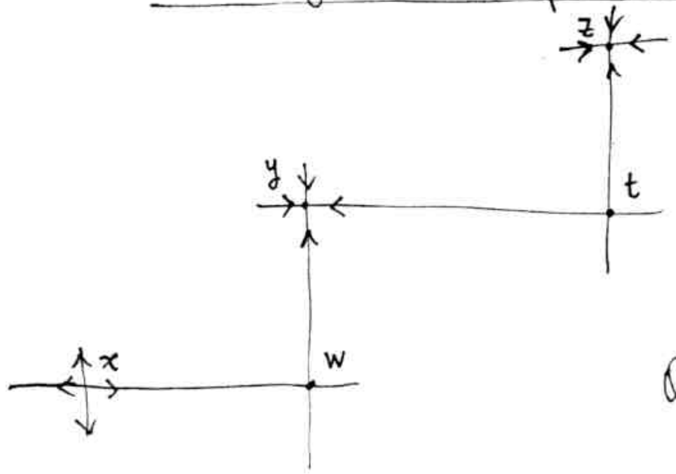
simétrica ✓

77

transitiva :

$x, y, z \in Perf$ t.q. $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} z$

(1) Se x, y, z têm período 1



$w \in W^s(x) \cap W^u(y) \cap \Lambda$

$t \in W^s(y) \cap W^u(z) \cap \Lambda$

Quero ver que $x \mathcal{R} z$.

α-pseudo-órbita em Λ :

$$\ldots\ldots, f^{-1}t, t, ft, \ldots, \underset{\underset{u_{-1}}{\parallel}}{f^{N-1}(t)}, \underset{\underset{u_0}{\parallel}}{f^{-N}(w)}, \underset{\underset{u_1}{\parallel}}{f^{-N+1}(w)}, \ldots, w, f(w), \ldots$$

isto é:

$$u_i = \begin{cases} f^{i-N}(w) & , i \geq 0 \\ f^{i+N}(t) & , i < 0 \end{cases}$$

Com $f^{-N}(w), f^{N}(t) \in B_{\alpha/2}(y)$.

$\Rightarrow \exists$ u $\theta\alpha$-sombra , $u \in \Lambda$. pois Λ é loc. maximal.

Como

$$u_i = f^{i-N}(w) \longrightarrow x$$

e $d(u_i, f^i u) \leq \theta \alpha$,

então para $i \geq i_0$ $d(f^i u, x) \leq (\theta + 1)\alpha$.

Se α é pequeno $\Rightarrow f^{i_0} u \in W^s_{loc}(x) \Rightarrow u \in W^s(x)$.

Da mesma forma, $u \in W^u(z)$

(Tudo igual para a relação simétrica)

(2) Se x, y, z têm períodos quaisquer

Exercício.

Lema 2: Os fechos das classes de equivalência de $\mathcal{R}$ formam uma partição de Λ em subconjuntos compactos e abertos de Λ:

Dem:

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow [x,y] \in \Lambda, \ [y,x] \in \Lambda$$
$$\Rightarrow x \mathcal{R} y.$$

Λ compacto $\Rightarrow$ número finito de classes de equivalência.

Como para $x, y \in \mathrm{Per} f$ vale

$$x \mathcal{R} y \iff f(x) \mathcal{R} f(y),$$

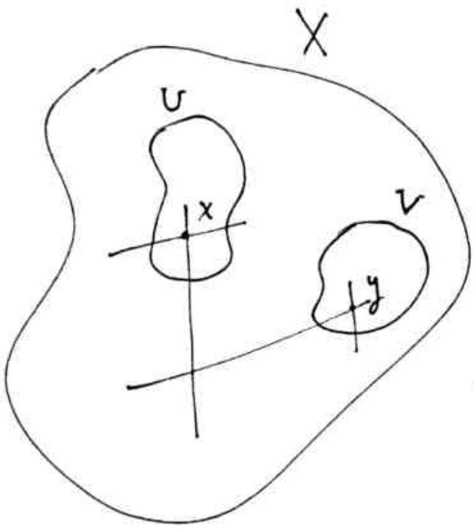
podemos "etiquetar" as classes de equivalência $X_{j,i}$ como no enunciado.

Falta: $f^{n_i} : X_{j,i} \longrightarrow X_{j,i}$ top. mixing

Chame $g = f^{n_i}|X \quad X = X_{j,i}$.

U, V abertos não-vazios de X.

$x \in U \cap \mathrm{Per} f, \quad y \in V \cap \mathrm{Per} f$



(1) Se x e y têm período 1

$x \mathcal{R} y$

$\Rightarrow \exists N$ grande t.q.

$n > N \quad f^n(U) \cap V \neq \emptyset$

(2) x e y c/ per. quaisquer

Exercício.

Corolário:

(1) $L(f)$ hiperbólico $\Rightarrow L(f)$ tem decomposição espectral

(2) f satisfaz Axioma A $\Rightarrow \Omega(f)$ tem decomposição espectral

(3) $R(f)$ hiperbólico $\Rightarrow R(f)$ tem decomposição espectral.

Ciclos e Filtrações

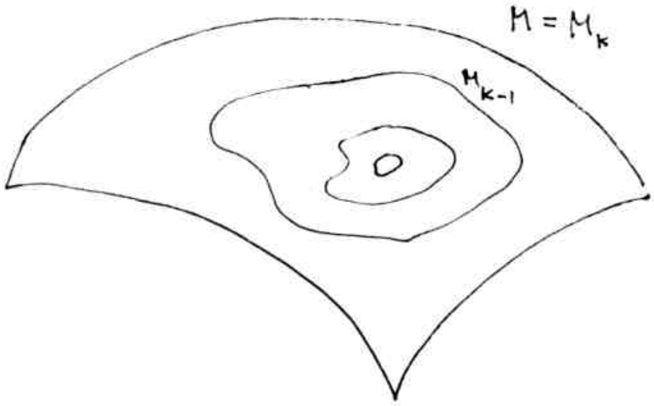
$f: M \circlearrowleft$ homeomorfismo, M variedade compacta.

Def: Uma filtração $\mathbb{M}$ adaptada a f é uma seqüência encaixada

$$\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_k = M$$

de subvariedades (com bordo) compactas de dimensão 0 t.q.

$$f(M_i) \subset \operatorname{Int} M_i \quad .$$



Def: $\mathbb{M}^{-1}$ é a filtração adaptada a f^{-1} definida por

$$\emptyset = \overline{M - M_k} \subset \overline{M - M_{k-1}} \subset \ldots \subset \overline{M - M_0} = M$$

(confira $f(\overline{M - M_i}) \subset \operatorname{int} \overline{M - M_i} = M - M_i$)

Def: Se $\mathbb{M}$ é adaptada a f, defina

$$\boxed{K_\alpha^f(\mathbb{M}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_\alpha - M_{\alpha-1})},$$

o subconjunto invariante maximal em $M_\alpha - M_{\alpha-1}$ (enquanto não houver ambigüidade, denotaremos

$$K_\alpha(\mathbb{M}) = K_\alpha^f(\mathbb{M}) \qquad)$$

<u>Af</u>: <u>$K_\alpha(M)$ é compacto</u>

Basta mostrar que $K_\alpha(\mathbb{M}) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\overline{M_\alpha - M_{\alpha-1}})$.

Note que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\overline{M_\alpha - M_{\alpha-1}}) \supset \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(M_\alpha - M_{\alpha-1})$$

Por outro lado,

$$f(\overline{M_\alpha - M_{\alpha-1}}) \subset \text{int}\, M_\alpha$$

e

$$f^{-1}(\overline{M_\alpha - M_{\alpha-1}}) \subset M - M_{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow \quad f(\overline{M_\alpha - M_{\alpha-1}}) \cap f^{-1}(\overline{M_\alpha - M_{\alpha-1}}) \subset M_\alpha - M_{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow \quad \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\overline{M_\alpha - M_{\alpha-1}}) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(M_\alpha - M_{\alpha-1})$$

$$\Big(\text{pois: } \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\overline{M_\alpha - M_{\alpha-1}}) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n f^{-1}(\overline{M_\alpha - M_{\alpha-1}}) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n f(\overline{M_\alpha - M_{\alpha-1}})$$

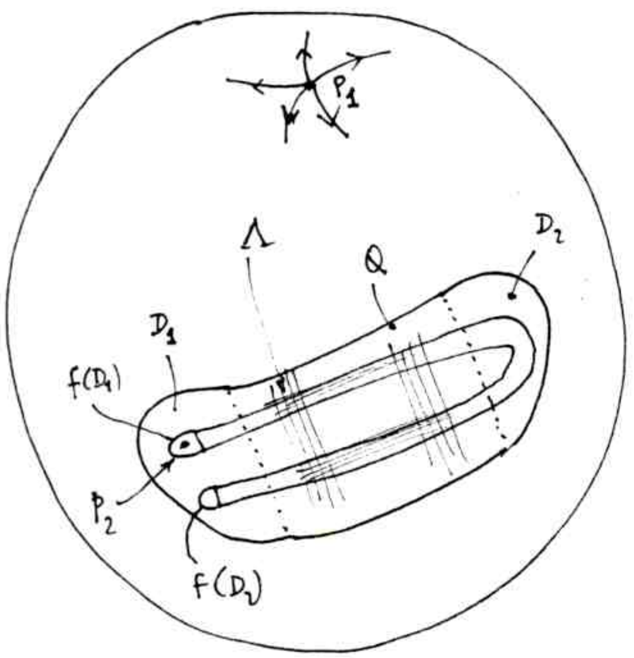
$$= \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n\left[f^{-1}(\overline{M_\alpha - M_{\alpha-1}}) \cap f(\overline{M_\alpha - M_{\alpha-1}})\right]$$

$$\subset \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(M_\alpha - M_{\alpha-1}) \Big).$$

Af.

<u>Def</u>: $$K(\mathbb{M}) \equiv \bigcup_{\alpha=1}^{k} K_\alpha(M).$$

Exemplo Ferradura de Smale na esfera.

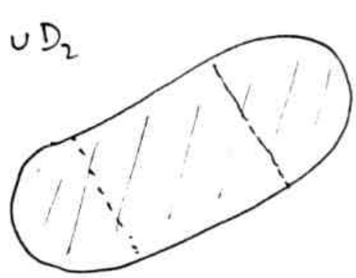


Exemplo de filtração:

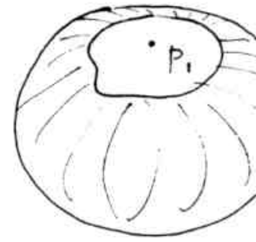
$M_0 = \emptyset$

$M_1 = D_1$

$M_2 = D_1 \cup Q \cup D_2$



M_3 :



(c/ $f(M_3) \subset \operatorname{int} M_3$)

$M_4 = S^2$.

Maximais invariantes:

$$K_4(M) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(M - M_3) = p_1 \text{ (fonte)}$$

$$K_3(M) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(M_3 - M_2) = \emptyset$$

$$K_2(M) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(M_2 - M_1) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(Q \cup D_2)$$

$$= \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(Q) = \Lambda \text{ (ferradura)}$$

$$K_1(M) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(D_1) = p_2 \text{ (poço)}$$

Observe que:

- M_3 é dispensável : $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_4$ também é uma filtração
- $M_1 \subset M_2$ mas não temos $M_1 \subset \operatorname{int} M_2$ (ou seja, não se impõe a condição $M_i \subset \operatorname{int} M_i$)

Problema:

¿ Quando é possível dizer se f tem uma filtração adaptada ?

Afirmação

Defina $\Omega_\alpha = \Omega \cap (M_\alpha - M_{\alpha-1})$

$$R_\alpha = R \cap (M_\alpha - M_{\alpha-1})$$

$$L_\alpha = L \cap (M_\alpha - M_{\alpha-1})$$

Então

$$L_\alpha, \Omega_\alpha, R_\alpha \subset K_\alpha(\mathbb{M})$$

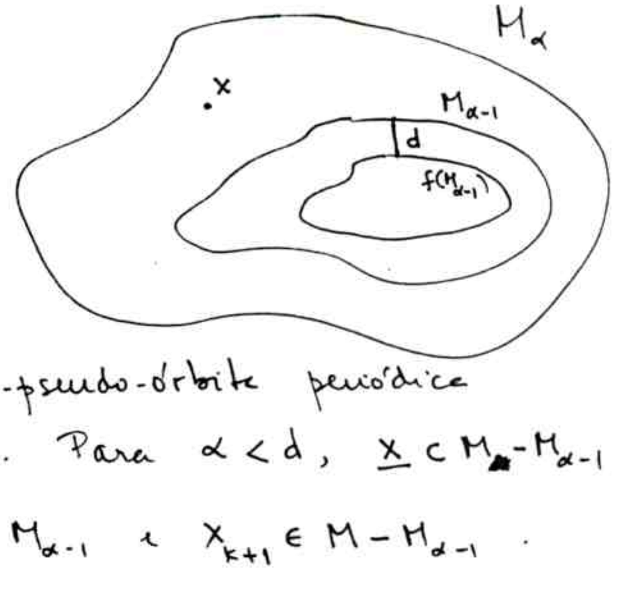
$$(\Longrightarrow \; L, R, \Omega \subset K(\mathbb{M}) \;).$$

Dem: Vamos fazer só para R (que implica para L, Ω)

Exercício: Fazer independentemente p/ L e Ω.

$x \in R_\alpha \Longrightarrow x \in R$ e $x \in M_\alpha - M_{\alpha-1}$.

Quero mostrar que $f^n x \in M_\alpha - M_{\alpha-1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.



Seja $d = dist(M_{\alpha-1}, f(M_{\alpha-1})) > 0$.

- $\{f^n x\}_{n \geq 0} \subset M_\alpha$ é óbvio.
- $f^n x \notin M_{\alpha-1}$, $\forall n \geq 0$

Como $x \in R \Rightarrow \forall \alpha > 0$, $\exists$ α-pseudo-órbita periódica $\underline{x} = \{x_0 = x, x_1, \dots, x_m = x\}$. Para $\alpha < d$, $\underline{x} \subset M_\alpha - M_{\alpha-1}$.

Senão, existiria k t.q. $x_k \in M_{\alpha-1}$ e $x_{k+1} \in M - M_{\alpha-1}$.

Mas aí $d(fx_k, x_{k+1}) \geq d$, absurdo.

Seja $n > 0$. Quero mostrar que $f^n x \in M_\alpha - M_{\alpha-1}$.

Tome α-pseudo-órbita de período $m > n+1$ com α tão pequeno que $d(f^{n+1}x, x_{n+1}) \leq d/2$ (Exercício: mostrar que é possível)

$$\Longrightarrow f^{n+1} x \notin f(M_{\alpha-1}) \Longrightarrow f^n x \notin M_{\alpha-1}.$$

Fazer o mesmo c/ f^{-1} para $n<0$.

$\llcorner$ Afirmação.

"Filtração $\Rightarrow$ estabilidade dos maximais invariantes"

<u>Proposição</u> $\mathbb{M}$ filtração adaptada a f e U viz. de $K^f(\mathbb{M})$. Existe $\mathcal{U} \subset \mathrm{Homeo}(M)$ viz. da f t.q. $\mathbb{M}$ é adaptada a $\forall\ g \in \mathcal{U}$ e $K^g(\mathbb{M}) \subset U$. Além do mais, $\mathcal{U}$ pode ser escolhida de forma que

$$K_\alpha^g(\mathbb{M}) \subset U_\alpha = (M_\alpha - M_{\alpha-1}) \cap U.$$

<u>Dem</u>: $f(M_\alpha) \subset \mathrm{int}\, M_\alpha$ é propriedade aberta.

Também: U_α é viz. de $K_\alpha^f(\mathbb{M})$

$$\Longrightarrow \exists\ N \text{ t.q. } \bigcap_{i=-N}^{N} f^i(M_\alpha - M_{\alpha-1}) \subset U_\alpha.$$

(propriedade aberta).

$\llcorner$ Prop.

<u>Def</u>: <u>Conjuntos Estável e Instável</u>

$B \subset M$ subconjunto

$$W^s(B) = \{ y \in M;\ d(f^n(y), f^n(B)) \to 0,\ n \to +\infty \}$$

$$W^u(B) = \{ y \in M;\ d(f^n(y), f^n(B)) \to 0,\ n \to -\infty \}$$

conj. estável de B

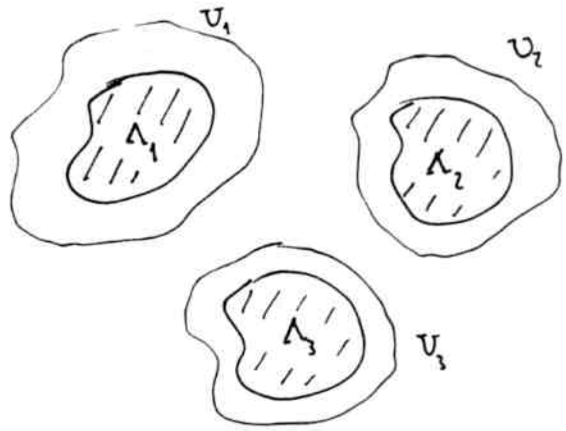
conj. instável de B

Suponha que $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_r$ é uma união disjunta de conjuntos f-invariantes fechados e $L(f) \subset \Lambda$.

<u>Lema 0</u>: M é $\begin{cases} \text{união disjunta dos } W^s(\Lambda_i)\text{'s} \\ \text{união disjunta dos } W^u(\Lambda_i)\text{'s} \end{cases}$

(isto é, $\forall\ x \in M$, $\begin{cases} \exists\ i \text{ t.q. } x \in W^s(\Lambda_i) \\ \exists\ j \text{ t.q. } x \in W^u(\Lambda_j) \end{cases}$)

<u>Dem</u>:



U_i: viz. aberta de Λ_i

$f(U_i) \cap U_j = \emptyset$, $\forall\, i \neq j$

(possível, porque os Λ_i's são invariantes)

(1) $x \in M$; $\exists\ n_0$ t.q. $n \geq n_0 \Rightarrow f^n x \in \bigcup_{i=1}^{r} U_i$

(pois $L \subset \bigcup_{i=1}^{r} U_i$)

(2) Para $n \geq n_0 \Rightarrow f^n x \in U_k$ para algum k.

(pois $f(U_i) \cap U_j = \emptyset$, $i \neq j \Rightarrow f^n x \in U_k$ e $f^{n+1} x \in U_\ell$, $\ell \neq k$ é impossível)

$\Longrightarrow x \in W^s(\Lambda_k)$, pois as vizinhanças são arbitrariamente pequenas.

- $W^s(\Lambda_i) \cap W^s(\Lambda_j) \underset{i \neq j}{=} \emptyset$ é óbvio.
- Tudo igual para W^u.

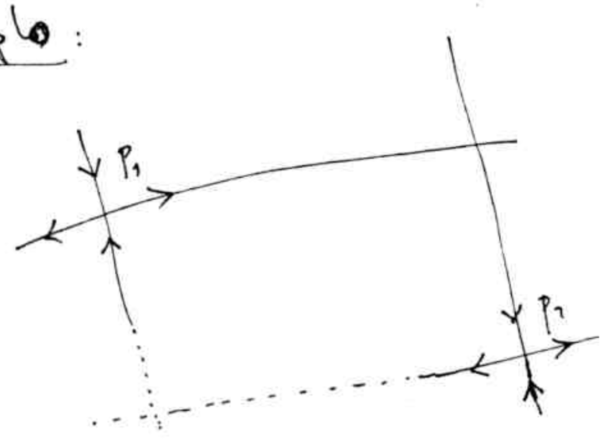
a ——— Lema 0

Ciclos

Def: pré-ordem $>>$ nos Λ_i's

$$\Lambda_i >> \Lambda_j \iff \left(W^u(\Lambda_i) - \Lambda_i \right) \cap \left(W^s(\Lambda_j) - \Lambda_j \right) \neq \emptyset .$$

Exemplo:



$$p_1 >> p_2$$

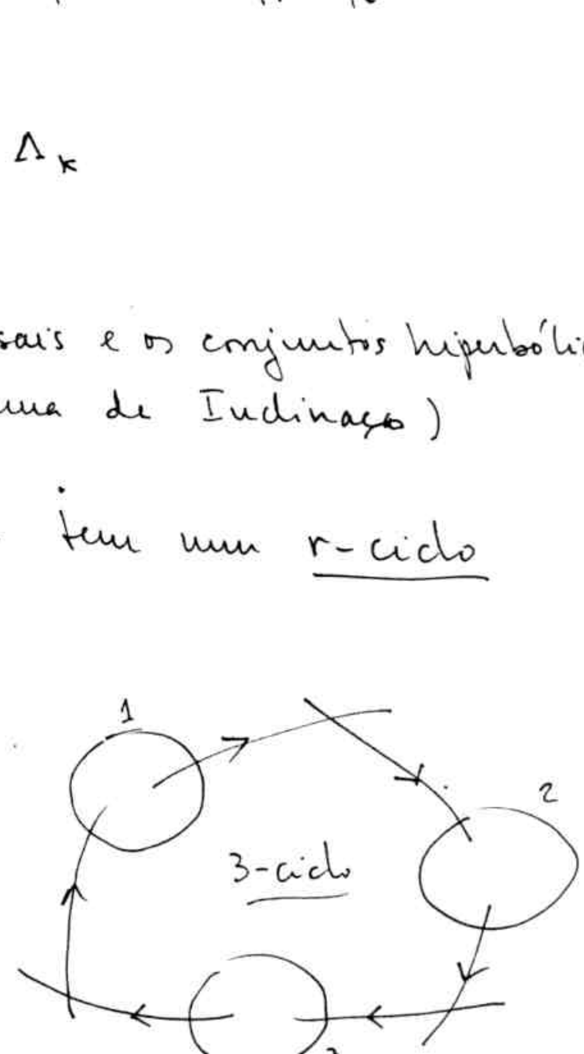
Obs:
- $>>$ não é uma ordem, a princípio
- poderíamos ter tb. $p_2 >> p_1$ (e $p_1 \neq p_2$!)
- nem sempre vale que

$$\Lambda_i >> \Lambda_j \quad e \quad \Lambda_j >> \Lambda_k$$
$$\Longrightarrow \quad \Lambda_i >> \Lambda_k$$

(se as interseções são transversais e os conjuntos hiperbólicos, isso acaba valendo pelo Lema de Inclinação)

Def Dizemos que a pré-ordem tem um r-ciclo se existe seqüência

$$\Lambda_{i_1} >> \dots >> \Lambda_{i_{r+1}} = \Lambda_{i_1}$$



Se a pré-ordem $>>$ <u>não tem ciclos</u>, então ela pode ser estendida para uma <u>ordem</u> <u>total</u> $\underline{\succ}$: isto é, $\succ$ é tal que $\forall\, i, j$,

$$\Lambda_i \prec \Lambda_j\,,\ \Lambda_i = \Lambda_j\,,\ \text{ou}\ \Lambda_i \succ \Lambda_j \qquad (\text{"ou" não exclusivo})$$

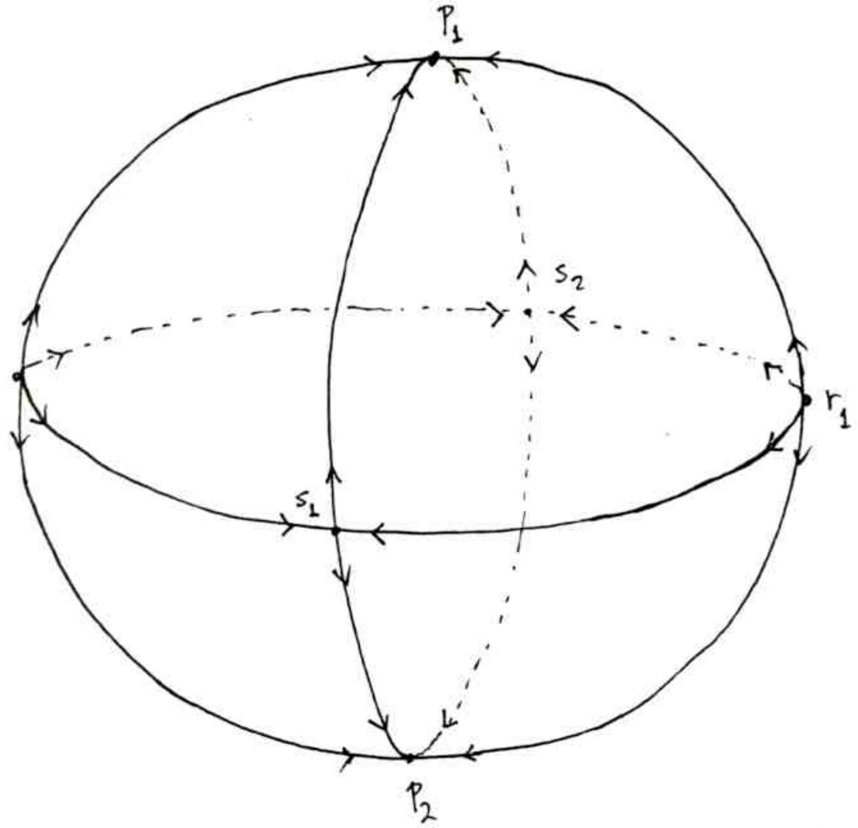
Como?

$$\Lambda_i \prec \Lambda_j \overset{\text{def.}}{\iff} \underline{\text{Não}}\ \underline{\text{existe}}\ \Lambda_i >> \dots >> \Lambda_j$$

(Obs: <u>Não funcionaria</u> se definíssemos

$$\Lambda_i \prec \Lambda_j \overset{\text{def.}}{\iff} \underline{\text{Existe}}\ \Lambda_i << \dots << \Lambda_j$$
)

<u>Exemplo</u>



Temos

$r_1 >> p_1$
$r_1 >> s_1$
$r_1 >> s_2$ etc.
$r_1 >> p_2$

$$\begin{array}{ccc} r_1 & & r_2 \\ \downarrow & \times & \downarrow \\ s_1 & & s_2 \\ \downarrow & \times & \downarrow \\ p_1 & & p_2 \end{array}$$

- Não há ciclos.
- Relação entre r_1 e r_2:

$r_1 \prec r_2$

e $r_2 \prec r_1$!!

Podemos reindexar os conjuntos de forma que

$$i < j \Rightarrow \Lambda_i \prec \Lambda_j.$$

Chame $\Lambda_1 = p_1$, $\Lambda_2 = p_2$, $\Lambda_3 = s_1$, $\Lambda_4 = s_2$, $\Lambda_5 = r_1$, $\Lambda_6 = r_2$

Isso define uma ordem $<$ nos Λ_i's em que:

ou $\Lambda_i < \Lambda_j$, ou $\Lambda_i = \Lambda_j$, ou $\Lambda_i > \Lambda_j$.

<u>Exercício</u>: mostrar que é sempre possível tal indexação quando não há ciclos.

<u>Def</u> Uma ordenação dos Λ_i's como acima é chamada <u>ordenação de filtração</u>.

<u>TEOREMA</u> Suponha $f: M \circlearrowleft$ homeomorfismo, e $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_r$ união disjunta de conjuntos invariantes fechados com $L(f) \subset \Lambda$. Então:

$\Lambda_i = K_i(\mathbb{M})$, $i = 1, \dots, r$ para alguma filtração $\mathbb{M}$ adaptada a f

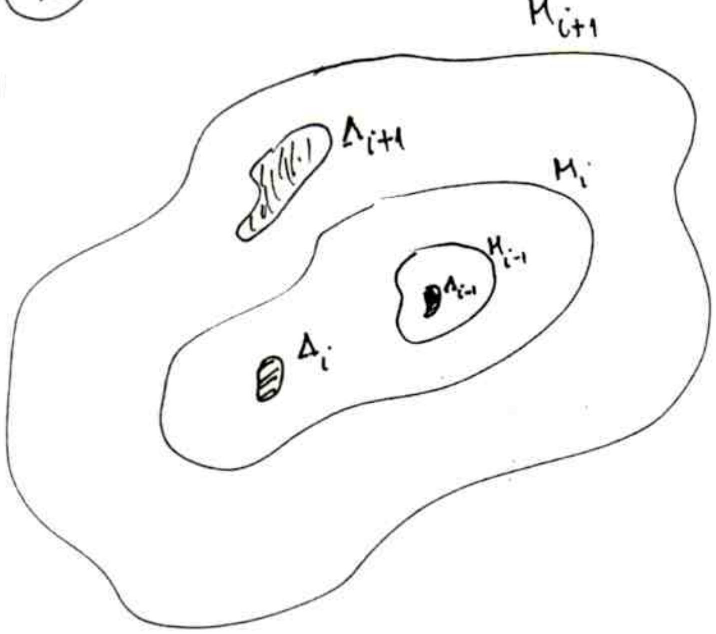
$\Updownarrow$

Λ_i's não têm ciclos e a ordem dos índices é uma ordem de filtração.

<u>Obs</u>: ($\Downarrow$) é fácil

($\Uparrow$) é difícil.

$(\Downarrow)$



$\Lambda_i = K_i(M)$

$f(M_i) \subset \operatorname{int} M_i$

$\Longrightarrow W^u(\Lambda_i) \subset M_i$

$\Longrightarrow W^s(\Lambda_i) \subset M - M_{i-1}$

Tome $j < i$. Não podemos ter

$$K_j(M) >> \ldots >> K_i(M).$$

Falta ver que não podemos ter $K_i(M) >> K_i(M)$ (1-ciclo)

Basta ver que $W^u(K_i(M)) \cap W^s(K_i(M)) = K_i(M)$.

Se $x \in W^u(K_i(M)) \cap W^s(K_i(M))$:

$$\left.\begin{array}{lll} x \in W^u(K_i(M)) & \Rightarrow & f^{-n}x \longrightarrow K_i(M) \\ x \in M_i - M_{i-1} & \Rightarrow & \{f^n x\}_{n\leq 0} \subset M - M_{i-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \{f^n x\}_{n\leq 0} \subset M_i - M_{i-1}$$

$$\left.\begin{array}{lll} x \in W^s(K_i(M)) & \Rightarrow & f^n x \longrightarrow K_i(M) \\ & & \{f^n x\}_{n\geq 0} \subset M_i \end{array}\right\} \Rightarrow \{f^n x\}_{n\geq 0} \subset M_i - M_{i-1}$$

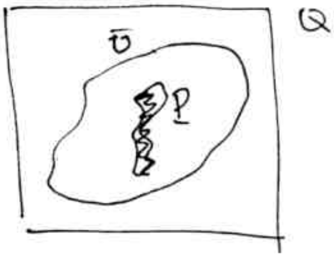
$$\Rightarrow \quad x \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(M_i - M_{i-1}) = K_i(M).$$

Lema I $\bigcup_{j\leq i} W^s(\Lambda_j)$ é uma viz. aberta de $\bigcup_{j\leq i} W^u(\Lambda_j)$, que é fechado.

Dem: adiante.

Lema II: Se P é um conjunto compacto invariante da forma $P = \bigcap_{n\geq 0} f^n(Q)$, onde Q é compacto e $P \subset \operatorname{int} Q$, então $\exists$ viz. compacta $\overline{U}$ de P t.q.

$$f(\overline{U}) \subset U$$



Dem: (no Shub).

Exemplo: P poço, Q viz. compacta do poço.

Contra-exemplo: na Ferradura, $\bigcap_{n\geq 0} f^n(Q)$ não está no interior de Q.

Lema III: Se K é subconjunto compacto de $\bigcup_{j=1}^{\ell} W^s(\Lambda_{i_j})$, então

$$\bigcap_{n\geq 0} f^n(K) \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} W^u(\Lambda_{i_j})$$

Dem:

$$x \in \bigcap_{n\geq 0} f^n(K) \Rightarrow f^{-n}x \in K,\ \forall n\geq 0 \Rightarrow \alpha(x) \subset \overline{K} = K.$$

Mas $x \in W^u(\Lambda_k)$, para algum $\Lambda_k \Rightarrow K \cap \Lambda_k \neq \emptyset$

$\Rightarrow \Lambda_k \cap \bigcup_{j=1}^{\ell} W^s(\Lambda_{i_j}) \neq \emptyset \Rightarrow \Lambda_k = \Lambda_{i_j}$ para algum j

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{j=1}^{\ell} W^u(\Lambda_{i_j}).$$

Obs: Se $K \supset \bigcup_{j=1}^{\ell} W^u(\Lambda_{i_j}) \Rightarrow \bigcap_{n \geq 0} f^n(K) = \bigcup_{j=1}^{\ell} W^u(\Lambda_{i_j})$

(pela invariância das variedades instáveis)

Construção de $\mathbb{M}$

(1) $W^s(\Lambda_1)$ é viz. de Λ_1

Sabemos que $W^s(\Lambda_1)$ é viz. de $W^u(\Lambda_1)$, pelo Lema I.

Mas $W^u(\Lambda_1) = \Lambda_1$; senão existiria $x \in W^u(\Lambda_1)$, $x \notin \Lambda_1$

e para esse x existiria $k \in \{1, \dots, r\}$ t.q. $x \in W^s(\Lambda_k)$.

Só que aí $\Lambda_1 >> \Lambda_k$, contrariando o fato de Λ_1 estar em primeiro lugar na ordem.

Escolha viz. compacta Q de Λ_1, $Q \subset W^s(\Lambda_1)$.

Lema III $\Longrightarrow$ $\Lambda_1 = \bigcap_{n \geq 0} f^n(Q)$.

Lema II $\Rightarrow$ $\exists$ viz. compacta V_1 de Λ_1 t.q.

$$f(V_1) \subset \text{int}\, V_1$$

Agora escolha g "suave" t.q. $V_1 = \{x \mid g(x) = 0\}$

Para ε pequeno, $g^{-1}[0, \varepsilon]$ é variedade suave com bordo e $f(M_1) \subset \text{int}\, M_1$.

(2) Passo indutivo

$W^s(\Lambda_1) \cup W^s(\Lambda_2)$ é viz. de $W^u(\Lambda_1) \cup W^u(\Lambda_2)$.

Tome Q_2 viz. compacta de $W^u(\Lambda_1) \cup W^u(\Lambda_2)$

$$\Longrightarrow \bigcap_{n \geq 0} f^n(Q_2) = W^u(\Lambda_1) \cup W^u(\Lambda_2)$$

$\Longrightarrow \exists\ V_2$ com $f(V_2) \subset \operatorname{int} V_2$ e V_2 viz. compacta de $W^u(\Lambda_1) \cup W^u(\Lambda_2)$.

$$V_2 \cup M_1 = \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$M_2 = g^{-1}[0, \varepsilon]$$

etc.

(3) Falta ver que $\Lambda_j = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_j - M_{j-1})$

Por construção:

- $\bigcap_{n \geq 0} f^n(M_j) = \bigcup_{i \leq j} W^u(\Lambda_i)$
- $\bigcup_{i < j} W^u(\Lambda_i) \subset M_{j-1}$

$\bigcap_{n \geq 0} f^n(M_j - M_{j-1}) \subset W^u(\Lambda_j)$

$$\begin{aligned}
\bigcap_{n \geq 0} f^n(M_j - M_{j-1}) &= (M_j - M_{j-1}) \cap \bigcap_{n \geq 0} f^n(M_j - M_{j-1}) \subset \\
&\subset (M_j - M_{j-1}) \cap \bigcap_{n \geq 0} f^n(M_j) \\
&= (M_j - M_{j-1}) \cap \bigcup_{i \leq j} W^u(\Lambda_i) \\
&= (M_j - M_{j-1}) \cap \left[W^u(\Lambda_j) \cup \bigcup_{i < j} W^u(\Lambda_i) \right] \\
&= (M_j - M_{j-1}) \cap W^u(\Lambda_j) \subset W^u(\Lambda_j).
\end{aligned}$$

Considerando M^{-1}, obtemos

$$\bigcap_{n \leq 0} f^n(M_j - M_{j-1}) \subset W^s(\Lambda_j)$$

Como não há 1-ciclos:

$$W^u(\Lambda_j) \cap W^s(\Lambda_j) = \Lambda_j \implies \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(M_j - M_{j-1}) \subset \Lambda_j$$

Por outro lado,

$$\Lambda_j \subset \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(M_j - M_{j-1})$$

porque

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(M_j - M_{j-1})$$

contém todos os invariantes de $M_j - M_{j-1}$.

$\longleftarrow$

Lema I : $\bigcup_{j\leq i} W^s(\Lambda_j)$ é viz. aberta do fechado $\bigcup_{j\leq i} W^u(\Lambda_j)$

Sublema : $\overline{W^u(\Lambda_i)} \subset \bigcup_{j\leq i} W^u(\Lambda_j)$

Sublema $\Rightarrow$ Lema I

- $\bigcup_{j\leq i} W^u(\Lambda_j)$ fechado

Pois $$\overline{\bigcup_{j\leq i} W^u(\Lambda_j)} = \bigcup_{j\leq i} \overline{W^u(\Lambda_j)} \subset \bigcup_{j\leq i}\bigcup_{l\leq j} W^u(\Lambda_l) = \bigcup_{j\leq i} W^u(\Lambda_j)$$

- $\bigcup_{j\leq i} W^s(\Lambda_j)$ aberto

Usar f^{-1} e trocar a ordem :

$$\left.\begin{matrix} \Lambda^1, & \Lambda^2, & \dots, & \Lambda^r \\ \| & \| & & \| \\ \Lambda_r & \Lambda_{r-1} & & \Lambda_1 \end{matrix}\right\} \quad \Lambda^j = \Lambda_{r-j+1}$$

Logo

$$\Big[\bigcup_{j\leq i} W^s_f(\Lambda_j)\Big]^c = \bigcup_{j>i} W^s_f(\Lambda_j) = \bigcup_{j\geq i+1} W^u_{f^{-1}}(\Lambda_j) =$$

$$= \bigcup_{j\leq r-i} W^u_{f^{-1}}(\Lambda^j) \quad \text{fechado}.$$

- $\bigcup_{j\leq i} W^u(\Lambda_j) \subset \bigcup_{j\leq i} W^s(\Lambda_j)$

$x \in W^u(\Lambda_j)$, $j\leq i$

Ao mesmo tempo , $x \in W^s(\Lambda_k)$. para algum k

Logo $\Lambda_j \gg \Lambda_k \Rightarrow j > k$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{l<j} W^s(\Lambda_l) \subset \bigcup_{j\leq i} W^s(\Lambda_j) .$$

(Temos que ser mais cuidadosos:

se $x \in \Lambda_j$, acabou.

Depois, se $x \in \Lambda_k$ então $x \in W^u(\Lambda_k) \Rightarrow k = j$, tb. acabou.

Senão $\Lambda_j >> \Lambda_k$, etc.)

Prova do Sublema

$x \in \overline{W^u(\Lambda_i)}$ $\quad\quad x \in W^u(\Lambda_j)$ para algum j.

Queremos garantir que $i \geq j$.

Af 1: Se $\overline{W^u(\Lambda_i)}$ intersecta $W^u(\Lambda_j)$ então intersecta Λ_j.

Af. 2: Se $\overline{W^u(\Lambda_i)}$ intersecta Λ_j, $i \neq j$, então intersecta $W^s(\Lambda_j) - \Lambda_j$.

Af. 3: Se $\overline{W^u(\Lambda_i)}$ intersecta Λ_j, $i \neq j$, então $i > j$.

(Af. 2 é usada para a Af. 3)

Af. 1 + Af. 3 $\Rightarrow$ Sublema

$$\text{Af 1} \Rightarrow \overline{W^u(\Lambda_i)} \text{ intersecta } \Lambda_j$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{se } i = j, \text{ acabou} \\ \text{se } i \neq j, \text{ Af. 3} \Rightarrow i > j \end{array}\right\} i \geq j.$$

Prova de Af. 1

$y \in \overline{W^u(\Lambda_i)} \cap W^u(\Lambda_j)$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha(y) \subset \overline{W^u(\Lambda_i)}, \text{ pois } \overline{W^u(\Lambda_i)} \text{ é invariante fechado.} \\ \alpha(y) \subset \Lambda_j \end{array}\right.$$

$\alpha(y) \neq \emptyset$, por compacidade

Af. 1

Prova da Af. 3 (usando a Af. 2)

$$\text{Af.2} \Longrightarrow \exists \quad x \in \overline{W^u(\Lambda_i)} \cap \left(W^s(\Lambda_j) - \Lambda_j \right)$$

Mas $\quad x \in W^u(\Lambda_{m_1}) \Rightarrow \Lambda_{m_1} > \Lambda_j$

$$\Longrightarrow W^u(\Lambda_{m_1}) \cap \overline{W^u(\Lambda_i)} \neq \emptyset$$

$$\overset{\text{Af.1}}{\Longrightarrow} \Lambda_{m_1} \cap \overline{W^u(\Lambda_i)} \neq \emptyset$$

Repita o raciocínio com Λ_{m_1}, etc.

Construa uma seqüência

$$\dots > \Lambda_{m_r} > \dots > \Lambda_{m_1} > \Lambda_j$$

com $\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap \Lambda_{m_r}$ não vazio.

Como há um número finito de Λ_k's e não há ciclos, o processo tem que parar. A única maneira de parar é com

$$\Lambda_{m_r} = \Lambda_i$$

(pois aí não se aplica mais a Af. 2)

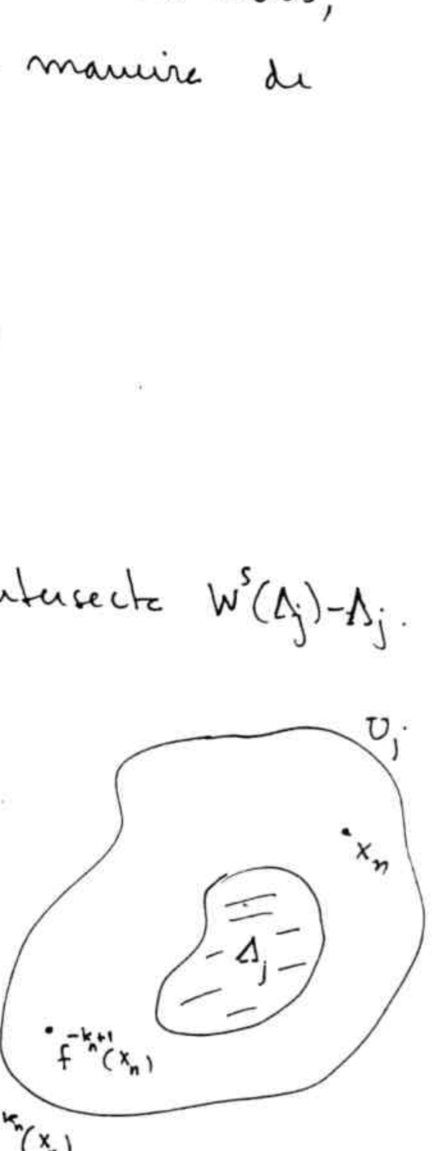
Logo $i > j$.

Af. 3

Af. 2: $\overline{W^u(\Lambda_i)}$ intersecta Λ_j, $i \neq j$, então intersecta $W^s(\Lambda_j) - \Lambda_j$.

Prova:

$\|$ $\overline{U}_k$ compacto, $U_k \supset \Lambda_k$
e $f(\overline{U}_k) \cap \overline{U}_m = \emptyset$, $k \neq m$



Como $\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j \neq \emptyset$, podemos tomar

$$\{x_n\}_{n \geq 1} \subset W^u(\Lambda_i)$$

t.q. $\quad x_n \longrightarrow \Lambda_j$.

Podemos supor $\{x_n\} \subset U_j$.

Como $x_n \in W^u(\Lambda_i)$, a cada x_n associamos o inteiro positivo k_n, que é o menor inteiro t.q.

$$f^{-k_n}(x_n) \notin U_j .$$

Tome y um ponto de acumulação de $f^{-k_n}(x_n)$.

- $y \in \overline{W^u(\Lambda_i)}$
- $k_n \to \infty$ (pois $x_n \to \Lambda_j$)
- $f^m(x) \in \overline{U}_j$ para todo $m > 0$

$$f^m(x) \in \overline{\{ \underset{\substack{\cap \\ U_j}}{f^m(f^{-k_n} x_n)} \}}_{k_n > m} \subset \overline{U}_j$$

$\vdash$: $y \in W^s(\Lambda_j) - \Lambda_j$

$y \notin \Lambda_j$.

$y \in W^s(\Lambda_k)$ para algum k.

Mas $\{f^m y\}$ não pode acumular em um Λ_k que não seja Λ_j, pois $\{f^m y\} \subset \overline{U}_j$ e $\overline{U}_j \cap \overline{U}_k = \emptyset$ se $\overline{U}_j$ é pequeno.

//

Ω-estabilidade

Podemos reunir tudo o que temos até agora e concluir o seguinte teorema (cujo enunciado é maior que a demonstração).

Teo: Hipóteses

- Λ fechado invariante hiperbólico para f
- Λ tem estrutura de produto local
- Λ contém $L(f)$
- $\Lambda = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_k$ sem ciclos.

Então:

$\exists$ filtração $\mathbb{M}$ adaptada a Λ, uma viz. $\mathcal{U}$ de f em $\mathrm{Diff}^r(M)$ e uma função contínua $\Phi : \mathcal{U} \to C^0(\Lambda, M)$ tal que:

(1) $\mathbb{M}$ é adaptada a toda $g \in \mathcal{U}$

(2) $\Phi(f) = inc_\Lambda$

(3) $\Phi(g)\Lambda = K^g(\mathbb{M})$; $\Phi(g)\Lambda_i = K_i^g(\mathbb{M})$

(4) $\Phi(g) : \Lambda \longrightarrow K^g(\mathbb{M})$ é conjugação topológica.

Dem:

A filtração existe pela hipótese de não-ciclos.

(1) vale pela estabilidade das filtrações.

Φ é dada pela continuação hiperbólica.

$\vdash$: $\underline{\Phi(g)\Lambda = K^g(M)}$

- Pela estabilidade das filtrações, $K^g(M) \subset U$,
onde U é viz. de Λ
Mas Λ loc. maximal $\Rightarrow \Phi(g)\Lambda$ loc. maximal
$\Rightarrow K^g(M) \subset \Phi(g)\Lambda$.

- Se g é próximo de f, $\Phi(g)\Lambda_i \subset M_i - M_{i-1}$.
Logo $\Phi(g)\Lambda_i \subset K_i^g(M)$.

<u>Proposição</u>: Se $R(f)$ é hiperbólico, então não tem ciclos.

<u>Dem</u>:
Suponha que $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$ forma um ciclo na decomposição espectral de $\overline{Per f} = R(f)$

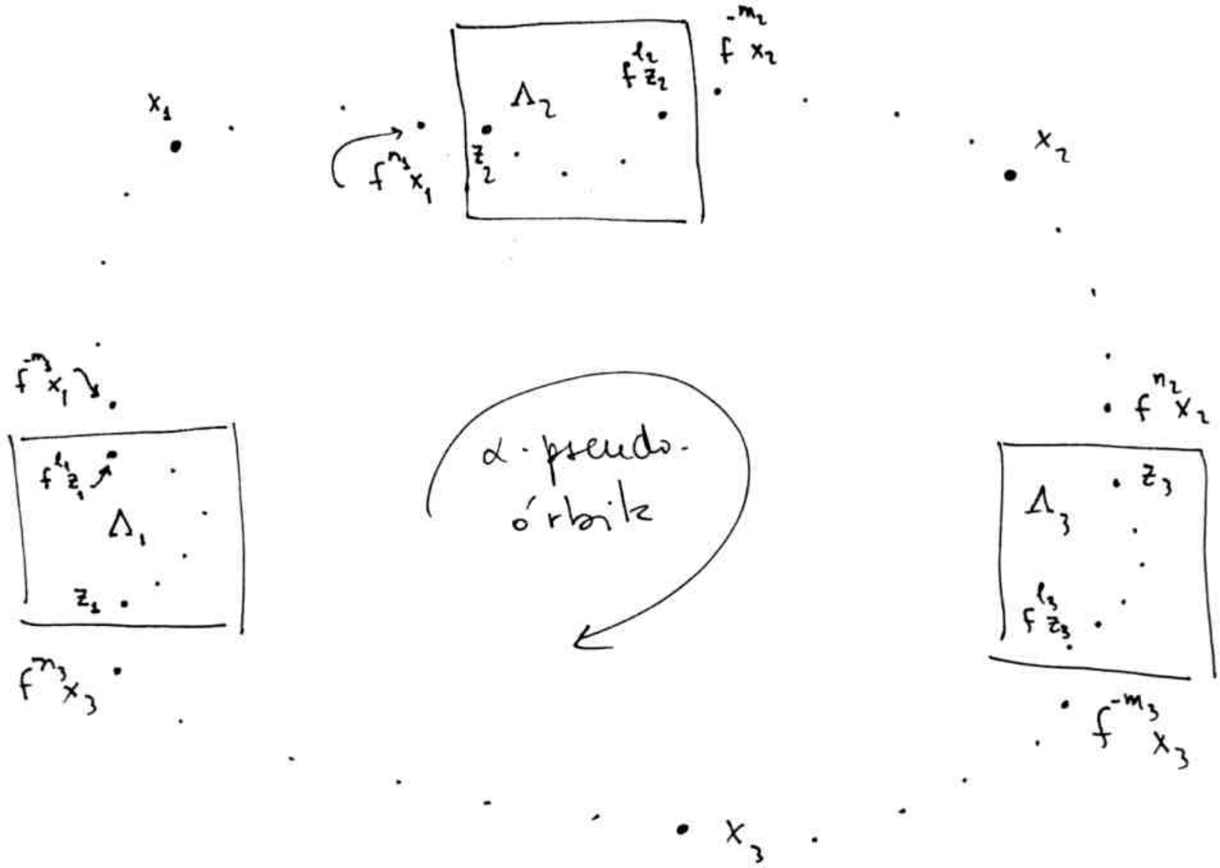
Seja $x_i \in (W^u(\Lambda_i) - \Lambda_i) \cap (W^s(\Lambda_{i+1}) - \Lambda_{i+1})$

<u>Af</u>: $\underline{x_1 \in R(f)}$

(o que leva a um absurdo, pois x_1 deve estar num outro elemento da decomposição espectral, fora do ciclo, logo não pode estar em $W^u(\Lambda_i)$ ou $W^s(\Lambda_{i+1})$.

<u>Dem. da Af.</u>

Dem. da Af. No desenho, com ciclo 3:



onde se usa:
- definição dos x_i's
- transitividade dos Λ_i's

Def: f é L-estável se $f|_{L(f)}$ é conjugado a $g|_{L(g)}$ para g próximo de f.
(o mesmo para Ω-estável e R-estável).

TEOREMA DE Ω-ESTABILIDADE $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$

(a) $L(f)$ hiperbólico sem ciclos $\Rightarrow$ L-estável

(b) Axioma A sem ciclos $\Rightarrow$ Ω-estável

(c) $R(f)$ hiperbólico $\Rightarrow$ R-estável

As condições são abertas em $\mathrm{Diff}^r(M)$.

Dem :

Em (a), (b), (c) : $\overline{Per(f)} = L(f) = \Omega(f) = R(f)$

Em todos os casos não há ciclos e há estrutura de produto local.

Chame $\Lambda = \overline{Per(f)}$.

Pelo Teo. anterior, para g próxima,

$$\Phi(g)\Lambda = K^g(M)$$

$$\Rightarrow \overline{Per(g)} \subset \overline{L(g)} \subset \Omega(g) \subset R(g) \subset \Phi(g)\Lambda.$$

Mas $\Phi(g)$ é conjugação, então

$$\Phi(g)\, Per(f) \subset Per(g)$$

$$\Rightarrow \Phi(g)\Lambda = \Phi(g)\overline{Per(f)} \subset \overline{Per(g)}$$

$$\Rightarrow \overline{Per(g)} = \overline{L(g)} = \Omega(g) = R(g) = \Phi(g)\Lambda.$$

As condições são abertas:

- $\Phi(g)\Lambda$ continua hiperbólico para g próxima
- não há ciclos porque M também é filtração p/ g.