Indução e Recursão

Renato Purita Paes Leme

Será mostrado o que é uma definição indutiva, e duas abordagens para a construção de conjuntos definidos indutivamente: *top-down* e *bottom-up*. O objetivo de uma definição indutiva é, dado um conjunto universo Ω destacar um subconjunto C com determinadas propriedades. Além do conjunto universo Ω, considere um conjunto base $B \subseteq \Omega$ e um conjunto $\mathcal{F}$ de funções n-árias:

$$f : \Omega^n \longrightarrow \Omega$$

Dizemos que um conjunto X é indutivo em Ω com relação ao par $\langle B, \mathcal{F} \rangle$ se:

- $B \subseteq X$
- Se $f \in \mathcal{F}$ e, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ então, $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in X$

Note, que a intersecção dois ou mais conjuntos indutivos é ainda um conjunto indutivo. Por exemplo, se X_γ é um conjunto indutivo para todo $\gamma \in \Gamma$ então a intersecção $X = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ também é indutivo, pois:

- $B \subseteq X_\gamma \Longrightarrow B \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma = X$
- Se $f \in \mathcal{F}$ e, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ então, $x_1, x_2, ..., x_n \in X_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$ logo $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in X_\gamma$, pois X_γ é indutivo, logo: $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma = X$

Definição 1 (Top-down). *Definimos o conjunto C^* definido indutivamente em Ω a partir de $\langle B, \mathcal{F} \rangle$ como o menor conjunto indutivo, ou seja:*

$$C^* = \cap \{X \mid X \textit{ é indutivo com respeito a } \langle B, \mathcal{F} \rangle\}$$

Outro modo de definir um conjunto indutivamente é o seguinte:

Definição 2 (Bottom-up). *Dado o par $\langle B, \mathcal{F} \rangle$ definimos os conjuntos C_n da seguinte forma: um elemento $x \in C_n$ se existe uma seqüência $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ com $x = x_n$ tal que: $x_i \in B$ ou, existe um função k-ária $f : \Omega^k \longrightarrow \Omega$ e $j_1 < ... < j_k < i$ em $\mathcal{F}$ tais que $x_i = f(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_k})$*

Dessa forma, definimos o conjunto indutivo C_* definido em Ω a partir de $\langle B, \mathcal{F} \rangle$ como:

$$C_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

Teorema 3. *As definições* bottom-up *e* top-down *de conjuntos indutivos são equivalentes, ou seja, dado Ω e o par $\langle B, \mathcal{F} \rangle$, vale:*

$$C_* = C^*$$

PROVA. Mostremos que $C_* \subseteq C^*$ e $C^* \subseteq C_*$.

Se $x \in C_*$ então existe uma sequencia $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ com $x = x_n$ como na definição de C_*. Provemos que $x_i \in C^*$ para todo $i \leq n$. Façamos isso por indução: $x_1 \in B \subseteq C^*$. Tomando agora por hipótese que $x_j \in C^*$ para todo $j < i$ provemos que $x_i \in C^*$. Se $x_i \in B$ então $x_i \in C^*$ e não há mais o que provar. Caso contrário: existe um função k-ária $f : \Omega^k \longrightarrow \Omega$ e $j_1 < ... < j_k < i$ tais que $x_i = f(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_k})$ Como por hipótese $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_k} \in C^*$ e C^* é fechado por $f \in \mathcal{F}$, pois ele é indutivo, temos que $x_i \in C^*$

Provemos agora a outra inclusão: É fácil ver que C_* é um conjunto indutivo, pois $B = C_0 \subseteq C_*$ e porque, se $f \in \mathcal{F}$ e, $x_1, x_2, ..., x_n \in C_*$, existem sequencia: $\left\langle x_i^1, x_i^2, ..., x_i^{k_i} \right\rangle$ com $x_i = x_i^{k_i}$, construída de acordo com as regras enunciadas na definição bottom-up. Assim, podemos construir a seguinte sequencia:

$$\left\langle x_1^1, x_1^2, ..., x_1^{k_1} = x_1, x_2^1, x_2^2, ..., x_2^{k_2} = x_2, ..., x_n^1, x_n^2, ..., x_n^{k_n} = x_n, \overline{x} \right\rangle$$

onde $\overline{x} = f(x_1, ..., x_n)$. Logo $f(x_1, ..., x_n) \in C^*$, e portanto, C^* é um conjunto indutivo. Assim: $C_* \in \{X \mid X \text{é indutivo com respeito a } \langle B, \mathcal{F} \rangle\}$, logo $C^* \subseteq C_*$

$\square$

Um exemplo de definição indutiva é o conjunto dos números naturais dentro dos números reais. O conjunto base é $\{1\}$ e o único elemento de $\mathcal{F}$ é a função unária sucessor:

$$s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad s(x) = x + 1$$

Dessa forma, podemos definir $\mathbb{N}$ como sendo o conjunto indutivo gerador por: $\langle \{1\}, \{s\} \rangle$. Esse exemplo não é tão bom, pois intuitivamente os números naturais são algo mais básico do que os números reais, portanto os ultimos deveriam ser gerados com o auxílio dos primeiros, e não ao contrário. Os axiomas de Peano, que são de natureza indutiva (além disso, definem o *axioma* *da indução* para os números naturais) definem os naturais sem recorrer aos reais. E, como Landau prova em *Foundations of Analysis*, podemos construir e deduzir todas as propriedades dos números racionais, reais e complexos a partir dos números naturais.

Outro exemplo é a definição de árvore. Suponha que temos um conjunto de nós Φ. Uma maneira de definir uma árvore com elementos de Φ é definir da seguinte forma:

- a árvore vazia é uma árvore
- um conjunto que contém um elemento de Φ e um conjunto de árvores é uma árvore

Isso é equivalente a tormarmos como conjunto base $\{\emptyset\}$ e definirmos o conjunto de funções $\mathcal{F} = \{f_i | i \in \mathbb{N}\}$ tal que f_i recebe como argumento i árvores e um elemento de Φ e monta uma árvore a partir desse elemento:

$$f_i(T_1, T_2, ..., T_i, \phi) = \{\phi, T_1, T_2, ..., T_i\}$$

Definições indutivas tem uma grande vantagem na prova de teoremas. Se queremos provar uma propriedade $\mathfrak{P}$ para um subconjunto $X \subseteq \Omega$ definido indutivamente a partir de $\langle B, \mathcal{F} \rangle$, basta provar $\mathfrak{P}$ para os elemntos de B, e provar para cada função $f : \Omega^k \longrightarrow \Omega$ em $\mathcal{F}$ que, se a propriedade $\mathfrak{P}$ vale para $x_1, ..., x_k$, então ela também vale para $f(x_1, ..., x_k)$.