Processos estocásticos em grafos

Palestra no depto de Matemática da UFSC

Roberto Imbuzeiro Oliveira (IMPA)

Florianópolis, 07/10/2011

VI Simpósio Nacional/Jornadas de Iniciação Científica

IMPA, 4 a 10 de novembro de 2012

VI Simpósio Nacional/Jornadas de Iniciação Científica

IMPA, 4 a 10 de novembro de 2012

UFSC já teve alguns alunos premiados

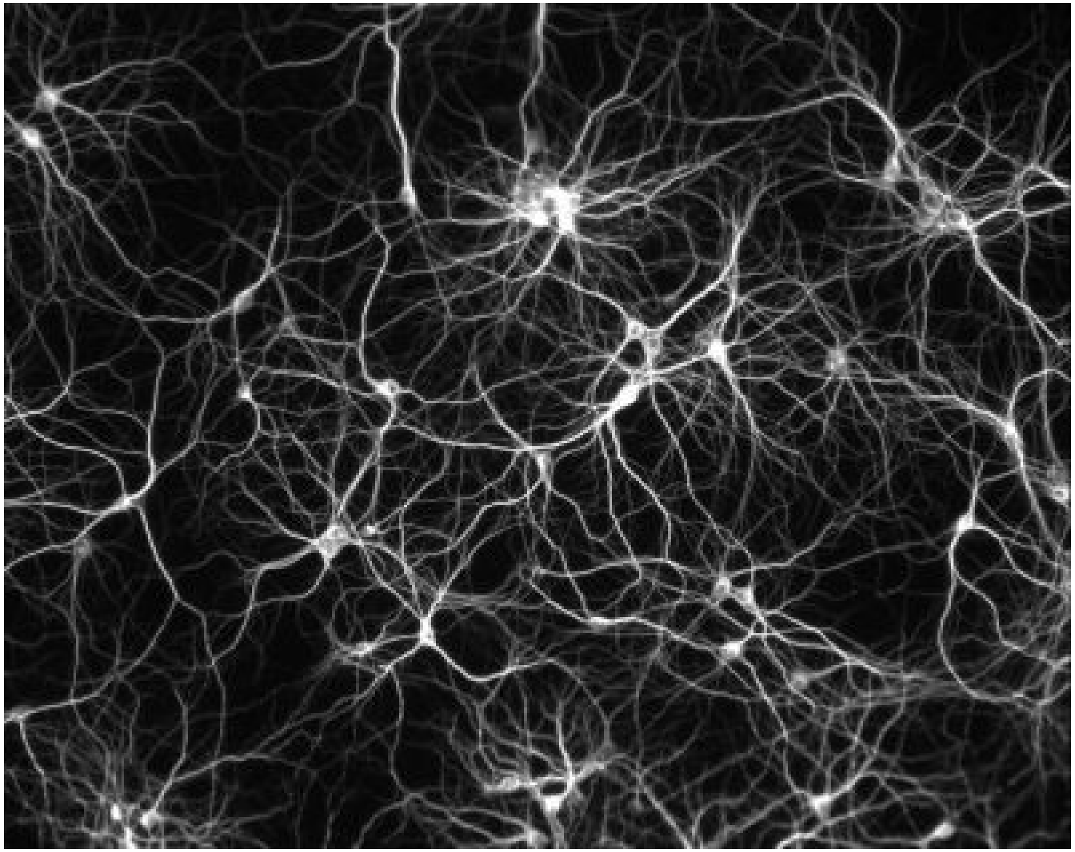
O modelo do votante

Link para applet.

O que se quer entender?

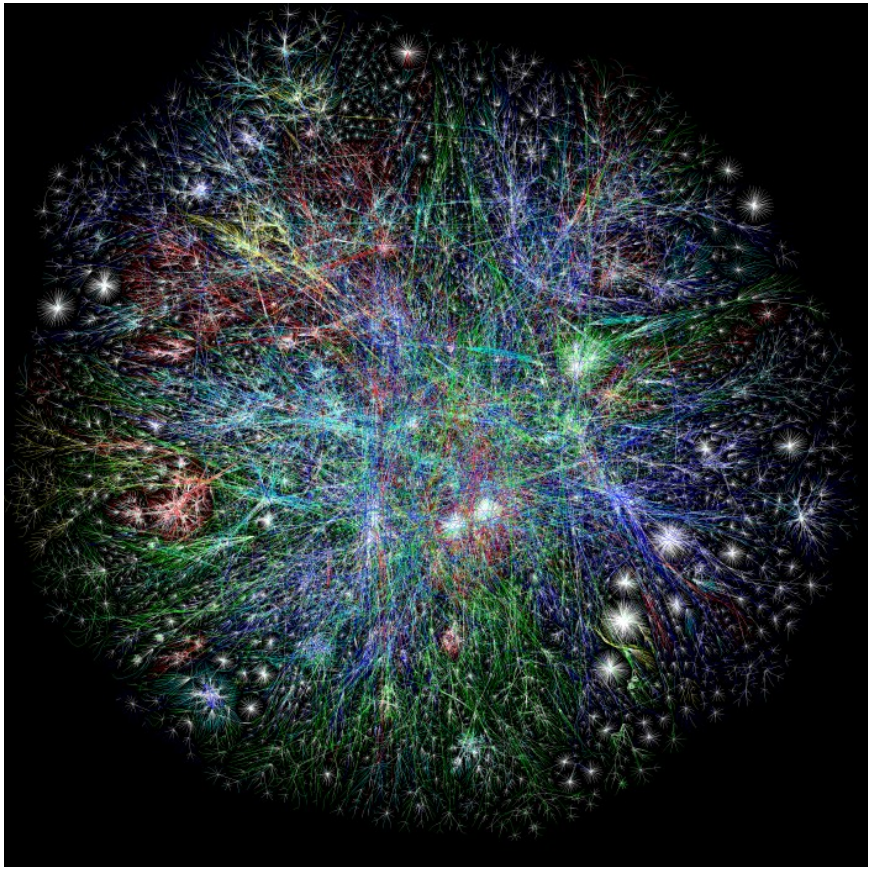
- Relações entre estrutura do grafo e o desenrolar de processos sobre ele.
- Até que ponto o grafo interfere no que é visto? (Universalidade?)
- Pode-se descobrir algo sobre o grafo apenas vendo o processo?

Cérebro



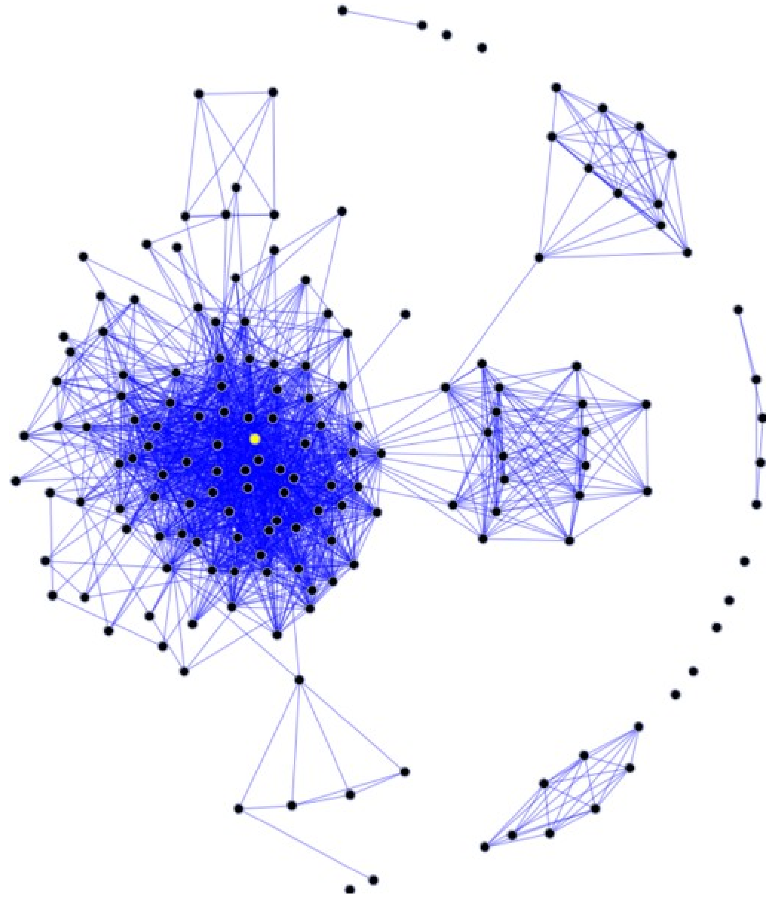
10^{11} neurônios (vértices), 7000 sinapses (arestas) por neurônio

Internet (Projeto OPTE)



Servidores da Internet = vértices, conexões = arestas

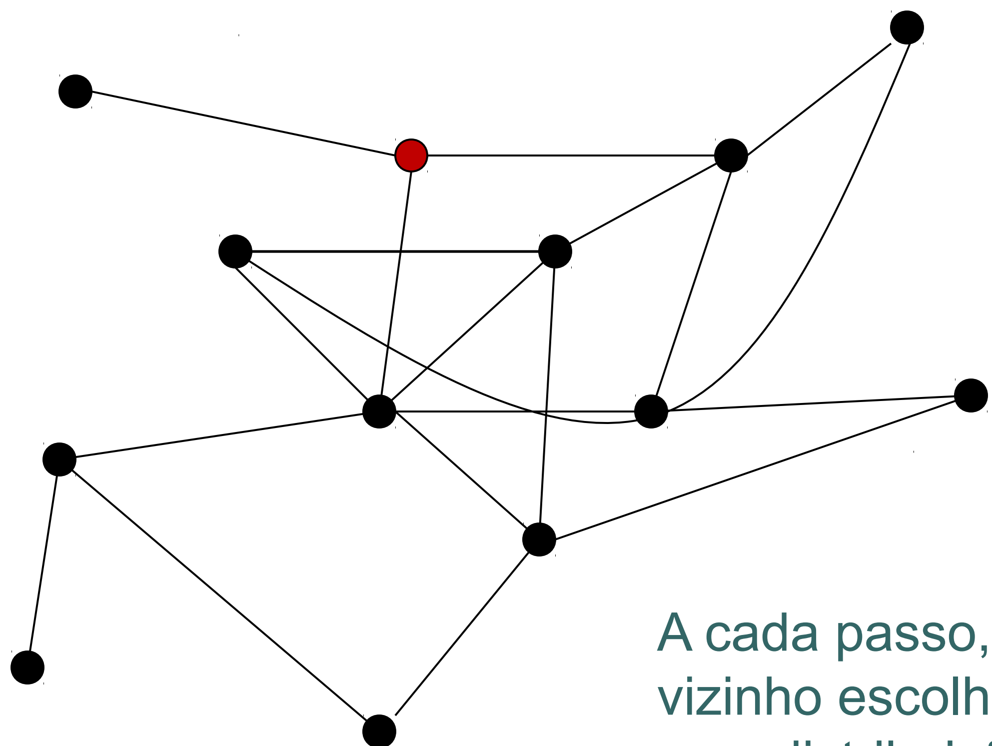
Uma rede social



Pessoas = vértices, afinidade/relacionamento = arestas

Passeio aleatório: o modelo mais simples

O que é?

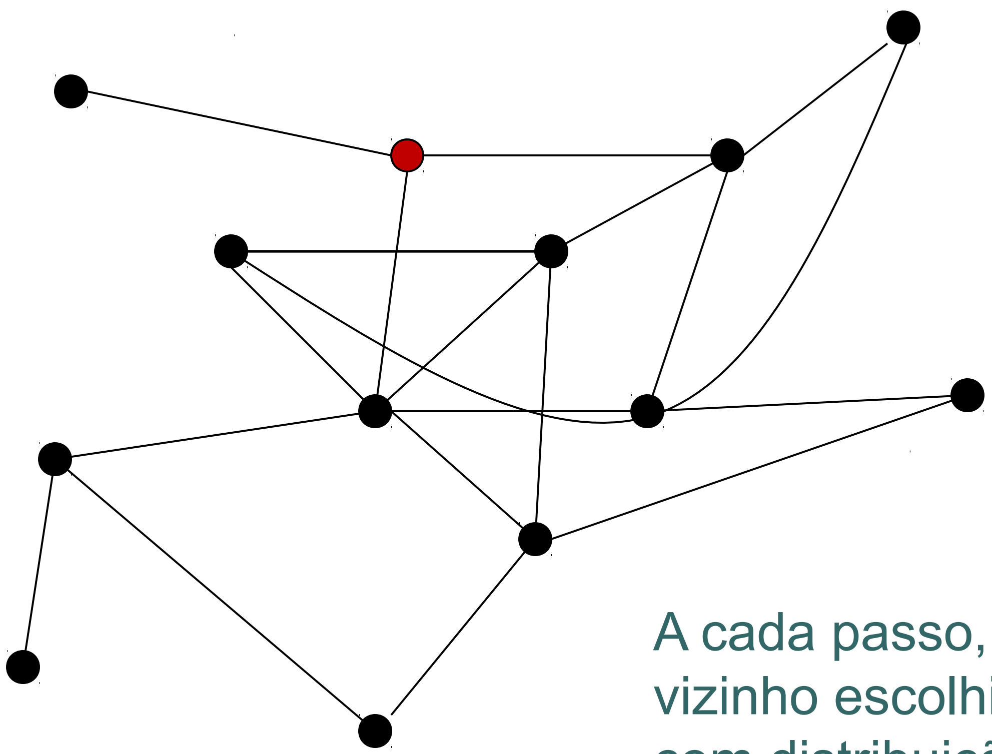


A cada passo, ande para um vizinho escolhido ao acaso com distribuição uniforme.

O que é?

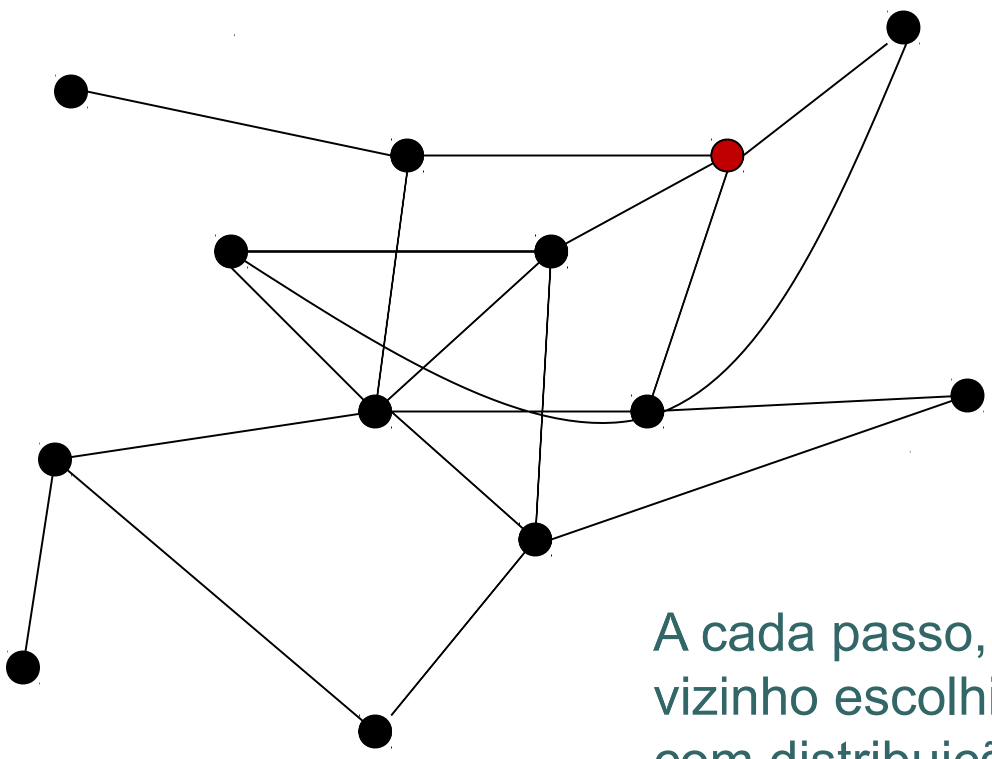
A cada passo, ande para um vizinho escolhido ao acaso com distribuição uniforme.

O que é?



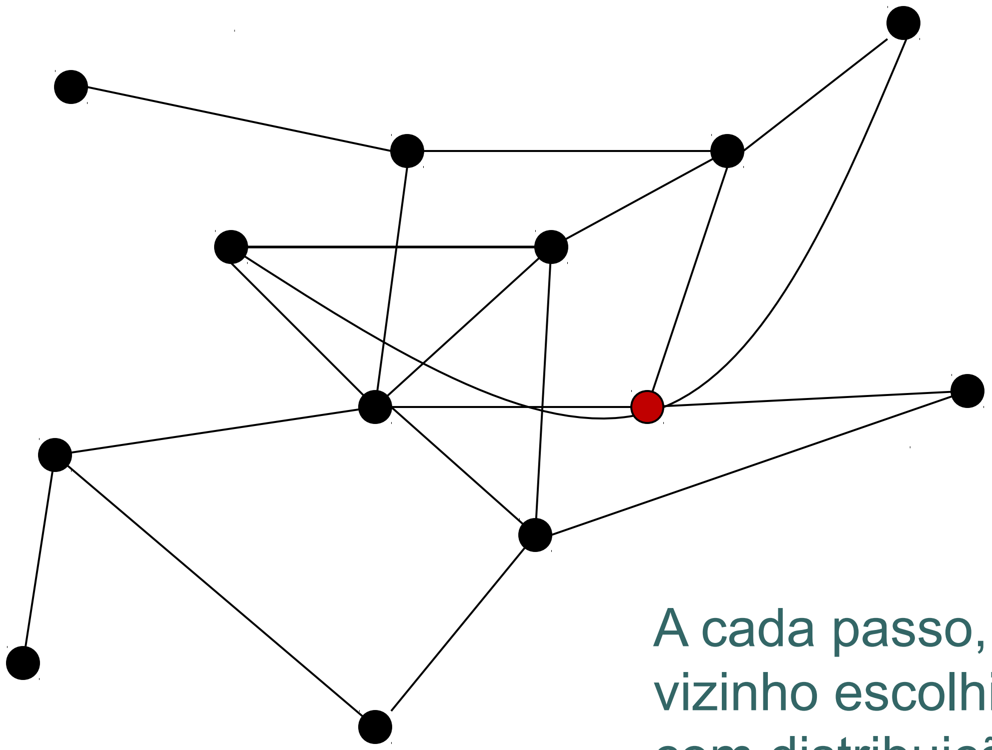
A cada passo, ande para um vizinho escolhido ao acaso com distribuição uniforme.

O que é?



A cada passo, ande para um vizinho escolhido ao acaso com distribuição uniforme.

O que é?

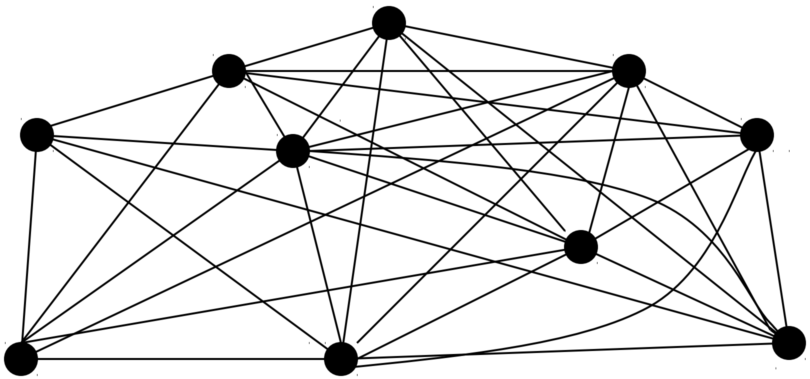


A cada passo, ande para um vizinho escolhido ao acaso com distribuição uniforme.

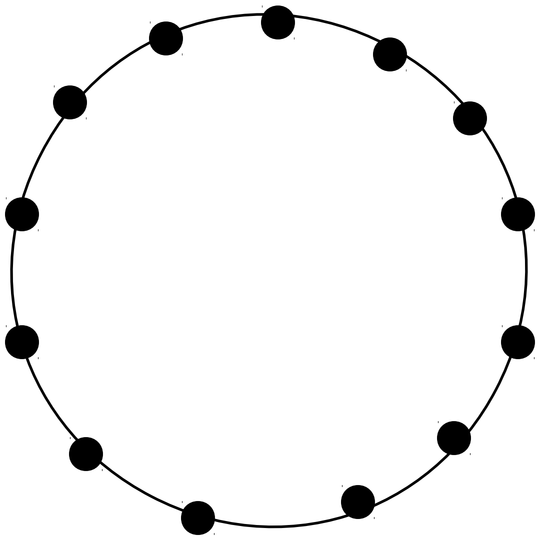
O que é?

A cada passo, ande para um vizinho escolhido ao acaso com distribuição uniforme.

Dois grafos bem diferentes

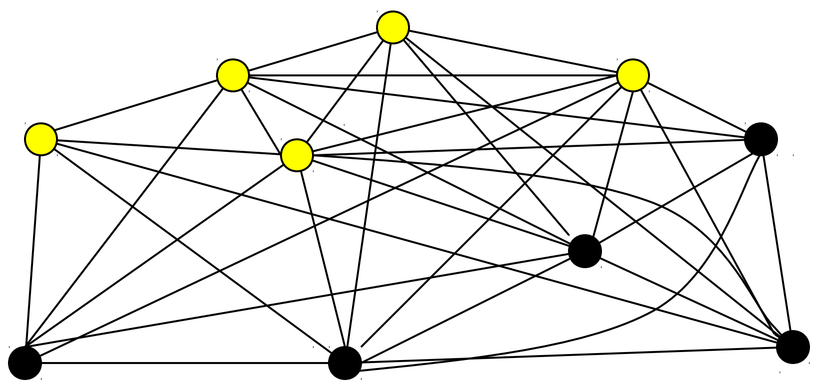


G = grafo com n vértices e (quase) todas as arestas possíveis

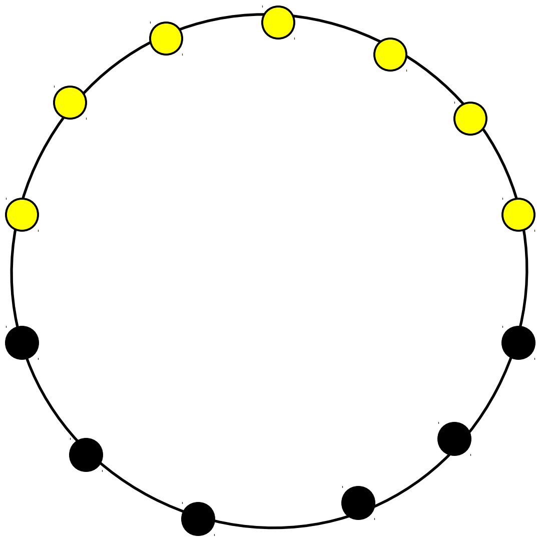


C = ciclo com n vértices

PA “enxerga a diferença”

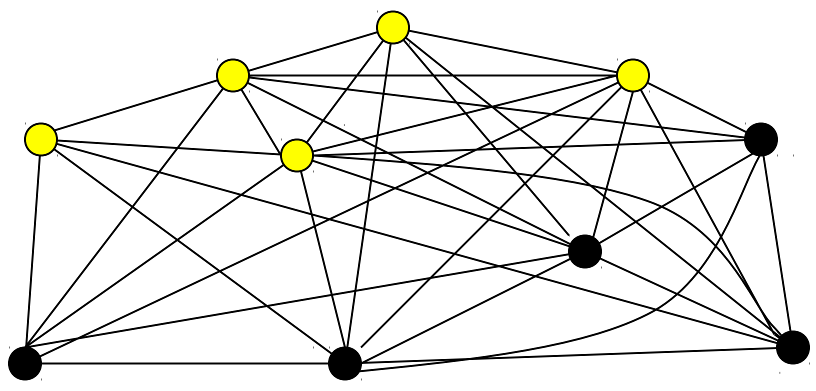


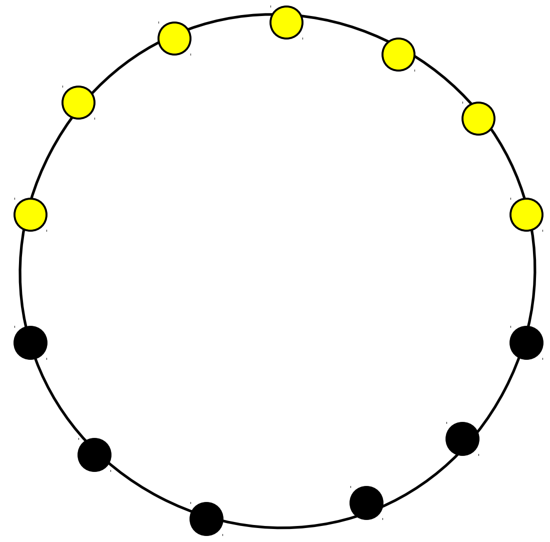
Sucessão de amarelos e
pretos
praticamente independentes.



Muitos amarelos, depois
muitos pretos, depois...

Mais exatamente

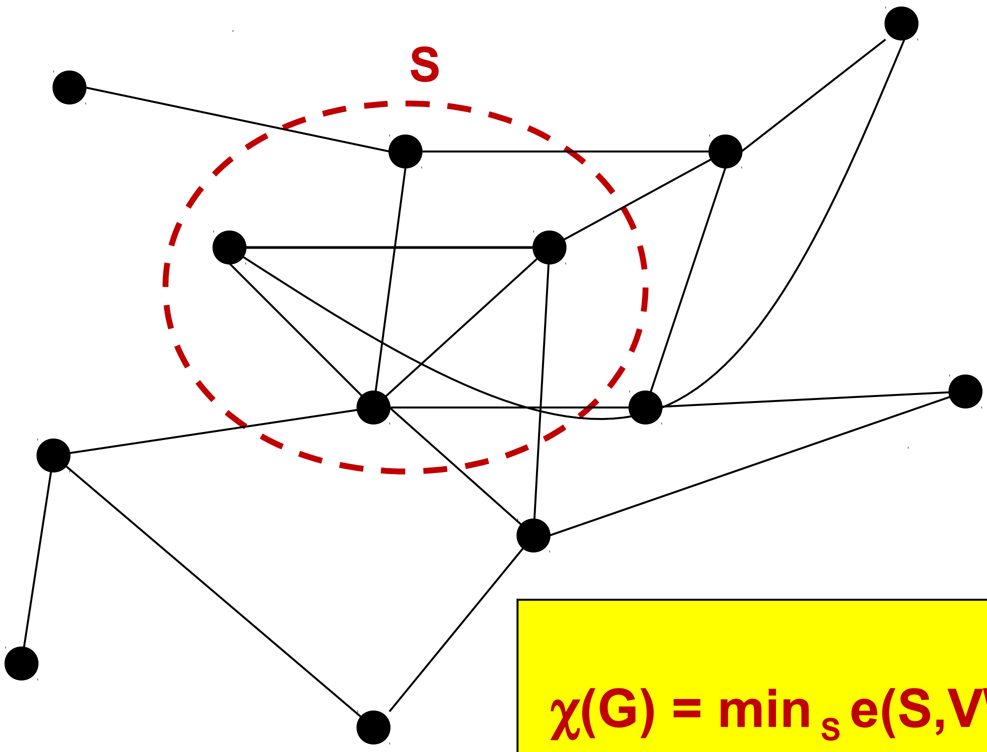




Qualquer pintura com **a** amarelos e **p** pretos resulta em seqüências parecidas com independentes.

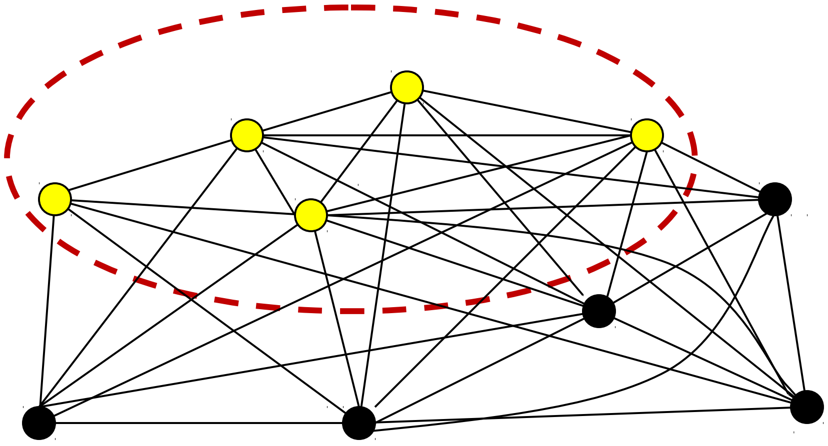
Existe pintura com longas sucessões de amarelos e pretos.

Apresentando a condutância

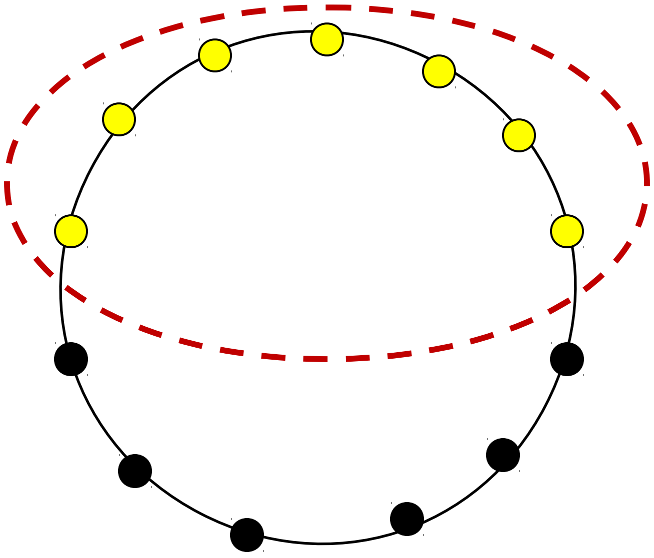


$$\chi(G) = \min_{S} e(S,V\backslash S) / \min\{Vol(S), Vol(V\backslash S)\}$$

Condutância alta e baixa

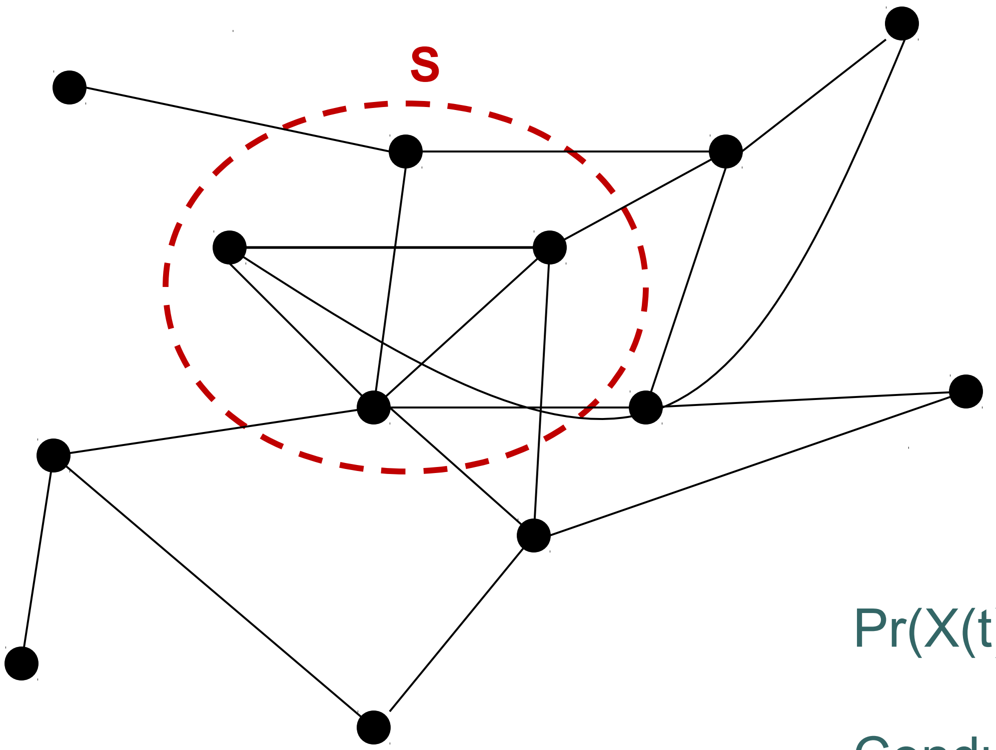


Condutância constante.



Condutância O(1/n).

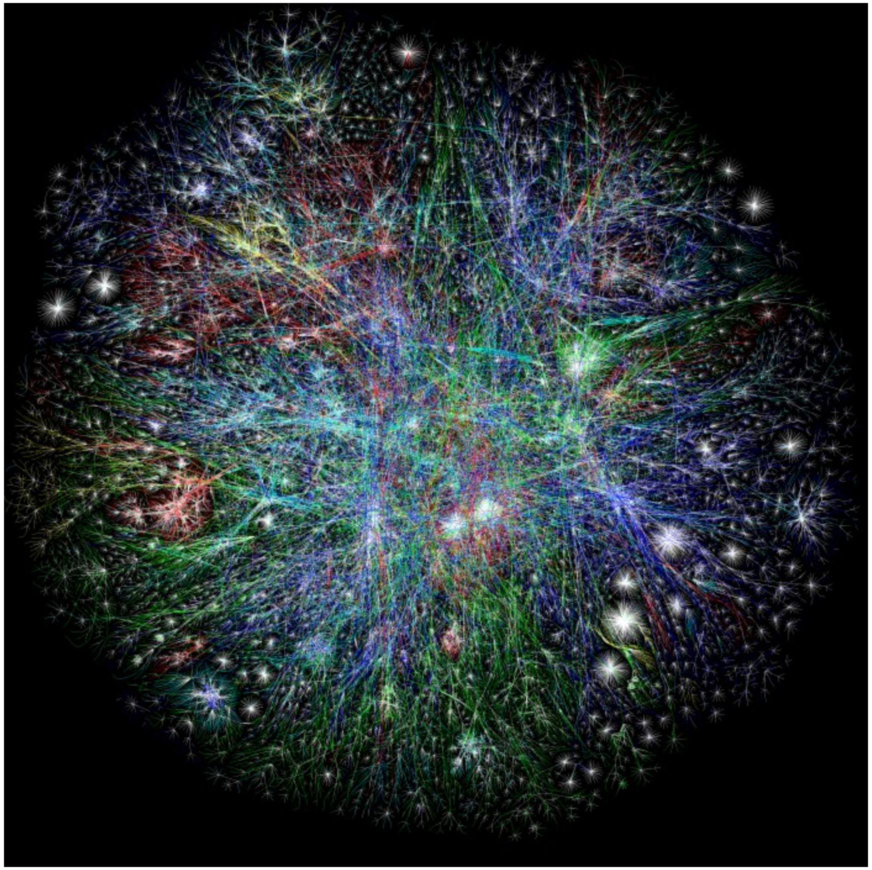
PA e a condutância



Pr(X(t) em S) -> Vol(S)/Vol(V)

Condutância tem a ver com taxa de congergência.

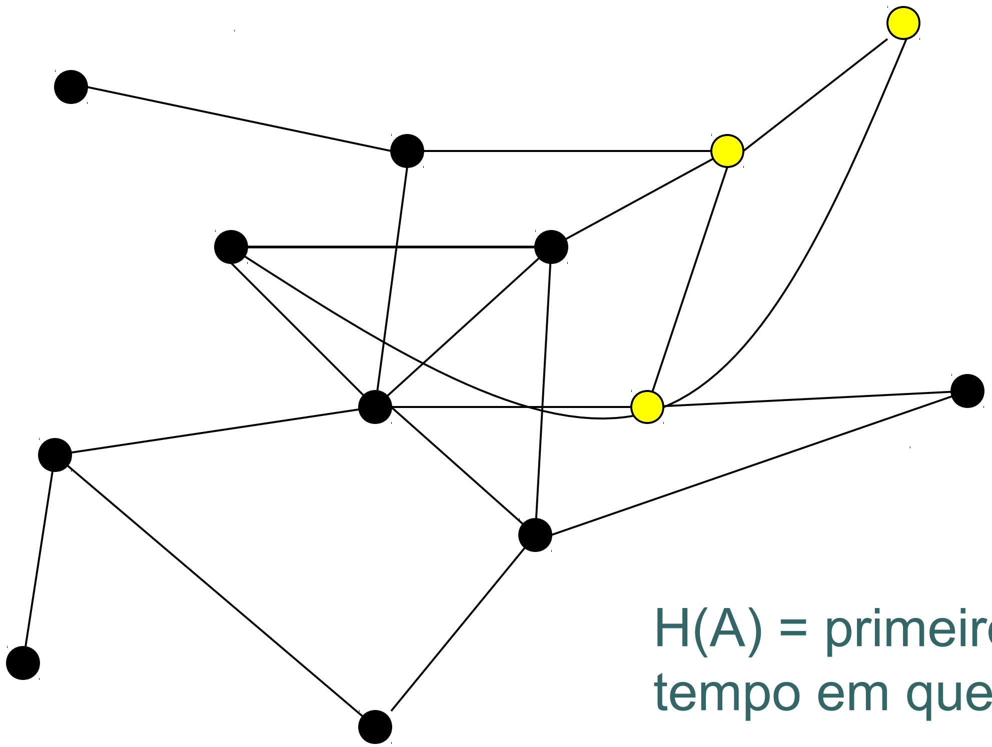
Trabalhe para o Google



No artigo original, o Pagerank é descrito em termos de PA`s.

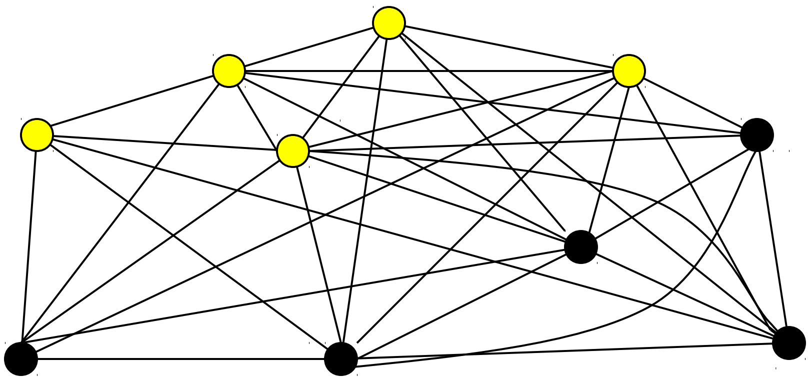
Aproximações de campo médio

Tempos de chegada (hitting)

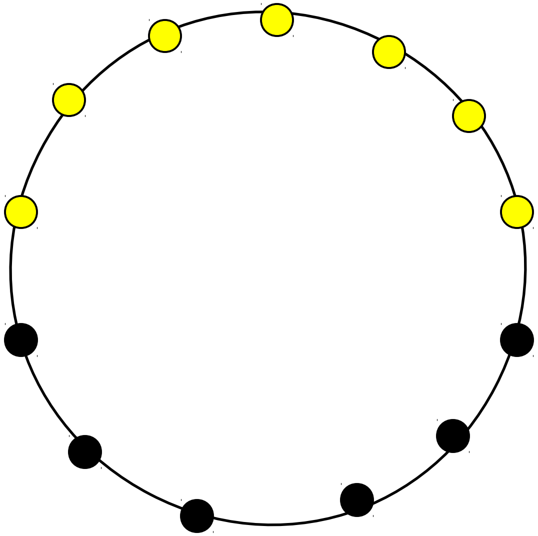


H(A) = primeiro instante de tempo em que se pisa em A

Dois tipos de H(A)

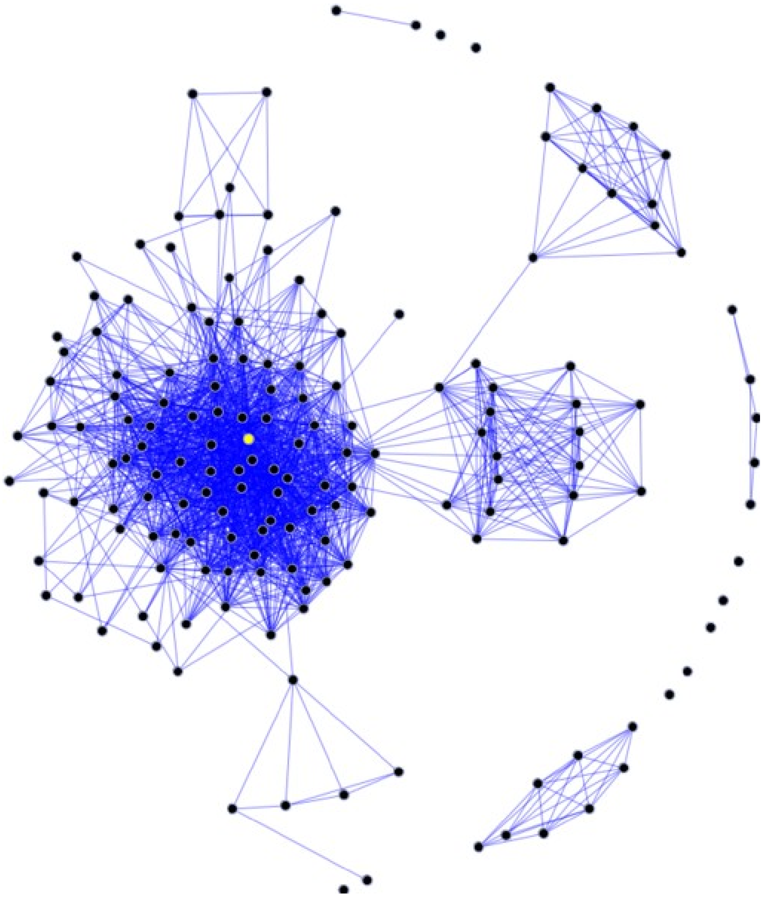


Se há a amarelos e p pretos, o tempo de chegada é geométrico



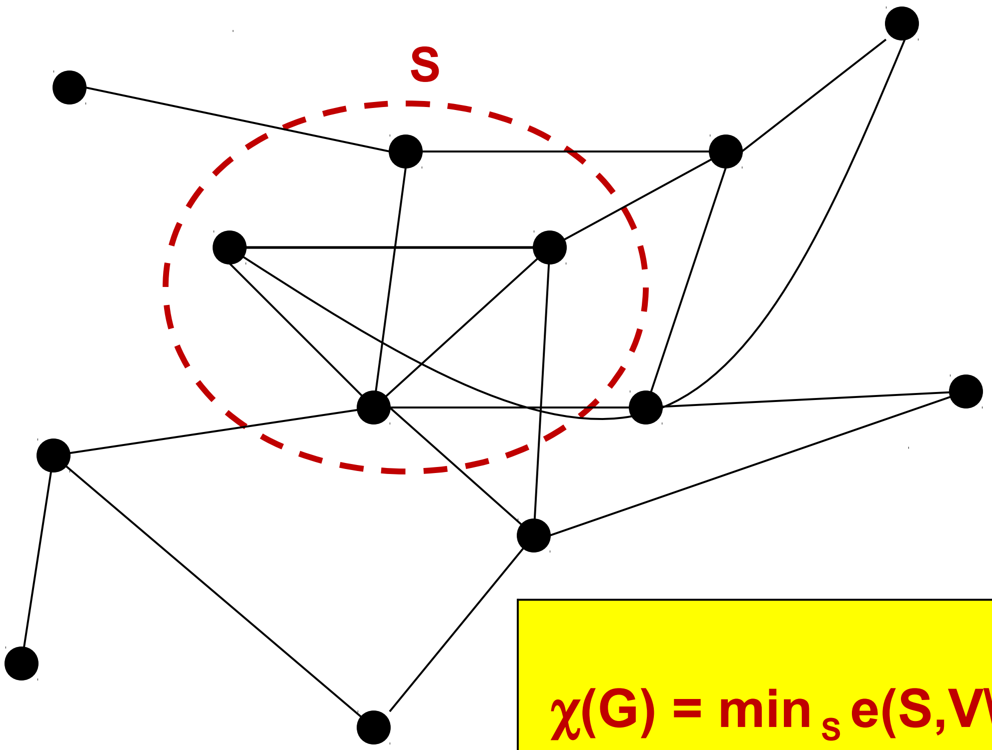
Distribuição bem mais complicada

De que tipo é este grafo?



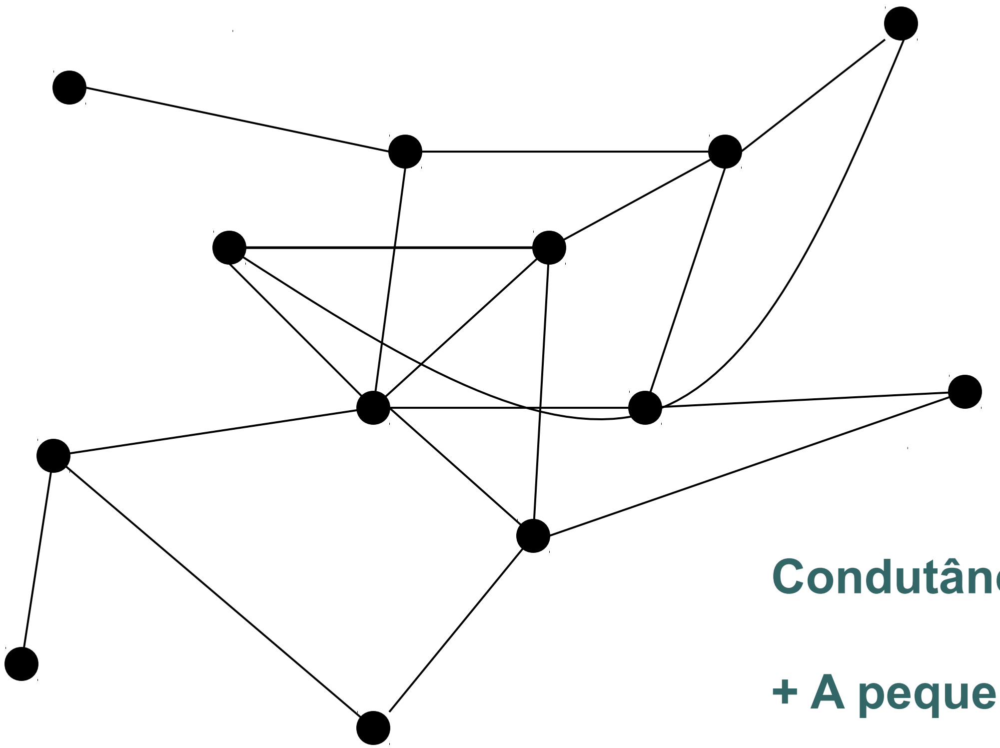
Este aqui é de um tipo muito ruim...

Relembrando a condutância



$$\chi(G) = \min_S e(S,V\backslash S) / \min\{Vol(S),Vol(V\backslash S)\}$$

Uma heurística



Condutância alta

+ A pequeno

= H(A) geométrico/exponencial

Por que deve ser verdade?

Uniformidade da distribuição de caminhos

Por que deve ser verdade?

Uniformidade da distribuição de caminhos

Mais exatamente

T passos sucessivos de um PA
“=”
um passo no grafo completo
(com pesos)

Breve digressão

- T é um tempo de **r – mistura** se:

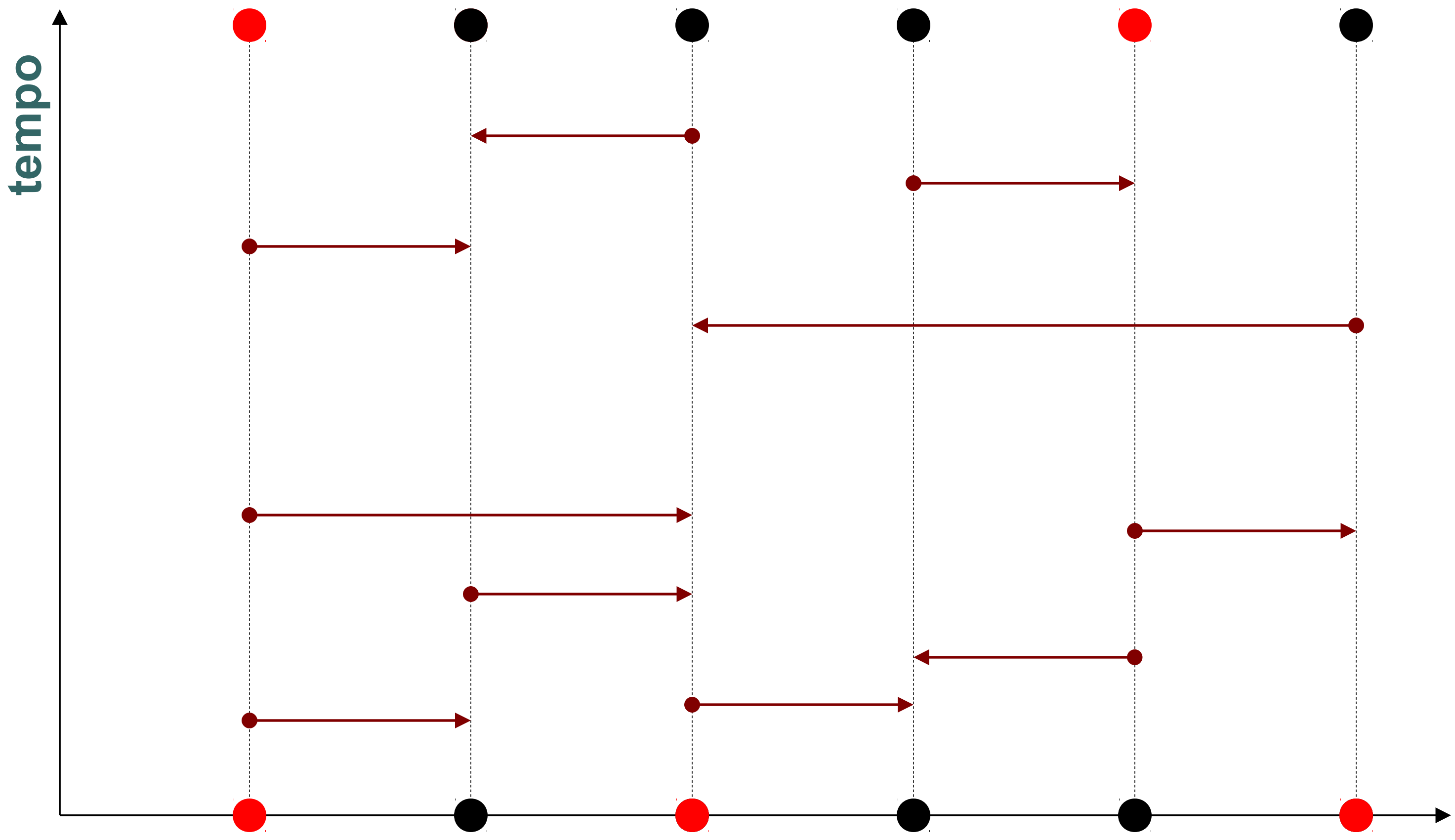
$$|Pr[X(T) \in A \mid X(0)=x] - q(A)| < r$$

para todo elemento x e conjunto A. Se T<<Ex(H(A)),

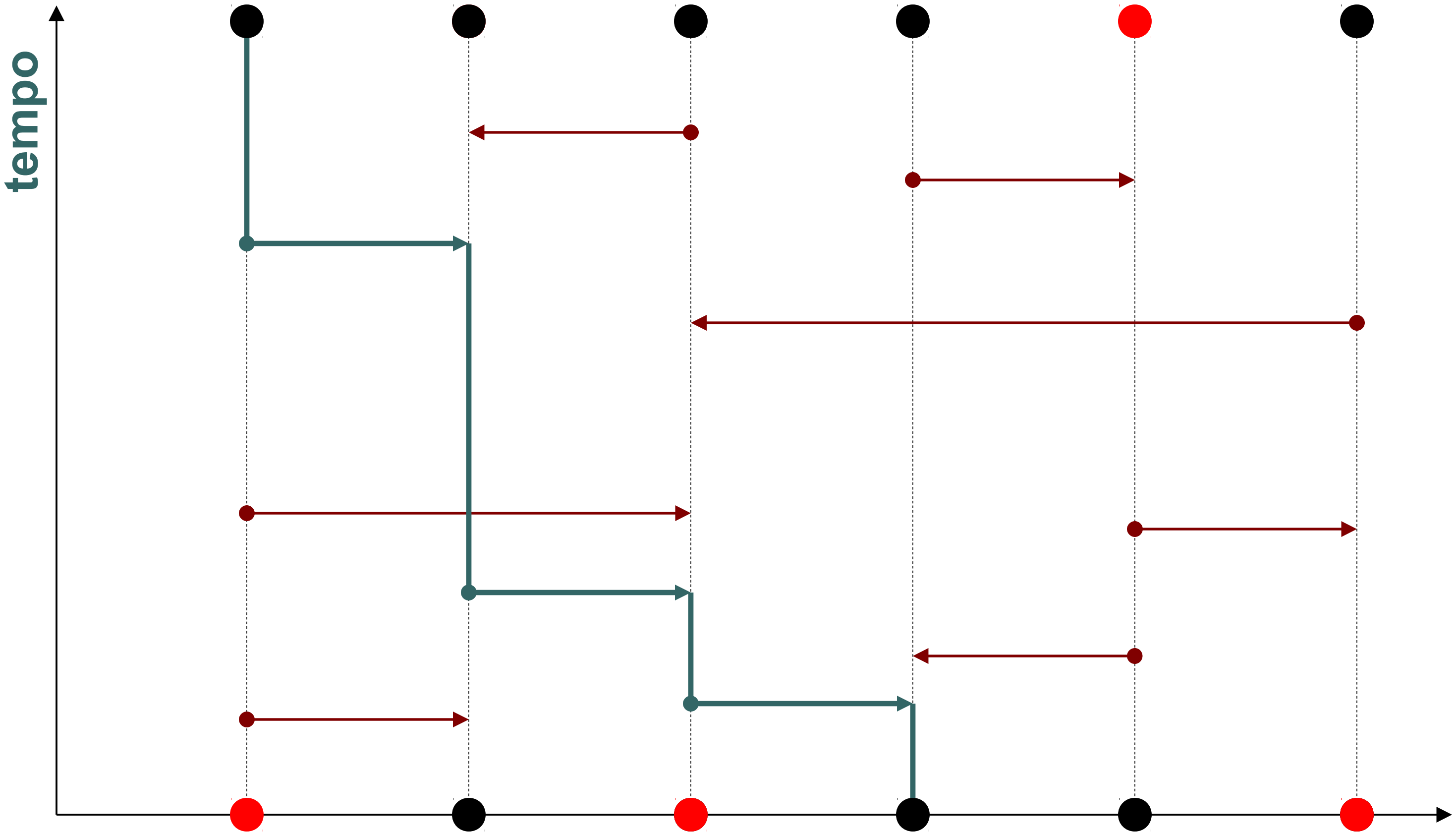
Pr [H(A) > t] = (1 ± e) exp(-t/(1±e) Ex(H(A)))
[Aldous, Brown, O`]

O modelo do votante e PA 's coalescentes

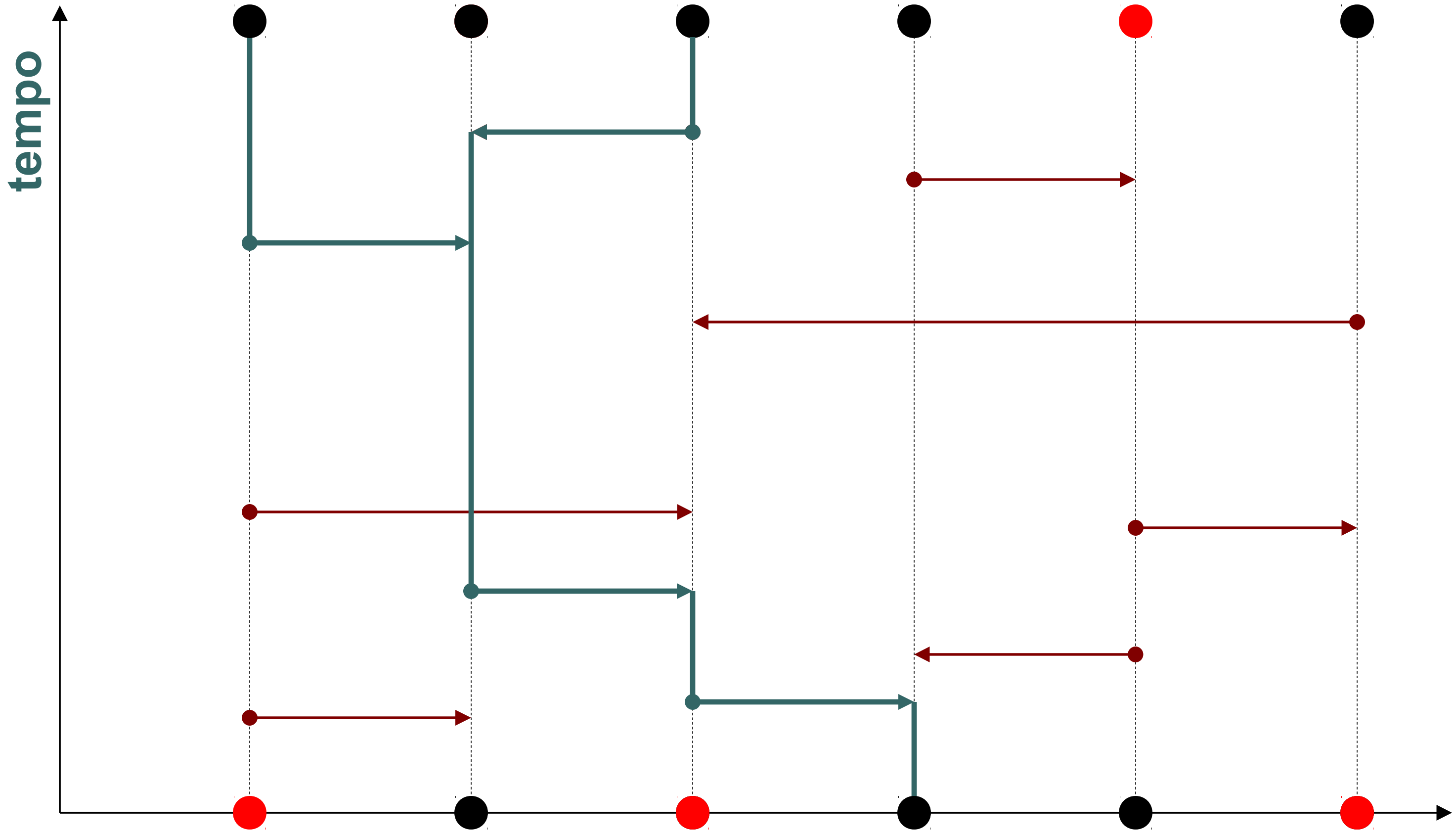
Dualidade



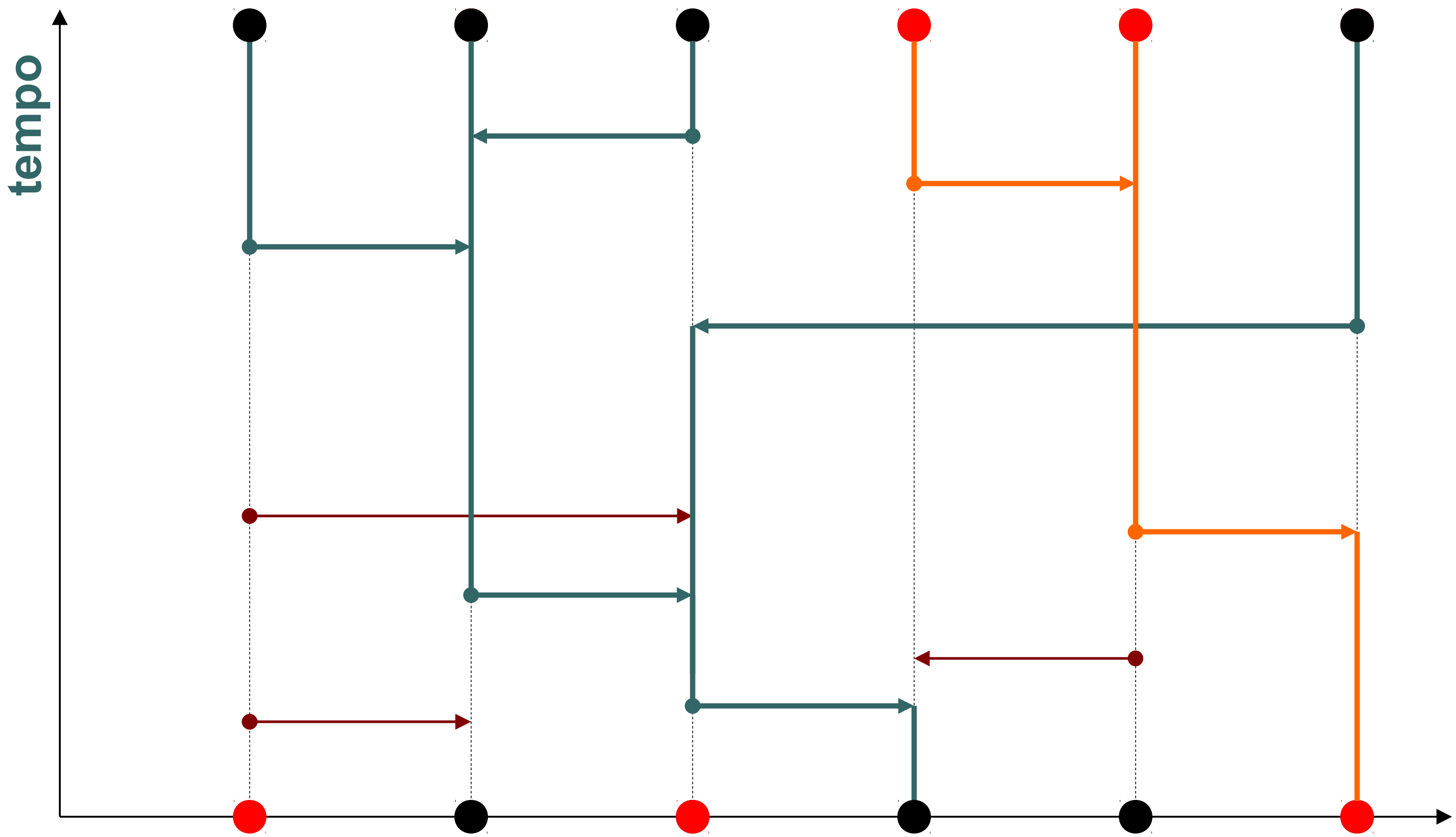
Dualidade



Dualidade



Dualidade



Conclusões da dualidade

- Existe um tempo de consenso.
- Votante é relacionado com passeios aleatórios coalescentes.
- Consenso < coalescência total

O problema tratado

- Entender a distribuição do tempo de coalescência total
- Só se sabe em grafos muito especiais (Cox 89, Cooper et al 2008)
- Aldous/Fill: problema posto em 94.

Campo médio

- No grafo completo, como é o tempo até a próxima coalescência?
- Como é este tempo em um grafo mais geral, com tempo de mistura “pequeno”?

Campo médio

- No grafo completo, como é o tempo até a próxima coalescência?
- Como é este tempo em um grafo mais geral, com tempo de mistura “pequeno”?

O metagrafo

K passeios aleatórios em G

=

um passeio em um grafo G(K)

H(A) no metagrafo

K passeios aleatórios em G
=>
próxima coalescência é H(D)
para um certo D no metagrafo
=>
aprox. exponencial

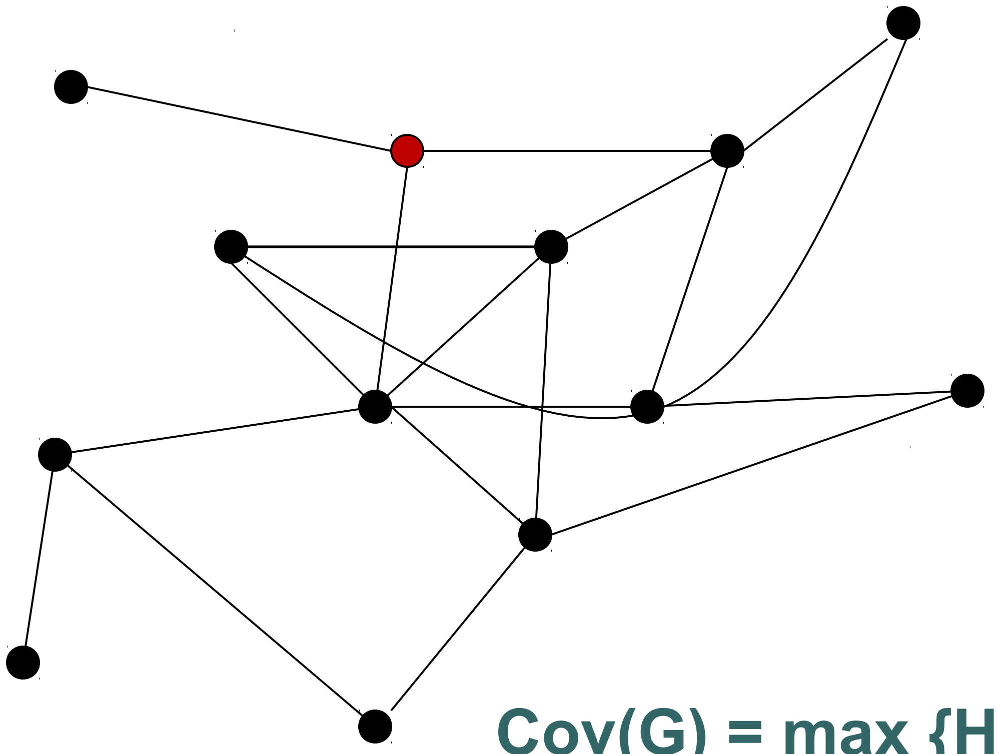
O desafio

Entender o valor esperado deste tempo a partir do tempo para K=2.

No grafo completo, tempo esperado para n é aprox. Tempo para 2

Tempos de cobertura: alguns problemas em aberto

O que é Cov(G)?



Cov(G) = max {H(v): v em G}

Os problemas

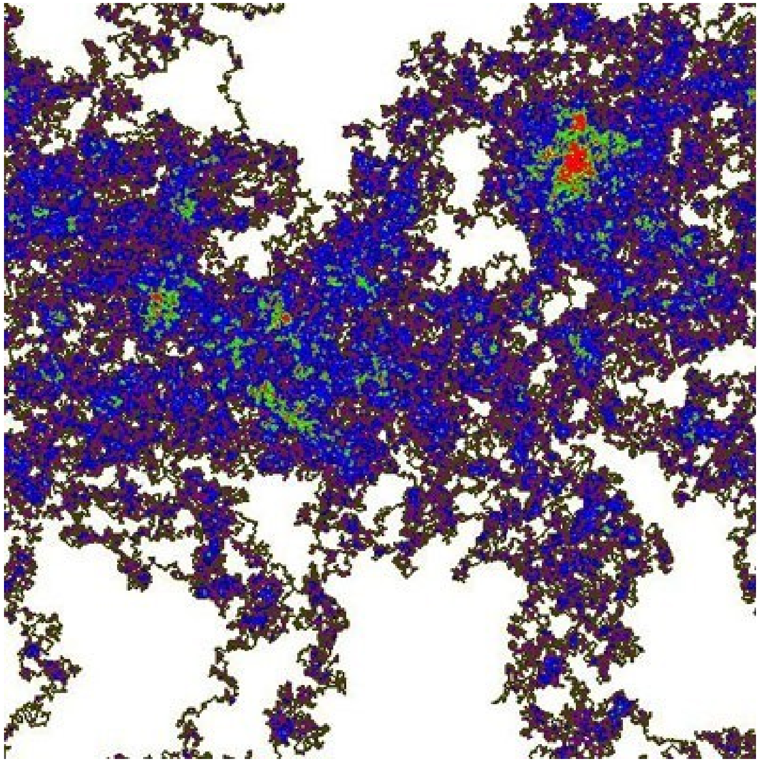
Como é a distribuição de Cov(G)?

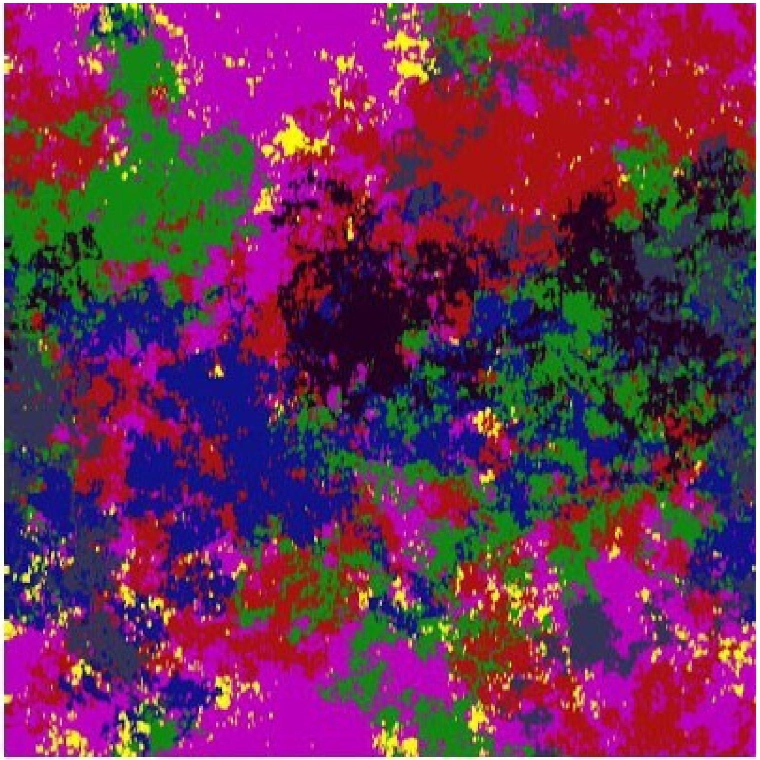
Como é o conjunto dos pontos cobertos por último?

Problema aberto há 20 anos

Como é a distribuição de Cov(G) num toro discreto de 3 dimensões?

Como é em 2 dimensões?





Dembo, Peres, Rozen and Zeitouni: 2001/4

Como deve ser em 3d?

Trabalho de tese de doutorado de Alan Prata (IMPA)

Referências

- Aldous/Fill “Reversible Markov Chains and Random Walks on Graphs” (na Web)
- Levin, Peres e Wilmer “Markov Chains and Mixing Times” (AMS; na Web)
- R. Durrett, “Random Graph Dynamics” (Cambridge)

Referências

- R.I.O. “Mean field conditions for coalescing random walks”
- R.I.O. e Alan Prata, “Fluctuations of cover times and the geometry of the set of uncovered points” (em preparação)