Résumé

Dans cette thèse nous étudions deux aspects distincts des variétés toriques, l'un purement géométrique, sur $\mathbb{C}$, et l'autre de nature arithmétique, sur des corps quasi algébriquement clos (corps C_1).

Les courbes extrémales qui engendrent le cône de Mori d'une variété torique projective sont des courbes primitives (V. Batyrev). En 2009, D. Cox et C. von Renesse ont conjecturé que les courbes primitives engendrent le cône de Mori de toute variété torique dont l'éventail est à support convexe, de dimension maximale. Nous présentons une famille de contre-exemples à cette conjecture et en proposons une nouvelle formulation basée sur la notion de contractibilité locale, généralisant la notion de contractibilité de C. Casagrande. Grâce aux couloirs, outils combinatoires que nous introduisons, nous montrons comment écrire une classe de 1-cycle donnée comme combinaison linéaire à coefficients entiers de classes de courbes toriques. Les couloirs nous permettent de donner une décomposition explicite de toute classe qui n'est pas contractible (couloirs droits) ainsi que de certaines classes contractibles (couloirs circulaires).

Les corps C_1 sont les corps sur lesquels l'existence de points rationnels dans une variété Y est assurée par le plongement en petit degré de Y dans un espace projectif (par définition) ou dans un espace projectif pondéré (d'après un théorème facile de Kollar). Pour un diviseur ample dans une variété torique dont l'éventail est simplicial et complet, nous montrons qu'il existe encore une notion de petit degré qui assure l'existence de points rationnels. Ceci nous permet notamment de montrer l'existence de points rationnels sur une large classe de variétés rationnellement connexes.

Abstract

In this thesis we study two distinct aspects of toric varieties, one purely geometric, over $\mathbb{C}$, and the other of arithmetic nature, over quasi algebraically closed fields (C_1 fields).

Extremal curves, which generate the Mori cone of a projective toric variety, are primitive curves (V. Batyrev). In 2009, D. Cox and C. von Renesse conjectured that the classes of primitive curves generate the Mori cone of any toric variety whose fan has full dimensional convex support. We present a family of counterexamples to this conjecture and propose a new formulation based on the notion of local contractibility, generalizing the contractibility defined by C. Casagrande. Using the corridors, a combinatorial tool that we introduce, we show how to write any given 1-cycle class as a linear combination with integer coefficients of toric curve classes. Corridors enable us to give an explicit decomposition of any class that is not contractible (straights corridors) as well as contractible classes in some particular cases (circular corridors).

C_1 fields are those over which the existence of rational points on a variety Y is ensured by any small degree embedding of Y in a projective space (by definition) or in a weighted projective space (according to an easy theorem of Kollar). For an ample divisor in a toric variety whose fan is simplicial and complete, we show that there is also a notion of small degree which ensures the existence of rational points. This way, we show the existence of rational points on a large class of rationally connected varieties.