# La Recta Proyectiva Real en Olimpiadas

Roberto Villaflor

Una manera de pensar la ***recta proyectiva real*** $\mathbb{RP}^1$ es como el conjunto de rectas del plano pasando por un punto fijo $O$. En coordenadas podemos considerar $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y decir que dos puntos $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ son equivalentes existe $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$(x_2, y_2) = (tx_1, ty_1).$$

Denotamos esta equivalencia como $(x_1 : y_1) = (x_2 : y_2)$. En este pequeño documento mostraremos algunas ventajas de reducirnos a la recta proyectiva $\mathbb{RP}^1$ en lugar de pensar en todo el plano Euclideano. Al final del documento se proponen una serie de problemas en espíritu olímpicos para resolver con estas ideas. Recomendamos fuertemente intentar resolverlos antes de leer el contenido del artículo.

Lo primero que observamos, es que al pasar a $\mathbb{RP}^1$ perdemos una noción fundamental de la geometría que es la distancia entre dos puntos:

$$dist((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \neq dist((sx_1, sy_1), (tx_2, ty_2)).$$

Sin embargo, a pesar de que perdemos esta importante función, existen otras funciones que están bien definidas en conjuntos de puntos de $\mathbb{RP}^1$. Una de ellas es la llamada ***razón cruzada***:

$$\lambda((x_1 : y_1), (x_2 : y_2), (x_3 : y_3), (x_4 : y_4)) := \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)(x_3y_4 - x_4y_3)}{(x_2y_3 - x_2y_3)(x_4y_1 - x_4y_1)}.$$

Por otro lado 4 puntos $A$, $B$, $C$, $D$ en una recta del plano Euclideano se dicen una ***cuaterna armónica*** si:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = 1.$$

Un ejemplo de cuaterna armónica es el ortocentro, el centro de la circunferencia de los nueve puntos, el baricentro y el circuncentro de un triángulo, que están situados sobre la recta de Euler.

Dada una cuaterna armónica podemos considerar un quinto punto $O$, fuera de la recta $L$ que contiene la cuaterna. Tomando $O$ como el origen del plano, consideramos la razón cruzada $\lambda(A, B, C, D)$ en $\mathbb{RP}^1_O$ (el subíndice denota al origen del plano). Rotando el plano podemos suponer que

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = l_0\},$$

para algún $l_0 \neq 0$, luego

$$\begin{aligned}
\lambda(A, B, C, D) &= \frac{(x_1l_0 - x_2l_0)(x_3l_0 - x_4l_0)}{(x_2l_0 - x_3l_0)(x_4l_0 - x_1l_0)} \\
&= -\frac{(x_2 - x_1)(x_4 - x_3)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)} \\
&= -\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Así observamos que cuatro puntos sobre una recta son una cuaterna armónica si su razón cruzada es $-1$, sin importar cual punto sea el origen del plano. En particular, si tomamos una segunda recta $L'$ y consideramos las intersecciones $A' = OA \cap L'$, $B' = OB \cap L'$, $C' = OC \cap L'$, $D' = OD \cap L'$. Entonces $A'$, $B'$, $C'$, y $D'$ forman una cuaterna armónica pues en $\mathbb{RP}^1_O$ vale que $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ y $D = D'$, entonces

$$\lambda(A', B', C', D') = \lambda(A, B, C, D) = -1.$$

En el caso general, cuando $A, B, C, D \in L$ no son una cuaterna armónica, vale

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = -\lambda = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{C'D'}}{\overline{D'A'}},$$

sin importar el valor de $\lambda$.

Podemos construir más funciones en conjuntos de 4 puntos de $\mathbb{RP}^1$, por ejemplo

$$\widetilde{\lambda}((x_1 : y_1), (x_2 : y_2), (x_3 : y_3), (x_4 : y_4)) = \frac{(x_1y_3 - x_3y_1)(x_4y_2 - x_2y_4)}{(x_3y_4 - x_4y_3)(x_1y_2 - x_2y_1)}.$$

Para cuatro puntos un una recta $L$ y el origen $O$ fuera de ella, tenemos

$$\widetilde{\lambda}(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{BA}}.$$

En particular son una cuaterna armónica si y sólo si $\widetilde{\lambda} = 2$.

Además de considerar funciones en 4 puntos podemos considerar funciones en conjuntos mayores de puntos de $\mathbb{RP}^1$, por ejemplo

$$\mu((x_1 : y_1), ..., (x_6 : y_6)) = \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)(x_3y_4 - x_4y_3)(x_5y_6 - x_6y_5)}{(x_2y_3 - x_3y_2)(x_4y_5 - x_5y_4)(x_6y_1 - x_1y_6)}.$$

Dado un triángulo $\triangle ABC$ y puntos $X \in BC$, $Y \in CA$, $Z \in AB$ tales que $AX$, $BY$, y $CZ$ concurren en un punto $P$. Podemos pasar a la recta proyectiva $\mathbb{RP}^1_P$ y tenemos que $A = X$, $B = Y$ y $C = Z$, luego

$$\mu(A, Z, B, X, C, Y) = \mu(A, C, B, A, C, B) = \frac{(x_1y_3 - x_3y_1)(x_2y_1 - x_1y_2)(x_3y_2 - x_2y_3)}{(x_3y_2 - x_2y_3)(x_1y_3 - x_3y_1)(x_2y_1 - x_1y_2)} = 1.$$

Por otro lado, dados tres puntos $(u_1 : v_1), (u_2 : v_2), (u_3 : v_3) \in \mathbb{RP}^1$ tales que sus representantes $R = (u_1, v_1)$, $S = (u_2, v_2)$, y $T = (u_3, v_3)$ son colineales, entonces la fracción

$$\frac{u_1v_2 - u_2v_1}{u_2v_3 - u_3v_2}$$

es invariante por rotaciones del plano, luego rotando el plano podemos suponer que $R$, $S$ y $T$ tienen la misma segunda coordenada $v_1 = v_2 = v_3 = v$, y la fracción se vuelve

$$\frac{u_1 - u_2}{u_2 - u_3} = \frac{\overline{RS}}{\overline{ST}}.$$

Esto nos da el ***Teorema de Ceva***

$$\mu(A, Z, B, X, C, Y) = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1.$$

La versión dual de este teorema también está relacionado a esta función. Consideremos un triángulo $\triangle ABC$ y puntos $X \in BC$, $Y \in CA$, $Z \in AB$ tales que $X$, $Y$, $Z$ son colineales y pertenecen a la recta $L$. Sea $O \in L$ distinto de $X$, $Y$, $Z$. Luego en $\mathbb{RP}^1_O$ vale que $X = Y = Z$, entonces

$$\mu(A, Z, B, X, C, Y) = \mu(A, X, B, X, C, X) = \frac{(x_1y_4 - x_4y_1)(x_2y_4 - x_4y_2)(x_3y_4 - x_4y_3)}{(x_4y_2 - x_2y_4)(x_4y_3 - x_3y_4)(x_4y_1 - x_1y_4)} = -1.$$

Lo que nos da el ***Teorema de Menelao***

$$\mu(A, Z, B, X, C, Y) = -\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = -1.$$

A continuación proponemos problemas de olimpiadas que se pueden resolver ocupando las observaciones hechas previamente:

**P1.** Sobre una recta $L$ consideramos puntos $A_1, ..., A_{2n}$ (en cualquier orden), y fuera de ella un punto $O$. Sea $L'$ otra recta que no pasa por $O$. Sea $B_i = OA_i \cap L'$, entonces

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2A_3}} \cdots \frac{\overline{A_{2n-1}A_{2n}}}{\overline{A_{2n}A_1}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_2B_3}} \cdots \frac{\overline{B_{2n-1}B_{2n}}}{\overline{B_{2n}B_1}}.$$

**P2.** Sea $n > 1$ un número impar. Sean $A_1, ..., A_{2n}$ vértices de un polígono convexo tal que $A_iA_{i+n}$, $i = 1, ..., n$ concurren en un punto $P$. Sea $B_{2i} = A_{2i}P \cap A_{2i-1}A_{2i+1}$, $i = 1, ..., n$ (con $A_{2n+1} = A_1$). Entonces

$$\frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{B_2A_3}} \cdots \frac{\overline{A_{2n-1}B_{2n}}}{\overline{B_{2n}A_1}} = 1.$$

**P3.** Sea $\triangle ABC$, $H$ el ortocentro, $O$ el circuncentro y $H'$ la reflexión de $H$ respecto a $O$. Desde $A$ trazamos las rectas pasando por $H$, $O$ y $H'$ intersectando $BC$ en $X$, $Y$, $Z$ respectivamente. Sea $M$ el punto medio de $BC$, entonces

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}} = \frac{2\overline{XM}}{\overline{MZ}}.$$

**P4.** Sea $\triangle ABC$, con ángulo $\alpha$ en $A$. Sean $K$ el pie de la altura desde $A$, $L$ el pie de la bisectriz desde $A$, $M$ el punto medio de $BC$ y $N$ la intersección del circundiámetro que pasa por $A$ con $BC$. Entonces

$$\frac{\overline{KL}}{\overline{LN}} \cdot \frac{\overline{NM}}{\overline{MK}} = Cos(\alpha).$$

**P5.** Sea un triángulo $\triangle ABC$ y $O$ un punto del plano. Sea $X = OA \cap BC$, $Y = OB \cap CA$, $Z = OC \cap AB$. Entonces

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1.$$

**P6.** Sea $\triangle ABC$, $X \in BC$, $Y \in CA$, $Z \in AB$ tales que $X$ está entre $B$ y $C$, $Y$ no está entre $C$ y $A$, y $Z$ tampoco está entre $A$ y $B$. Entonces $AX$, $BY$, y $CZ$ son concurrentes o paralelas, si y sólo si

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1.$$

**P7.** Sea $\triangle ABC$, $X \in BC$, $Y \in CA$, $Z \in AB$ tales que $AX$, $BY$, y $CZ$ son concurrentes. Sea $O$ un punto del plano, y sean $X' \in OX$, $Y' \in OY$, $Z' \in OZ$. Denotando $A' = OA \cap Y'Z'$, $B' = OB \cap Z'X'$, $C' = OC \cap X'Y'$, entonces $A'X'$, $B'Y'$, $C'Z'$ son concurrentes o paralelas.

**P8.** Sean $A$, $B$, $C$, $D$ y $E$ los vértices de una estrella, y sea $O$ un punto del plano. Sean $V = OA \cap EB$, $W = OB \cap AC$, $X = OC \cap BD$, $Y = OD \cap CE$, $Z = OE \cap DA$. Entonces

$$\frac{\overline{AW}}{\overline{WC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YE}} \cdot \frac{\overline{EV}}{\overline{VB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XD}} \cdot \frac{\overline{DZ}}{\overline{ZA}} = 1.$$

**P9.** Sea $\triangle ABC$, $O \in BC$ no entre $B$ y $C$. Sean $L_1$, $L_2$ dos rectas pasando por $O$. Sean $B' = L_1 \cap CA$, $C' = L_2 \cap AB$, $P = BB' \cap L_2$, $Q = CC' \cap L_2$, $X = AP \cap CC'$, $Y = AQ \cap BB'$, $S = XB' \cap YC'$, $T = BB' \cap CC'$. Entonces $O$, $X$, $Y$ son colineales, y $A$, $S$, $T$ también son colineales.