

Notas de aula
Superfícies de Riemann 2020
27 de outubro de 2020

Jorge Vitório Pereira

Sumário

Parte 1. Definição, exemplos e Riemann-Hurwitz	7
Capítulo 1. Variedades complexas	9
1. Definições básicas	9
2. Exemplos fundamentais	12
3. Exercícios	14
Capítulo 2. Definição e exemplos de superfícies de Riemann	17
1. Poliedros	17
2. Superfícies Riemannianas	18
3. Curvas Algébricas	20
4. Continuação analítica	23
5. Exercícios	24
Capítulo 3. Aplicações holomorfas entre superfícies de Riemann	25
1. Propriedades básicas	25
2. O grau de aplicações holomorfas	28
3. Germes de automorfismos	29
4. Exercícios	30
Capítulo 4. Topologia de superfícies e a fórmula de Riemann-Hurwitz	31
1. Classificação de superfícies compactas	31
2. A fórmula de Riemann-Hurwitz	34
3. Quocientes de superfícies de Riemann por grupos finitos	35
4. Aplicações da fórmula de Riemann-Hurwitz	39
5. Exercícios	43
Parte 2. Fibrados lineares, divisores e Riemann-Roch	45
Capítulo 5. Fibrados vetoriais	47
1. Fibrados vetoriais	47
2. Fibrados vetoriais holomorfos	51
3. Divisores em superfícies de Riemann	51

4. Exercícios	54
Capítulo 6. Feixes e cohomologia	55
1. Pré-feixes e feixes	55
2. Cohomologia de Čech	63
3. Isomorfismo de de Rham	71
4. Teorema de Cartan-Serre	72
Capítulo 7. Formas diferenciais e cohomologia de Dolbeault	73
1. Formas diferenciais em variedades complexas	73
2. Isomorfismo de Dolbeault	76
3. Cohomologia de Dolbeault de fibrados vetoriais	81
Capítulo 8. Formas diferenciais em superfícies de Riemann	83
1. Cohomologia de abertos de \mathbb{C}	83
2. Comparação entre cohomologias	85
3. Formas diferenciais meromorfas e o Teorema dos resíduos	88
Capítulo 9. Fibrados lineares em superfícies de Riemann	91
1. Fibrados lineares e feixes de funções meromorfas	91
2. Teoremas clássicos na linguagem de feixes	92
3. Existência de seções meromorfas para fibrados lineares	93
4. Exercícios	94
Capítulo 10. O Teorema de Riemann-Roch	97
1. Morfismos entre fibrados lineares holomorfos	97
2. Uma primeira versão do Teorema de Riemann-Roch	99
3. Primeiras aplicações	100
4. Teorema de Riemann-Roch	103
5. Exercícios	106
Capítulo 11. Sistemas lineares e mergulhos projetivos	107
1. Aplicações e sistemas lineares	107
2. Superfícies de Riemann de gênero um	109
3. Superfícies de Riemann hiperelípticas	111
Capítulo 12. Pontos de inflexão e pontos de Weierstrass	115
1. Divisores associados a sistemas lineares	115
2. Semigrupos de valores e pontos de Weierstrass	118
3. Pontos de Weierstrass	120
4. Automorfismos de superfícies de Riemann	121

Parte 3. Diferenciais holomorfas e o Teorema de Abel-Jacobi	123
Capítulo 13. Períodos de formas diferenciais	125
1. Representação poligonal de uma superfície de Riemann compacta	125
2. Integração do produto de 1-formas fechadas	126
3. Relações bilineares de Riemann	127
4. A Jacobiana de uma superfície de Riemann	129
Capítulo 14. O Teorema de Abel-Jacobi	131
1. Lei de reciprocidade	131
2. Existência de formas logarítmicas com resíduos prescritos	132
3. Teorema de Abel	132
4. Teorema de Jacobi	133
Referências Bibliográficas	135

Parte 1

Definição, exemplos e Riemann-Hurwitz

CAPÍTULO 1

Variedades complexas

Apesar do objetivo principal deste texto ser apresentar propriedades de superfícies de Riemann, começamos definindo o conceito mais geral de variedades complexas. Apresentamos também neste capítulo alguns exemplos fundamentais de variedades complexas que serão de suma importância no estudo das superfícies de Riemann.

1. Definições básicas

1.1. Cartas complexas. Grosso modo, variedades complexas são espaços topológicos localmente modelados sobre abertos de \mathbb{C}^n . Esta ideia vaga de 'localmente modelado' é formalizada através do conceito de carta complexa.

DEFINIÇÃO 1.1. *Seja X um espaço topológico e $p \in X$ um ponto qualquer. Uma carta complexa (U, ϕ) de X centrada em p é um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ de um aberto U de X que contém p em um aberto V de \mathbb{C}^n . O aberto U é o domínio da carta (U, ϕ) e o inteiro n é a sua dimensão.*

Para obter uma teoria coerente é necessária uma noção de compatibilidade entre cartas distintas.

DEFINIÇÃO 1.2. *Duas cartas complexas (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2) de um mesmo espaço topológico X são compatíveis se possuem a mesma dimensão e a aplicação de transição*

$$(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})|_{\phi_1(U_1 \cap U_2)} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

é holomorfa.

A definição acima estipula, implicitamente, que cartas com mesma dimensão e domínios disjuntos são compatíveis.

1.2. Atlas e estruturas complexas. Para dotar um espaço topológico de uma estrutura de variedade complexa é preciso uma coleção de cartas complexas com domínios exaurindo todo o espaço em questão. Seguindo terminologia corrente, chamaremos tais coleções de cartas de atlas complexos.

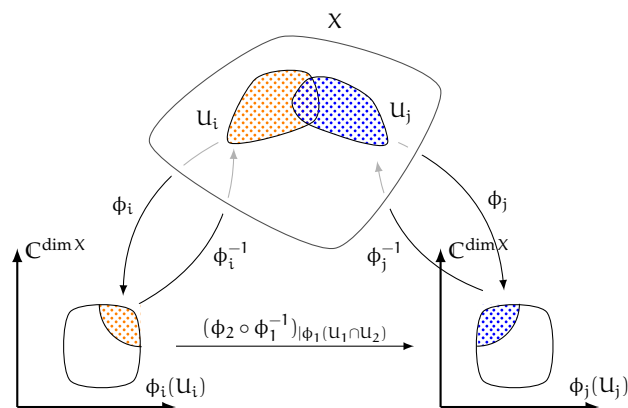


FIGURA 1.1. Aplicação de transição.

DEFINIÇÃO 1.3. Um atlas complexo de um espaço topológico X é um conjunto $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ de cartas complexas duas a duas compatíveis tal que X é recoberto pelos domínios das cartas.

A noção de cartas complexas compatíveis introduzida na Definição 1.2 induz uma noção de equivalência entre dois atlas complexos de um mesmo espaço topológico.

DEFINIÇÃO 1.4. Dois atlas complexos \mathcal{A} e \mathcal{A}' de um mesmo espaço topológico X são equivalentes se qualquer par de cartas, sendo uma em \mathcal{A} e outra em \mathcal{A}' , é compatível.

De posse destes conceitos preliminares, podemos definir estruturas complexas em espaços topológicos.

DEFINIÇÃO 1.5. Uma estrutura complexa em um espaço topológico X é uma classe equivalência de atlas complexos de X .

As cartas complexas de um espaço topológico X munido de uma estrutura complexa são as cartas complexas pertencentes a algum dos atlas complexos equivalentes que representam a estrutura complexa de X .

1.3. Variedades complexas.

DEFINIÇÃO 1.6. Uma variedade complexa X é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável munido de uma estrutura complexa.

Variedades de classe C^r , com $r \in \{0, 1, \dots, \infty, \omega\}$, e dimensão n são definidas de forma análoga. Basta substituir o contra-domínio das cartas por abertos de \mathbb{R}^n e pedir que as aplicações de transição sejam de classe C^r . Similarmente, variedades de classe C^r , com $r \geq 1$, orientadas são definidas impondo que todas as aplicações

de transição preservem orientação, isto é, o determinante das matrizes jacobianas das aplicações de transição são funções estritamente positivas.

PROPOSIÇÃO 1.7. *Toda variedade complexa de dimensão n é, de forma natural, uma variedade de classe C^r , orientada e de dimensão $2n$ para todo $r \in \{0, \dots, \infty, \omega\}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Aplicações holomorfas são de classe C^r para todo $r \in \{0, \dots, \infty, \omega\}$ e preservam orientação. \square

OBSERVAÇÃO 1.8. *Existem espaços topológicos com base enumerável munidos de estruturas complexas que não são Hausdorff. Por exemplo, podemos considerar o quociente da união disjunta $\mathbb{C} \amalg \mathbb{C}$ de duas retas complexas via a relação de equivalência \sim que identifica pontos z_1 e z_2 das duas cópias de \mathbb{C} se, e somente, $z_1 = z_2$ e $z_1, z_2 \neq 0$. O espaço topológico $\mathbb{C} \amalg \mathbb{C} / \sim$ é a reta complexa com duas origens.*

OBSERVAÇÃO 1.9. *Também existem espaços topológicos Hausdorff e conexos munidos de estruturas complexas que não possuem base enumerável. Calabi e Rosenlicht [CR53] exibiram exemplos de espaços topológicos munidos de estruturas complexas de dimensão maior ou igual dois. Em dimensão complexa dois, Calabi e Rosenlicht exibem um exemplo obtido através de adaptação da construção da superfície de Prüfer (um espaço topológico conexo e Hausdorff munido de uma estrutura diferenciável de dimensão real dois que não possui base enumerável). Em contrapartida, todo espaço topológico Hausdorff e conexo munido de uma estrutura complexa de dimensão um possui base enumerável. Este é o conteúdo do Teorema de Rado [Rad25]. Provas modernas do Teorema de Rado podem ser encontradas em [For91, Capítulo 2, Teorema 23.2], [Hub06, Capítulo 1, Teorema 1.3.3].*

1.4. Funções e aplicações holomorfas. Muitos dos conceitos da análise complexa em \mathbb{C}^n , especialmente aqueles definidos por meio de propriedades locais, possuem versões em variedades complexas. Por exemplo, segue a definição de funções holomorfas.

DEFINIÇÃO 1.10. *Seja X uma variedade complexa e $V \subset X$ um aberto. Uma função $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa se para todo $p \in V$ existe uma carta complexa (U, ϕ) centrada em p e com $U \subset V$ tal que $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomorfa. O conjunto de todas as funções holomorfas definidas no aberto V é denotado por $\mathcal{O}_X(V)$.*

As aplicações holomorfas entre variedades complexas são definidas de forma análoga.

DEFINIÇÃO 1.11. *Se X e Y são variedades complexas (não necessariamente de mesma dimensão) então uma aplicação $F : X \rightarrow Y$ é holomorfa se para todo ponto $p \in X$ existem uma carta (U, ϕ) de X centrada em p e uma carta (V, ψ) de Y com domínio V contendo $F(U)$ tal que a aplicação $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$, definida entre abertos de $\mathbb{C}^{\dim X}$ e $\mathbb{C}^{\dim Y}$, é holomorfa.*

A noção natural de equivalência na teoria das variedades complexas é o conceito de biholomorfismo.

DEFINIÇÃO 1.12. *Duas variedades complexas X e Y são biholomorfas se existe uma aplicação holomorfa $F : X \rightarrow Y$ invertível e com inversa $F^{-1} : Y \rightarrow X$ também holomorfa.*

2. Exemplos fundamentais

2.1. Espaços vetoriais, bolas e polidiscos. Entre os exemplos mais simples de variedades complexas encontram-se os espaços vetoriais complexos de dimensão finita. Se V é um espaço vetorial complexo de dimensão n então qualquer isomorfismo de espaços vetoriais complexos entre V e \mathbb{C}^n muni V de uma estrutura complexa. Note que dois isomorfismos distintos $\phi_1 : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ e $\phi_2 : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ são tais que $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = A \cdot z$ para alguma matriz $A \in GL(n, \mathbb{C})$. Em particular, a função de transição $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ é holomorfa e, conseqüentemente, todos os isomorfismos (de espaços vetoriais complexos) entre V e \mathbb{C}^n definem a mesma estrutura complexa em V .

Denote por $\langle z, w \rangle$ o produto interno hermitiano padrão em \mathbb{C}^n , isto é, se $z = (z_1, \dots, z_n)$ e $w = (w_1, \dots, w_n)$ então

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \cdot \bar{w}_i.$$

Seja \mathbb{B}^n a bola unitária (com respeito a esse produto hermitiano) em \mathbb{C}^n . Explicitamente,

$$\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \langle z, z \rangle < 1\}$$

a bola unitária em \mathbb{C}^n . A inclusão $\phi : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ muni \mathbb{B}^n de uma estrutura complexa.

PROPOSIÇÃO 1.13. *As variedades complexas \mathbb{C}^n e \mathbb{B}^n não são biholomorfas.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $F = (f^1, \dots, f^n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ uma aplicação holomorfa. Note que as restrições das coordenadas f_i de F a retas complexas passando por $0 \in \mathbb{C}^n$ são aplicações holomorfas de \mathbb{C} em abertos limitados de \mathbb{C} . O Teorema de Liouville implica que todas as coordenadas de F , e portanto a própria F , são funções constantes. \square

Em dimensão um, a bola \mathbb{B}^1 também é denotada por \mathbb{D} e é denominada disco unitário ou ainda disco de Poincaré. Denotaremos por \mathbb{D}^n o produto

$$\underbrace{\mathbb{D} \times \dots \times \mathbb{D}}_{n \text{ vezes}}$$

de n cópias do disco unitário. A inclusão natural $\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ muni o disco unitário de uma estrutura complexa.

OBSERVAÇÃO 1.14. *Poincaré mostrou que quando $n \geq 2$, o polidisco \mathbb{D}^n não é biholomorfo à bola unitária \mathbb{B}^n .*

2.2. Espaços projetivos. O conjunto das retas complexas passando pela origem de \mathbb{C}^{n+1} admite uma estrutura natural de variedade complexa de dimensão n chamada de espaço projetivo de dimensão n . Denotaremos essa variedade complexa por \mathbb{P}^n .

Para definir a estrutura complexa, observe que toda reta é determinada por um ponto $z \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$. Além disso, dois pontos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ determinam a mesma reta apenas quando diferem pela multiplicação por um número complexo não nulo. Consideramos o espaço topológico quociente

$$\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}}{\mathbb{C}^*}$$

com $\lambda \in \mathbb{C}^*$ agindo em $z = (z_0, \dots, z_n)$ via multiplicação nas coordenadas. Explicitamente

$$\lambda \cdot (z_0, \dots, z_n) = (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n).$$

É prática comum escrever o ponto no espaço quociente representado por $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ como

$$[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n.$$

Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ seja U_i o aberto $\{[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n | z_i \neq 0\}$. As aplicações

$$\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$[z_0 : \dots : z_n] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right)$$

definem um atlas complexo de \mathbb{P}^n já que ϕ_0, \dots, ϕ_n são cartas compatíveis (verifique!) e \mathbb{P}^n é coberto pelos domínios das mesmas.

2.3. Toros complexos. Considere \mathbb{C}^n como um grupo aditivo. Seja $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ um subgrupo discreto isomorfo à \mathbb{Z}^{2n} . O espaço quociente

$$\mathbb{C}^n / \Lambda$$

admite uma única estrutura de variedade complexa tal que a aplicação quociente

$$\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n / \Lambda$$

é uma aplicação holomorfa.

Topologicamente, todos os toros complexos de dimensão n são indistinguíveis. De fato, para qualquer subgrupo discreto Λ de \mathbb{C}^n gerado por $2n$ números complexos \mathbb{R} -linearmente independentes existe aplicação \mathbb{R} -linear invertível $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ que envia Λ em \mathbb{Z}^{2n} . Temos portanto o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^{2n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^n / \Lambda & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{R}^{2n} / \mathbb{Z}^{2n} \end{array}$$

induzido pela aplicação \mathbb{R} -linear A . Note que a aplicação entre \mathbb{C}^n / Λ e $\mathbb{R}^{2n} / \mathbb{Z}^{2n} \simeq (S^1)^{2n}$ é não apenas um homeomorfismo, mas também uma aplicação analítica real. Em contrapartida, dois toros complexos de mesma dimensão tomados ao azar não são biholomorfos.

3. Exercícios

EXERCÍCIO 1.1. Exiba atlas complexos para os toros complexos definidos na Seção 2.3.

EXERCÍCIO 1.2. O objetivo deste exercício é apresentar a variante da superfície de Prüfer construída por Calabi e Rosenlicht em [CR53]. Considere a união disjunta

$$Y = \coprod_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{R}_t^2$$

de \mathbb{R} cópias do plano real \mathbb{R}^2 e a relação de equivalência

$$(x_t, y_t) \sim (x_s, y_s) \Leftrightarrow \begin{cases} y_s = y_t, & e \\ x_s y_s + s = x_t y_t + t, & \text{se } s \neq t. \end{cases}$$

Mostre as seguintes afirmações:

- (1) O espaço topológico quociente $X = Y / \sim$ é Hausdorff.
- (2) A coleção de cartas

$$\begin{aligned} \phi_t : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow X \\ (x, y) &\mapsto [(x, y) \in \mathbb{R}_t^2], \end{aligned}$$

parametrizada por $t \in \mathbb{R}$ dota $X = Y / \sim$ de uma estrutura analítica real de dimensão 2.

- (3) O conjunto de pontos $\{\phi_t(0, 0)\}_{t \in \mathbb{R}} \in X$ é um conjunto discreto e, portanto, X não possui base enumerável.

Substituindo \mathbb{R} por \mathbb{C} nas definições de Y e X , obtemos espaço topológico Hausdorff munido de estrutura complexa que não possui base enumerável.

CAPÍTULO 2

Definição e exemplos de superfícies de Riemann

Após a preparação efetuada no Capítulo 1, a definição de superfície de Riemann pode ser apresentada em uma frase.

DEFINIÇÃO 2.1. *Uma superfície de Riemann é uma variedade complexa e conexa de dimensão um.*

Neste capítulo analisaremos exemplos de superfícies de Riemann *externos* à teoria, no sentido que não são apresentados via uma atlas complexo. Ao contrário, o atlas complexo é imposto por características dos exemplos.

1. Poliedros

Poliedros em \mathbb{R}^3 admitem uma estrutura natural de superfícies de Riemann. Para exibir um atlas complexo natural para um poliedro, observe que poliedros possuem três tipos de pontos: pontos no interior de uma face, pontos no interior de uma aresta, e vértices.

Se $p \in P$ é um ponto no interior de uma face, definimos uma carta com domínio igual ao interior da face que contém p e que envia esta isometricamente no plano complexo. Para um ponto p no interior de uma aresta, procedemos de forma similar. Note p está na intersecção de exatamente duas faces, e estas podem ser enviadas isometricamente no plano complexo de modo que suas imagens compartilhem a aresta que contém p . Construimos assim cartas complexas para vizinhanças de pontos no interior de arestas. Resta construir cartas

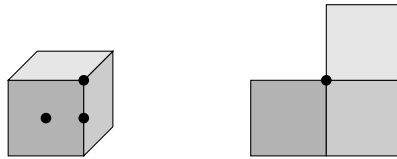


FIGURA 2.1. Na esquerda, um cubo em \mathbb{R}^3 e os três tipos de pontos. Na direita, projeção isométrica em \mathbb{C} de três faces em torno do vértice marcado.

complexas para vizinhanças de vértices. Para tanto começamos projetando isometricamente uma das faces vizinhas ao vértice em questão em \mathbb{C} de modo que a imagem do vértice seja igual à origem. A partir daí, seguimos considerando as outras faces vizinhas no sentido anti-horário e as projetando isometricamente em \mathbb{C} de forma sucessiva e de modo que as arestas contendo o vértice de faces consecutivas coincidam. Se paramos o processo imediatamente antes de retornar a face de partida, obtemos fechado F similar ao representado na Figura 2.1. Se denotamos por $\theta_1, \dots, \theta_k$ os ângulos interiores dos faces vizinhas ao vértice temos que $\sum_{i=1}^k \theta_i < 2\pi$. Definimos

$$\gamma = \frac{2\pi}{\sum_{i=1}^k \theta_i}$$

e aplicamos um ramo da transformação $z \mapsto z^\gamma$ ao fechado F . A escolha de γ garante que obtemos uma carta complexa para a vizinhança do vértice. A compatibilidade entre as cartas complexas é clara, já que as aplicações de transição são composições de aplicações afins $z \mapsto az + b$, com $a \in S^1$ e $b \in \mathbb{C}$, e ramos de potências fracionárias $z \mapsto z^\gamma$ longe da origem.

2. Superfícies Riemannianas

Seja (S, g) uma variedade Riemanniana diferenciável de dimensão real dois. Uma carta $(U, \phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2)$ de S é uma carta isotérmica se

$$g = \phi^* \left(\lambda(x, y) (dx^2 + dy^2) \right)$$

para alguma função $\lambda : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

PROPOSIÇÃO 2.2. *Se identificamos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $z \in \mathbb{C}$ via $z = x + iy$ então a aplicação de transição de duas cartas isotérmicas é uma aplicação holomorfa ou anti-holomorfa.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\psi : V' \rightarrow V$ um difeomorfismo de abertos de \mathbb{R}^2 . Se $\psi(x, y) = (a(x, y), b(x, y))$ então o pull-back via ψ da métrica Euclideana em V é igual à

$$\begin{aligned} \psi^* (dx^2 + dy^2) &= da^2 + db^2 = (a_x dx + a_y dy)^2 + (b_x dx + b_y dy)^2 = \\ &= (a_x^2 + b_x^2) dx^2 + (a_y^2 + b_y^2) dy^2 + 2(a_x \cdot a_y + b_x \cdot b_y) dx dy. \end{aligned}$$

Se $\psi^*(dx^2 + dy^2)$ difere da métrica Euclideana por multiplicação por uma função então

$$a_x \cdot a_y + b_x \cdot b_y = 0 \quad \text{e} \quad a_x^2 + b_x^2 = a_y^2 + b_y^2.$$

Com algum esforço é possível mostrar que $\{a_x = b_y, b_x = -a_y\}$ ou $\{a_x = -b_y, b_x = a_y\}$. Logo ψ é uma aplicação holomorfa no primeiro caso, e uma aplicação anti-holomorfa no segundo caso.

Essencialmente a mesma computação, quando efetuada em coordenadas holomorfas e anti-holomorfas torna o resultado mais transparente. De fato, se $z = x + iy$ então $\bar{z} = x - iy$, $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$ e podemos escrever $dx^2 + dy^2 = dzd\bar{z}$. Analogamente, se escrevemos $h(z, \bar{z}) = a(x, y) + ib(x, y)$ então

$$\begin{aligned}\psi^*(dzd\bar{z}) &= dhd\bar{h} = (h_z dz + h_{\bar{z}} d\bar{z}) (\bar{h}_z dz + \bar{h}_{\bar{z}} d\bar{z}) = \\ &= (|h_z|^2 + |h_{\bar{z}}|^2) dzd\bar{z} + h_z \bar{h}_{\bar{z}} dz^2 + h_{\bar{z}} \bar{h}_z d\bar{z}^2.\end{aligned}$$

Portanto, se $\psi^*(dx^2 + dy^2)$ é proporcional a métrica Euclideana usual então $h_{\bar{z}} = 0$ e ψ é holomorfa, ou $h_z = 0$ e ψ é anti-holomorfa. \square

A existência de cartas isotérmicas é garantida pelo seguinte resultado.

TEOREMA 2.3. *Seja g uma métrica Riemanniana de classe C^2 definida na vizinhança da origem de \mathbb{R}^2 . Existem coordenadas (x, y) em \mathbb{R}^2 tais que*

$$g = \lambda(x, y) (dx^2 + dy^2).$$

O Teorema 2.3 é conhecido como Teorema de Korn-Lichenstein e garante a existência de coordenadas isotérmicas para superfícies Riemannianas com métricas suficientemente diferenciáveis. Trata-se de um teorema de análise e está além do escopo deste texto. De fato o Teorema de Korn-Lichenstein é válido sob hipóteses mais gerais. A versão enunciada abaixo pode ser encontrada em [Var11, Seção 11.4], onde uma prova moderna é apresentada de forma didática. No caso particular de métricas analíticas, o teorema foi originalmente provado por Gauss.

COROLÁRIO 2.4. *Toda superfície diferenciável orientada de classe C^2 e munida de uma métrica Riemanniana de classe C^2 admite uma estrutura de superfície de Riemann.*

DEMONSTRAÇÃO. O Teorema 2.3 garante a existência de coordenadas isotérmicas. É possível portanto escolher um atlas de S com cartas isotérmicas que preservam a orientação de S . A Proposição 2.2 garante que as aplicações de transição são holomorfas. \square

EXEMPLO 2.1. *Considere a esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ munida da métrica*

$$g = (dx^2 + dy^2 + dz^2)|_{S^2}.$$

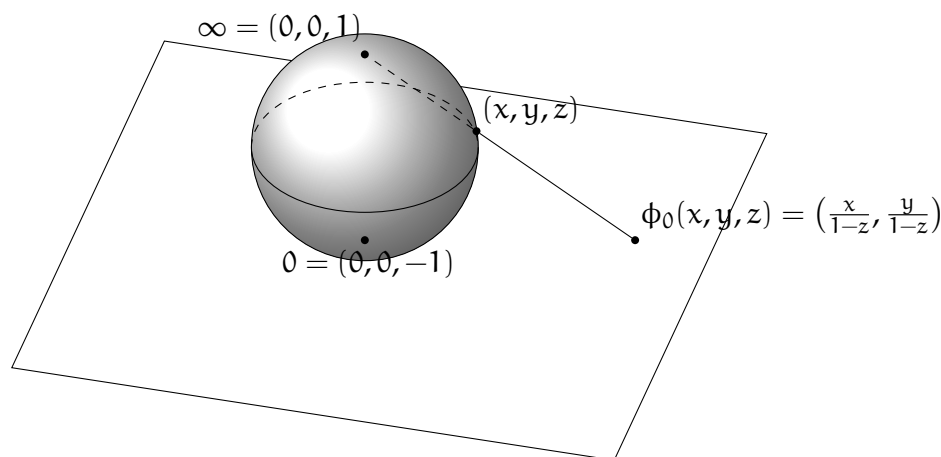


FIGURA 2.2. Projeção estereográfica

Considere os abertos $U_0 = S^2 - \{(0, 0, 1)\}$, $U_\infty = S^2 - \{(0, 0, -1)\}$ e as cartas $(U_0, \phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^2)$, $(U_\infty, \phi_\infty : U_\infty \rightarrow \mathbb{R}^2)$ definidas assim:

$$\phi_0(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \quad e \quad \phi_\infty(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, -\frac{y}{1+z} \right).$$

Note que

$$\phi_0^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Uma computação direta, apesar de ligeiramente longa, mostra que

$$(\phi_0^{-1})^*g = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Portanto ϕ_0 é uma carta isotérmica. De forma análoga, verifica-se que ϕ_∞ também é uma carta isotérmica.

Se explicitamos a aplicação de transição $\phi_\infty \circ \phi_0^{-1}$ na coordenada $z = x + iy$, verificamos que

$$\phi_\infty \circ \phi_0^{-1}(z) = \frac{1}{z}.$$

Ou seja, as cartas isotérmicas de $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ induzem estrutura de superfície de Riemann biholomorfa à reta projetiva \mathbb{P}^1 .

3. Curvas Algébricas

3.1. Curvas algébricas em \mathbb{C}^2 . Seja $P \in \mathbb{C}[x, y]$ um polinômio irreduzível e não constante. O conjunto $C = P^{-1}(0)$ é chamado de curva algébrica definida por

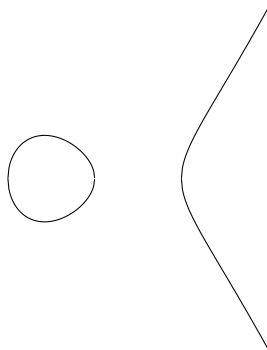


FIGURA 2.3. Pontos em um aberto limitado de \mathbb{R}^2 da curva definida por $y^2 - x^3 + x$. O subconjunto de \mathbb{C}^2 definido pela mesma equação é conexo, e de fato homeomorfo a um toro menos um ponto.

P. Considere o subconjunto

$$C^* = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{\partial P}{\partial x}(z) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial P}{\partial y}(z) \neq 0 \right\}.$$

É um fato não trivial, que não mostraremos aqui, que a irreducibilidade de P implica que o conjunto C^* é conexo e denso em C . A prova deste fato pode ser encontrado em textos básicos de Geometria Algébrica, veja por exemplo [Mum95, Corolário 4.16]. Assumindo este fato, mostraremos que o conjunto C^* admite uma estrutura natural de superfície de Riemann. Para tanto utilizaremos o teorema da função implícita que enunciamos a seguir.

TEOREMA 2.5. *Seja $U \subset \mathbb{C}^2$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa em U . Se p é um ponto tal que $f(p) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$ então existem um aberto $V \subset \mathbb{C}^2$ contendo p , um aberto $D \subset \mathbb{C}$ e uma função holomorfa $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$ tais que*

$$f^{-1}(0) \cap V = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in D\}.$$

Ou seja, $f^{-1}(0)$ é localmente o gráfico da função holomorfa φ .

PROPOSIÇÃO 2.6. *Se $P \in \mathbb{C}[x, y]$ é um polinômio irredutível não constante então $C^* = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid P(z) = 0 \text{ e } dP(z) \neq 0\}$ admite uma estrutura natural de superfície de Riemann.*

DEMONSTRAÇÃO. *Seja $z \in C^*$ um ponto qualquer. Como $dP(z) \neq 0$ temos que ou $\frac{\partial P}{\partial y}(z) \neq 0$ ou $\frac{\partial P}{\partial x}(z) \neq 0$.*

Se $\frac{\partial P}{\partial y}(z) \neq 0$, podemos aplicar o Teorema 2.5 para garantir a existência de um aberto $U \subset C^$ contendo z tal que restrição à U da projeção $(x, y) \mapsto x$ de \mathbb{C}^2 em \mathbb{C} é um homeomorfismo. De forma análoga, se $\frac{\partial P}{\partial x}(z) \neq 0$, aplicamos o Teorema*

2.5 com os papéis das coordenadas (x, y) trocados para garantir a existência de aberto $U \subset \mathbb{C}^*$ tal que a projeção $(x, y) \mapsto y$ quando restrita a U é um homeomorfismo. Construímos assim uma cobertura aberta de \mathbb{C}^* e cartas nos abertos dessa cobertura.

Analisemos agora as aplicações de transição. Se temos dois abertos com cartas construídas via projeção na mesma coordenada então é claro que a aplicação de transição é a identidade e claramente holomorfa. Considere duas cartas (U, ϕ) e (V, ψ) com interseção não nula. Assuma que $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{C}$ é a projeção na primeira coordenada com inversa da forma $\phi^{-1}(x) = (x, \varphi(x))$ como garantido pelo Teorema 2.5. Se (V, ψ) é uma carta dada pela projeção na segunda coordenada então a aplicação de transição é

$$\psi \circ \phi^{-1}(x) = \varphi(x),$$

que é holomorfa pelo Teorema 2.5. Segue que o atlas definido no parágrafo anterior dota \mathbb{C}^* de uma estrutura de superfície de Riemann já que subespaços de um espaço topológico Hausdorff com base enumerável munidos da topologia induzida herdam estas propriedades. \square

3.2. Curvas algébricas em \mathbb{P}^2 . Seja agora $P \in \mathbb{C}[x, y, z]$ um polinômio homogêneo e irredutível de grau $d \geq 1$. O conjunto de zeros de P em \mathbb{C}^3 é invariante pela ação de \mathbb{C}^* via homotetias, e portanto define um subconjunto de \mathbb{P}^2 , a saber

$$C = \left\{ (x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid P(x, y, z) = 0 \right\}.$$

Como no caso afim tratado na Seção 3.1, a irredutibilidade de P garante que tanto C quanto

$$C^* = \left\{ (x : y : z) \in C \mid \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) \neq 0 \right\}.$$

são subconjuntos conexos de \mathbb{P}^2 .

PROPOSIÇÃO 2.7. *O conjunto C^* possui uma estrutura natural de superfície de Riemann.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere os seguintes abertos de \mathbb{P}^2 : $U_x = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid x \neq 0\}$, $U_y = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid y \neq 0\}$ e $U_z = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid z \neq 0\}$. Como foi observado na Seção 2.2, cada um destes abertos é biholomorfo à \mathbb{C}^2 .

Como $x \neq 0$ em U_x , podemos considerar coordenadas $(y, z) = (1 : y : z)$ em U_x e nessas coordenadas $U_x \cap C^*$ é igual as soluções $(y, z) \in \mathbb{C}^2$ do sistema de (in)equações

$$P(1, y, z) = 0 \text{ e } \left(\frac{\partial P}{\partial x}(1, y, z) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial P}{\partial y}(1, y, z) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial P}{\partial z}(1, y, z) \neq 0 \right).$$

Segue da fórmula de Euler

$$\text{grau}(P) \cdot P = x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} + z \frac{\partial P}{\partial z},$$

que podemos reescrever a expressão acima como

$$U_x \cap X^* = \left\{ (y, z) \in \mathbb{C}^2 \mid p(y, z) = 0 \text{ e } \left(\frac{\partial p}{\partial y}(y, z) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial p}{\partial z}(y, z) \neq 0 \right) \right\},$$

onde $p \in \mathbb{C}[y, z]$ é o polinômio $p(y, z) = P(1, y, z)$. Podemos aplicar a Proposição 3.1 para munir $C^* \cap U_x$ de uma estrutura de superfície de Riemann. Note que as cartas locais de $C^* \cap U_x$ são obtidas via restrição à abertos de $C^* \cap U_x$ das funções holomorfas y/x ou z/x definidas em U_x . Verifica-se que estas cartas assim como as cartas analogamente induzidas via as restrições de C^* aos abertos U_y e U_z são todas compatíveis. Segue que C^* admite uma estrutura natural de superfície de Riemann. \square

4. Continuação analítica

4.1. Germes de funções e aplicações. Sejam X e Y variedades complexas e $x \in X$ um ponto de X . Seja U_x o conjunto de abertos de X que contém o ponto x . Se $U \subset X$ é um aberto, denotaremos por $\text{Mor}(U, Y)$ as aplicações holomorfas de U em Y .

Considere a união disjunta

$$\Upsilon_{X,x} = \coprod_{U \in U_x, f \in \text{Mor}(U, X)} (U, f)$$

e introduza a relação de equivalência

$$(U, f) \sim (V, g) \iff \text{existe aberto } W \subset U \cap V \text{ contendo } x \text{ e tal que } f|_W = g|_W.$$

Definimos o conjunto de germes no ponto x de aplicações holomorfas de X em Y como o quociente

$$\Upsilon_{X,x}/\sim,$$

que denotaremos por $\text{Mor}((X, x), Y)$. No caso particular em que Y é igual à \mathbb{C} , escrevemos $\mathcal{O}_{X,x}$ no lugar de $\text{Mor}((X, x), \mathbb{C})$.

4.2. Continuação analítica. Considere o conjunto

$$|\mathcal{O}_{\mathbb{C}}| = \coprod \mathcal{O}_{\mathbb{C},x}$$

de todos os germes de funções holomorfas em \mathbb{C} . Um ponto de $|\mathcal{O}_{\mathbb{C}}|$ é um par (x, f) com $x \in \mathbb{C}$ e f um germe em x de função holomorfa. Denotaremos por $\pi: |\mathcal{O}_{\mathbb{C}}| \rightarrow \mathbb{C}$ a aplicação $\pi((x, f)) = x$.

Seja $(x, f) \in |\mathcal{O}_{\mathbb{C}}|$ um germe em x . Se para $r > 0$ existe um representante $\bar{f} : \mathbb{D}_r(x) \rightarrow \mathbb{C}$ do germe f definido em $\mathbb{D}_r(0)$ então declaramos que o conjunto de germes em pontos de $\mathbb{D}_r(x)$ definidos por \bar{f} é uma vizinhança aberta de (x, f) em $|\mathcal{O}_{\mathbb{C}}|$. Variando (x, f) e r obtemos uma base para uma topologia em $|\mathcal{O}_{\mathbb{C}}|$. O princípio da identidade para funções holomorfas garante que esta topologia é Hausdorff. Além disso, existe uma única estrutura complexa em $|\mathcal{O}_{\mathbb{C}}|$ tal que a projeção π é um biholomorfismo local.

O espaço $|\mathcal{O}_{\mathbb{C}}|$ é desconexo, possui uma quantidade não enumerável de componentes conexas. Se X é uma componente conexa de $|\mathcal{O}_{\mathbb{C}}|$ então X é uma superfície de Riemann munida de biholomorfismo local $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}$ (não necessariamente sobrejetivo).

5. Exercícios

EXERCÍCIO 2.1. *Prove o Teorema 2.5.*

EXERCÍCIO 2.2. *Prove que as componentes conexas do espaço $|\mathcal{O}_{\mathbb{C}}|$ descrito na Seção 4.2 são Hausdorff e possuem base enumerável.*

CAPÍTULO 3

Aplicações holomorfas entre superfícies de Riemann

1. Propriedades básicas

Aplicações holomorfas entre superfícies de Riemann herdam muitas propriedades de funções holomorfas entre abertos de \mathbb{C} .

1.1. Fibras são discretas. Por exemplo, o princípio da identidade para funções holomorfas implica o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 3.1. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação holomorfa entre superfícies de Riemann. Se f é não constante então a pré-imagem de qualquer ponto de Y é um subconjunto discreto e fechado de X .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $y \in Y$. Como aplicações holomorfas são contínuas, a pré-imagem $f^{-1}(y)$ é um subconjunto fechado.

Assuma que $f^{-1}(y)$ é não discreto e seja $x \in X$ é um ponto de acumulação de $f^{-1}(y)$. Tome cartas (U, ϕ) de X centrada em x e (V, ψ) de Y centrada em y , ambas com domínios conexos. Trocando U por uma vizinhança menor de x , podemos assumir que $f(U) \subset V$. Como $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ é uma aplicação holomorfa entre abertos conexos de \mathbb{C} , ou bem g é constante, ou bem $g^{-1}(v)$ é um conjunto discreto para todo $v \in \psi(V)$. A escolha de V garante que $g^{-1}(\psi(y))$ é não discreto, logo g é constante. Segue que $f^{-1}(y)$ contém uma vizinhança aberta de x . Se $A \subset X$ é a componente conexa de $f^{-1}(y)$ contendo x então A é um subconjunto fechado de X pois componentes conexas de fechados são fechadas. Como todo ponto de ∂A , o bordo de A , é um ponto de acumulação de A , o argumento acima garante que A também é aberto. A conexidade de X implica que $f^{-1}(y) = X$ contradizendo a hipótese de que f é não constante. \square

COROLÁRIO 3.2. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação holomorfa não constante. Se X é compacta então, para qualquer $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito.*

1.2. Aplicações holomorfas são abertas. O teorema da aplicação aberta também possui uma versão para superfícies de Riemann.

PROPOSIÇÃO 3.3. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação holomorfa entre superfícies de Riemann. Se f é não constante então f é uma aplicação aberta.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in X$ um ponto qualquer e $y = f(x) \in Y$ a sua imagem. Tome cartas (U, ϕ) de X centrada em x e (V, ψ) de Y centrada em y . Podemos assumir que $f(U) \subset V$. Como $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ é uma aplicação holomorfa entre abertos de \mathbb{C} , o teorema da função aberta implica que g é constante ou aberta. Como f é não constante por hipótese, a Proposição 3.1 garante que g é não constante. Segue que g é uma aplicação aberta e, conseqüentemente, $y = \psi^{-1}(0)$ está no interior da imagem de f . \square

COROLÁRIO 3.4. *Se X é uma superfície de Riemann compacta e $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação holomorfa não constante entre superfícies de Riemann então f é sobrejetiva e Y é compacta.*

DEMONSTRAÇÃO. Proposição 3.3 implica que $f(X)$ é um subconjunto aberto de Y . Por hipótese X é compacta, logo a continuidade de f implica que $f(X)$ é um subconjunto compacto de Y . Como Y é conexa, assim como toda superfície de Riemann segundo a Definição 2.1, segue que $Y = f(X)$. \square

1.3. Funções meromorfas em superfícies de Riemann.

DEFINIÇÃO 3.5. *Seja X uma superfície de Riemann e $U \subset X$ um aberto. Uma função $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é meromorfa se para todo $p \in U$ existe aberto $V \subset U$ contendo p e funções holomorfas $g, h \in \mathcal{O}_X(V)$ tais que h não é identicamente zero e*

$$f|_V = \frac{g}{h}.$$

O plano complexo estendido $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ admite estrutura natural de superfície de Riemann com vizinhança do zero parametrizada por \mathbb{C} , vizinhança do ∞ parametrizada por $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$, e aplicação de transição $z \mapsto \frac{1}{z}$. Com esta estrutura a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \cup \{\infty\} &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ z &\mapsto [z : 1] \\ \infty &\mapsto [1 : 0] \end{aligned}$$

é um biholomorfismo. Em particular, uma função meromorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ define, de forma natural, uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{P}^1$.

1.4. Forma normal local.

PROPOSIÇÃO 3.6. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação holomorfa não constante. Para cada $x \in X$, existe um único inteiro positivo m tal que*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = z^m.$$

onde ϕ é uma carta de X centrada em x e ψ é uma carta de Y centrada em $f(x)$.

DEMONSTRAÇÃO. Provemos primeiro a existência. Seja $x \in X$ um ponto qualquer. Escolha uma carta holomorfa (U_0, ϕ_0) centrada em $x \in X$ e uma carta holomorfa (V, ψ) centrada em $f(x)$ com domínio contendo $f(U)$. Seja $g : \phi_0(U_0) \rightarrow \psi(V)$ a função holomorfa $g = \psi \circ f \circ \phi_0^{-1}$. Por construção, g envia a origem de \mathbb{C} nela mesma. Ao escrevermos a série de potência de g em torno da origem vemos que

$$g(z) = z^m \cdot u(z)$$

para um inteiro $m \geq 1$ e uma função holomorfa $u : \phi_0(U_0) \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfaz $u(0) \neq 0$. Em torno da origem, podemos reescrever a expressão para g como

$$g(z) = (z \cdot u(z)^{\frac{1}{m}})^m$$

visto que funções holomorfas não nulas possuem raízes locais.

Considere a aplicação $\alpha(z) = z \cdot u(z)^{\frac{1}{m}}$ definida em uma vizinhança da origem. Como $\alpha'(0) \neq 0$, temos que α é um biholomorfismo se o seu domínio de definição é uma vizinhança suficientemente pequena da origem.

Definimos uma carta holomorfa para X centrada em x fazendo $\phi = \alpha \circ \phi_0$ em aberto $U \subset U_0$, suficientemente pequeno, contendo x . Dessa forma

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = z^m,$$

provando a existência de um inteiro m como no enunciado.

Para provar a unicidade do inteiro m , note que o inteiro m pode ser interpretado como o número de pré-imagens de pontos próximos a $f(x)$ em vizinhanças de x . Mais precisamente, seja $\varepsilon > 0$ um número real positivo tal que $\mathbb{D}_\varepsilon \subset \mathbb{C}$, o disco de centro zero e raio ε , está contido em $\phi(U)$. Se $y \in Y$ então o número de pré-imagens de f contidas no aberto $\phi^{-1}(\mathbb{D}_\varepsilon)$ é igual a 0 quando $y \notin f(\phi^{-1}(\mathbb{D}_\varepsilon))$, 1 quando $y = f(x)$, e m em todos os outros casos. \square

A interpretação do inteiro m que aparece no final da prova da Proposição 3.6 sugere a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 3.7. O inteiro m da Proposição 3.6 é o grau local de uma aplicação holomorfa não constante f em x e será denotado por $\text{grau}_x(f)$. Se f é uma aplicação holomorfa constante, definimos $\text{grau}_x(f) = \infty$ para todo $x \in X$.

DEFINIÇÃO 3.8. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação holomorfa entre superfícies de Riemann. Um ponto $x \in X$ é chamado de ponto crítico de f se $\text{grau}_x(f) > 1$. Um ponto $y \in Y$ é chamado de valor crítico de f se existe um ponto crítico $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

COROLÁRIO 3.9. Seja X uma superfície de Riemann compacta. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação holomorfa não constante então o conjunto de pontos críticos de f assim como o conjunto de valores críticos de f são conjuntos finitos.

DEMONSTRAÇÃO. A Proposição 3.6 implica que o conjunto de pontos críticos é um fechado discreto. Como X é compacta por hipótese, segue a finitude. \square

2. O grau de aplicações holomorfas

TEOREMA 3.10. *Sejam X e Y superfícies de Riemann compactas e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação holomorfa não constante. Para qualquer par de pontos $y_1, y_2 \in Y$ vale a igualdade*

$$\sum_{x \in f^{-1}(y_1)} \text{grau}_x(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y_2)} \text{grau}_x(f).$$

DEMONSTRAÇÃO. Fixe $k \in \mathbb{N}$ e considere o conjunto

$$A_k = \{y \in Y \mid \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{grau}_x(f) \geq k\}.$$

Mostraremos que A_k é um subconjunto aberto e, ao mesmo tempo, fechado de Y .

Para mostrar que A_k é aberto, note que a compacidade de X implica que o número de pré-imagens de um ponto $y \in Y$ arbitrário é finito. Se $x \in f^{-1}(y)$ e $\text{grau}_x(f) = m$ então a Proposição 3.6 implica que todos os pontos y' suficientemente próximos de y , mas distintos de y , possuem exatamente m pré-imagens próximas de x . Segue que

$$\sum_{x \in f^{-1}(y')} \text{grau}_x(f) \geq \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{grau}_x(f)$$

para todo y' suficientemente próximo de y . Segue que A_k é um conjunto aberto.

Para mostrar que A_k é fechado, seja $\{y_n\}$ uma sequência de pontos em A_k convergindo para $y \in Y$. Como o número de valores críticos de f é finito de acordo com o Corolário 3.9, podemos supor que nenhum dos pontos da sequência é um valor crítico de f . Para cada y_n na sequência escolha k pontos distintos em sua pré-imagem e os denote por $x_{n,1}, \dots, x_{n,k}$. Como X é compacto, podemos passar para um subsequência e assumir que para $i \in \{1, \dots, k\}$ a sequência $x_{n,i}$ converge para um ponto $x_i \in X$. Os pontos x_1, \dots, x_k não são necessariamente distintos, mas se temos ℓ repetições de um mesmo ponto x (i.e. $x = x_{i_1} = \dots = x_{i_\ell}$ para $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq k$) então ao fixar vizinhança arbitrária U de x temos que $x_{n,i_1}, \dots, x_{n,i_\ell}$ são ℓ pontos distintos em U desde que n seja suficientemente grande. Segue da Proposição 3.6 que $\text{grau}_x(f) \geq \ell$. Podemos portanto concluir que

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{grau}_x(f) \geq \sum_{x \in f^{-1}(y_n)} \text{grau}_x(f) = k,$$

ou seja A_k é fechado.

A conexidade de Y implica que $A_k = \emptyset$ ou $A_k = Y$. Para concluir a prova da Teorema, seja $y_0 \in Y$ e faça $k = \sum_{x \in f^{-1}(y_0)} \text{grau}_x(f)$. Como, por definição, $A_{k+1} \subset A_k$ e $y_0 \notin A_{k+1}$ temos que $A_k = Y$ e $A_{k+i} = \emptyset$ para todo $i > 0$. Logo a função

$$y \mapsto \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{grau}_x(f)$$

é constante e igual à k . □

DEFINIÇÃO 3.11. *Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação holomorfa entre superfícies de Riemann compactas então o grau de f é o inteiro definido por*

$$\text{grau}(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{grau}_x(f)$$

para qualquer $y \in Y$.

2.1. Aplicações holomorfas de \mathbb{P}^1 em \mathbb{P}^1 .

PROPOSIÇÃO 3.12. *Se $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ é uma aplicação holomorfa de grau d então existem polinômios homogêneos $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$ de grau d tais que*

$$f(x : y) = (P(x, y) : Q(x, y)) .$$

DEMONSTRAÇÃO. Se $f^{-1}([0 : 1]) = \{[a_1 : b_1], \dots, [a_k : b_k]\}$ e $f^{-1}([1 : 0]) = \{[c_1 : d_1], \dots, [c_\ell : d_\ell]\}$ então os polinômios homogêneos

$$P(x, y) = \prod_{i=1}^k (b_i x - a_i y)^{\text{grau}_{[a_i : b_i]}(f)}, \text{ e}$$

$$Q(x, y) = \prod_{i=1}^{\ell} (d_i x - c_i y)^{\text{grau}_{[c_i : d_i]}(f)}$$

possuem o mesmo grau de acordo com o Teorema 3.10. Segue que o quociente P/Q é invariante por multiplicação pela ação de \mathbb{C}^* em \mathbb{C}^2 via homotetias e, portanto, define aplicação holomorfa $g : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Interpretando ambas f e g como funções meromorfas, vemos que o quociente f/g é uma função meromorfa sem zeros e sem pólos. O Corolário 3.4 implica que f/g é igual a uma constante $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Substituindo P por λP temos o resultado. □

3. Germes de automorfismos

3.1. Linearização de biholomorfismos hiperbólicos. O teorema abaixo é conhecido como Teorema de Koenigs.

TEOREMA 3.13. *Seja $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe aplicação holomorfa. Se $|f'(0)| \neq 1$ e $f'(0) \neq 0$ então existe um germe $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ de biholomorfismo tal que*

$$\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = f'(0) \cdot z.$$

ESBOÇO DA PROVA. Seja $\lambda = f'(0)$. Não há perda de generalidade em assumir que $|\lambda| < 1$ visto que podemos trocar f por f^{-1} .

Estimativas elementares mostram que a sequência de germes $\varphi_k(z) = f^k(z)/\lambda^k$ converge para um germe de biholomorfismo $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Verifica-se que φ é o biholomorfismo procurado. De fato,

$$\varphi(f(z)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f^k(f(z))}{\lambda^k} = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f^{k+1}(z)}{\lambda^{k+1}} = \lambda \varphi(z),$$

implica que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = \lambda \cdot z$. □

4. Exercícios

EXERCÍCIO 3.1. *Complete a prova do Teorema 3.13.*

CAPÍTULO 4

Topologia de superfícies e a fórmula de Riemann-Hurwitz

1. Classificação de superfícies compactas

1.1. Orientabilidade. Diz-se que uma variedade diferenciável é orientável se ela admite um atlas diferenciável tal que as aplicações de transição possuem determinante jacobiano positivo em todos os pontos.

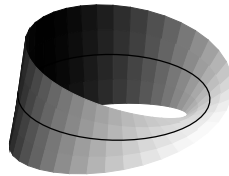


FIGURA 4.1. A faixa de Möbius, o exemplo mais simples de superfície não orientável.

É possível definir conceito análogo de orientação também para variedades de classe C^0 de dimensão arbitrária. Aqui, como o nosso foco é o estudo de superfícies de Riemann, nos contentaremos em definir apenas a orientabilidade de superfícies reais de classe C^0 .

Sejam U e V abertos conexos de \mathbb{R}^2 e $\phi : U \rightarrow V$ um homeomorfismo. Tome $p \in U$ qualquer e considere a sua imagem $q = \phi(p) \in V$. Seja $\gamma : S^1 \rightarrow U - \{p\}$ um caminho fechado tal que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - p} = 1.$$

Dizemos que ϕ preserva orientação se

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\phi(\gamma)} \frac{dz}{z - \phi(p)} = 1.$$

É possível verificar que esta definição independe da escolha do ponto p e do caminho γ .

Uma superfície de classe C^0 é orientável se admite uma atlas tal que todas as funções de transição preservam orientação.

1.2. Esferas com alças. Seja S uma esfera. Tome dois fechados disjuntos D_1 e D_2 de S homeomorfos a discos fechados \bar{D} . Os bordos ∂D_1 e ∂D_2 possuem orientação induzida por S . Considere o complemento $S - (D_1 \cup D_2)$. Fixe um homeomorfismo $\alpha : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ e identifique pontos dos bordos ∂D_1 e ∂D_2 via α . O resultado, munido da topologia quociente, é uma superfície compacta que pode ser ou não orientável. Se o homeomorfismo α respeita o sentido anti-horário em $\partial D \subset \mathbb{R}^2$ então a superfície quociente é não-orientável e homeomorfa à garrafa de Klein. Quando α inverte o sentido anti-horário então o resultado é uma esfera com uma alça e é homeomorfo ao toro real $S^1 \times S^1$, veja Figura 4.2.

TEOREMA 4.1. *Se S é uma superfície real orientável de classe C^0 compacta então existe um único número inteiro não negativo $g = g(S) \geq 0$, chamado de gênero de S , tal que: S é homeomorfa a uma superfície obtida a partir da esfera adicionando g alças.*

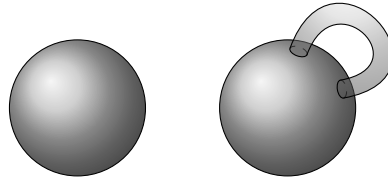


FIGURA 4.2. Uma esfera (superfície compacta orientável de gênero 0) e uma esfera com uma alça (superfície compacta orientável de gênero 1).

1.3. Triangulações. A prova do Teorema 4.1 baseia-se na existência de triangulações.

DEFINIÇÃO 4.2. *Uma triangulação \mathcal{T} de uma superfície real (com ou sem bordo) é uma decomposição de S em subconjuntos fechados $\mathcal{T} = \{T_i\}_{i \in I}$, cada um dos T_i 's homeomorfo à um triângulo sólido satisfazendo as propriedades listadas abaixo.*

- (1) *Se um ponto $p \in S$ não está sobre uma aresta então p pertence a um único triângulo da triangulação.*
- (2) *Se um ponto $p \in S$ está sobre uma aresta, mas não é um vértice, então p pertence a exatamente duas arestas quando $p \notin \partial S$ ou p pertence a exatamente uma aresta quando $p \in \partial S$.*
- (3) *Se $p \in S$ é um vértice então p pertence a um número finito de triângulos T_1, \dots, T_k possuindo p como vértice comum. Se $p \in \partial S$ então $T_i \cap T_j \neq \{p\}$ apenas quando $|i - j| = 1$ e nesse caso a intersecção é uma aresta em comum. Se $p \notin \partial S$ então $T_i \cap T_j \neq \{p\}$ apenas quando $|i - j| = 1$ ou $|i - j| = k - 1$. Também nesse caso a intersecção é uma aresta em comum.*

- (4) O interior da união dos triângulos contendo um ponto $p \in S$ é uma vizinhança aberta de p .

TEOREMA 4.3. *Toda superfície real de classe C^0 (com ou sem bordo) admite triangulações.*

A existência de triangulações é um resultado não trivial, provado originalmente por Tabor. Uma prova deste resultado no caso de superfícies compactas e sem bordo pode ser encontrada em [Rey89, Capítulo 2].

No caso de superfícies diferenciáveis, ou mesmo no caso de variedades diferenciáveis, o resultado é consideravelmente mais simples. Uma das estratégias usuais para obter a existência de triangulações de superfícies diferenciáveis consiste em dotar a superfície de uma métrica Riemanniana e considerar uma cobertura localmente finita por triângulos geodésicos suficientemente pequenos. Como arestas de triângulos geodésicos se interseccionam transversalmente ou se interseccionam ao longo de um intervalo conexo comum é possível subdividir os triângulos geodésicos de modo a obter uma triangulação.

1.4. Representação poligonal. De posse de uma triangulação de uma superfície orientável compacta sem bordo S , a prova usual do Teorema 4.1 procede mapeando os triângulos da triangulação em triângulos Euclidianos do plano real de modo a obter uma região de \mathbb{R}^2 com fronteira poligonal com um número par de arestas. A superfície original pode ser reconstruída identificando pares de arestas desta região poligonal.

No caso de superfícies orientáveis, argumentos combinatórios permitem

- (1) alterar a disposição dos triângulos de modo que todos os vértices no bordo da região poligonal correspondam ao mesmo ponto na superfície original;
- (2) eliminar a identificação de arestas sucessivas; e
- (3) garantir que pares de arestas sucessivas a e b sejam sucedidas pelas mesmas arestas mas com orientação invertida.

Como resultado obtêm-se a seguinte descrição das superfícies compactas orientáveis.

TEOREMA 4.4. *Toda superfície real de classe C^0 compacta orientável é homeomorfa à esfera S^2 ou a um polígono sólido com $4g$ lados e bordo da forma*

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

com os lados a_i , a_i^{-1} e b_i , b_i^{-1} identificados através de homeomorfismos que trocam os pontos iniciais e finais dos lados.

Para uma exposição concisa da prova do Teorema 4.4 a classificação de superfícies compactas orientáveis, veja [Rey89, Capítulo 2]. Para uma apresentação mais completa, contendo muito sobre a história desse resultado, veja [GX13]

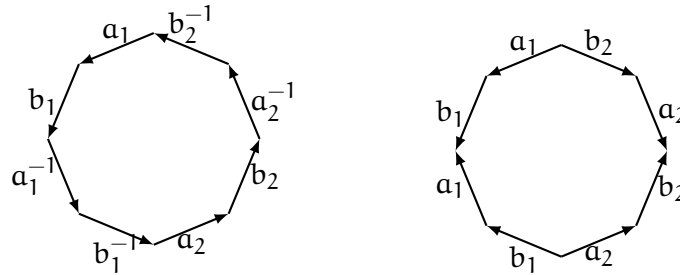


FIGURA 4.3. Representação poligonal de superfície compacta orientável de gênero 2.

1.5. Característica de Euler. É possível inferir a topologia de uma superfície real compacta diretamente de dados numéricos associados à triangulação.

DEFINIÇÃO 4.5. *Seja S uma superfície real compacta (com ou sem bordo) munida de uma triangulação \mathcal{T} com V vértices, A arestas e F faces. A característica de Euler de S com respeito à \mathcal{T} é o número inteiro*

$$\chi_{\mathcal{T}}(S) = V - A + F.$$

PROPOSIÇÃO 4.6. *A característica de Euler de uma superfície compacta S independe da triangulação. Se S é orientável então $\chi(S) = 2 - 2g(S)$.*

2. A fórmula de Riemann-Hurwitz

TEOREMA 4.7. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação holomorfa não constante entre superfícies de Riemann compactas. Então*

$$2g(X) - 2 = \text{grau}(f) \cdot (2g(Y) - 2) + \sum_{x \in X} (\text{grau}_x(f) - 1).$$

DEMONSTRAÇÃO. Tome uma triangulação \mathcal{T}_Y de Y . Após aplicar um número finito de refinamentos elementares (ver Figura 4.4) podemos assumir que todos os valores críticos de f são vértices desta triangulação, e que todo triângulo está contido em uma carta de Y onde f assume a forma normal $z \mapsto z^m$.

Seja \mathcal{T}_X a pré-imagem de \mathcal{T}_Y via f . Note que o número de arestas $A(\mathcal{T}_X)$ de \mathcal{T}_X é igual a $\text{grau}(f) \cdot A(\mathcal{T}_Y)$. Analogamente temos que o número de faces de \mathcal{T}_X é igual a $\text{grau}(f) \cdot F(\mathcal{T}_Y)$.

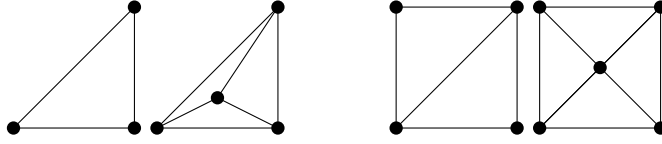


FIGURA 4.4. Refinamentos elementares de triangulações.

O cálculo do número de vértices em \mathcal{T}_X em função do número de vértices em \mathcal{T}_Y não é tão simples, mas pode ser efetuado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V(\mathcal{T}_X) &= \sum_{y \in V(\mathcal{T}_Y)} \sum_{x \in f^{-1}(y)} 1 = \\ &= \sum_{y \in V(\mathcal{T}_Y)} \left(\text{grau}(f) - \sum_{x \in f^{-1}(y)} (1 - \text{grau}_x(f)) \right) = \\ &= \text{grau}(f) \cdot V(\mathcal{T}_Y) + \sum_{x \in X} (1 - \text{grau}_x(f)) . \end{aligned}$$

Podemos então escrever

$$\chi(X) = \text{grau}(f) \cdot \chi(Y) + \sum_{x \in X} (1 - \text{grau}_x(f)) ,$$

que é claramente equivalente à fórmula enunciada. \square

COROLÁRIO 4.8. *Sejam X e Y superfícies de Riemann compactas. Se existe uma aplicação holomorfa não constante $f : X \rightarrow Y$ então $g(X) \geq g(Y)$. Além disso, se $g(X) = g(Y) \geq 2$ então f é um biholomorfismo.*

3. Quocientes de superfícies de Riemann por grupos finitos

Seja X uma superfície de Riemann. O conjunto das aplicações biholomorfas sobrejetivas de X em X será denotado por $\text{Aut}(X)$ e admite uma estrutura natural de grupo. Fixado um subgrupo $G \subset \text{Aut}(X)$ podemos considerar X/G , o espaço de órbitas de G em X . O espaço X/G herda de X uma topologia caracterizada pelo fato que a aplicação quociente

$$\pi : X \rightarrow X/G$$

é contínua. Em outras palavras, um subconjunto $U \subset X/G$ é aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(U)$ também é aberto.

Nesta seção mostraremos que X/G herda de X não só uma estrutura de espaço topológico, mas também uma estrutura de superfície de Riemann.

3.1. Preliminares topológicos. Começemos verificando que o quociente por grupos finitos de espaços topológicos Hausdorff com base enumerável ainda são do mesmo tipo.

LEMA 4.9. *Sejam X um espaço topológico e $G \subset \text{Homeo}(X)$ um subgrupo finito. A aplicação quociente $\pi : X \rightarrow X/G$ é uma aplicação aberta. Em particular, se X possui base enumerável então X/G também possui base enumerável.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $U \subset X$ um aberto qualquer. Queremos mostrar que $\pi(U)$ é um aberto de X/G . Pela definição da topologia quociente, $\pi(U)$ é aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(\pi(U))$ é um aberto de X . Como

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g(U)$$

é uma união de abertos, segue que $\pi(U)$ é aberto. Isso mostra que π é uma aplicação aberta.

Para verificar a segunda afirmação é suficiente observar que a imagem por π de uma base enumerável para a topologia de X é uma base enumerável para a topologia de X/G já que π é aberta. \square

LEMA 4.10. *Sejam X um espaço topológico Hausdorff e $G \subset \text{Homeo}(X)$ um subgrupo finito. Então o espaço quociente X/G também é Hausdorff.*

DEMONSTRAÇÃO. Tome $y_1, y_2 \in X/G$ dois pontos distintos. As pré-imagens $\pi^{-1}(y_1)$ e $\pi^{-1}(y_2)$ são subconjuntos finitos, e portanto compactos, de X . Como X é Hausdorff por hipótese, existem abertos V_1 e V_2 disjuntos contendo, respectivamente, $\pi^{-1}(y_1)$ e $\pi^{-1}(y_2)$. Fazendo, para $i = 1, 2$,

$$W_i = \bigcap_{g \in G} g(V_i)$$

vemos que W_1 e W_2 são vizinhanças abertas e disjuntas de $\pi^{-1}(y_1)$ e $\pi^{-1}(y_2)$ cujas imagens $\pi(W_1)$ e $\pi(W_2)$ são, respectivamente, vizinhanças disjuntas de y_1 e y_2 . \square

3.2. Linearização de grupos finitos de germes de automorfismos.

LEMA 4.11. *Seja $G \subset \text{Aut}(\mathbb{C}^n, 0)$ um subgrupo finito do grupo de germes de biholomorfismos de \mathbb{C}^n . Então existe um sistema de coordenadas onde a ação de G se dá por meio de transformações lineares.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere o germe de aplicação

$$\begin{aligned}\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \\ z &\mapsto \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} Dg(0)^{-1} g(z).\end{aligned}$$

Segue da definição de φ que $D\varphi(0)$ é a identidade. Portanto, φ é um germe de biholomorfismo. Os cálculos elementares abaixo

$$\begin{aligned}\varphi(h(z)) &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} Dg(0)^{-1} gh(z) = \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} Dh(0)D(gh)(0)^{-1} gh(z) = \\ &= Dh(0) \left(\frac{1}{\#G} \sum_{gh \in G} D(gh)(0)^{-1} gh(z) \right) = \\ &= Dh(0) \cdot \varphi(z),\end{aligned}$$

mostram que $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ conjuga o grupo G ao grupo gerado pelas partes lineares de seus elementos. \square

COROLÁRIO 4.12. *Se $G \subset \text{Aut}(\mathbb{C}, 0)$ é um subgrupo finito então existe uma coordenada z em $(\mathbb{C}, 0)$ onde G é cíclico e gerado por $\varphi(z) = \xi_k \cdot z$ para alguma raiz primitiva da unidade ξ_k de ordem igual à cardinalidade de G .*

3.3. Estrutura holomorfa no quociente.

TEOREMA 4.13. *Seja X um superfície de Riemann e $G \subset \text{Aut}(X)$ um subgrupo finito do grupo de biholomorfismos de X . Então existe uma estrutura de superfície de Riemann no quociente X/G tal que a projeção natural $X \rightarrow X/G$ é holomorfa.*

DEMONSTRAÇÃO. O Lema 4.10 garante que X/G é um espaço topológico Hausdorff e o Lema 4.9 garante que X/G possui base enumerável. Para dotar X/G de uma estrutura de superfície de Riemann, resta construir um atlas e verificar que as funções de transições deste são holomorfas.

Ao impor que $\pi : X \rightarrow X/G$ é uma aplicação holomorfa, não resta muita escolha para a construção do atlas. Fixe $x \in X$ e denote por $y = \pi(x)$ o ponto correspondente no quociente.

Para $x \in X$, denotemos por $G_x \subset G$ o subgrupo de isotropia de x , i.e.

$$G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}.$$

O Corolário 4.12 implica que G_x é sempre isomorfo a um subgrupo cíclico de $S^1 \subset \mathbb{C}^*$. Além disso, os pontos $x \in X$ com $G_x \neq \text{id}$ formam um conjunto discreto, e portanto finito graças a compacidade de X .

Se G_x é o subgrupo trivial então tome uma carta (U_x, ϕ_x) de X definida em aberto U_x que contém x e tal que $g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$ se, e somente se, $g = \text{id}$. Note que esta última condição imposta sobre U_x implica que a restrição de π ao aberto U_x é um homeomorfismo sobre a sua imagem. Definimos uma carta (V_y, ψ_y) de Y centrada em y fazendo $V_y = \pi(U_x)$ e $\psi_y = \phi_x \circ \pi^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} U_x & \xrightarrow{\phi_x} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ V_y & \xrightarrow{\psi_y} & \mathbb{C} \end{array}$$

Se G_x possui ordem $\#G_x = m \geq 1$ então tome um gerador $g \in G_x$ e aplique o Corolário 4.12 para garantir a existência de uma carta (U_x, ϕ_x) de X centrada em x tal que

- (1) a imagem $\phi(U_x)$ é o disco $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$;
- (2) $\phi_x(g(x)) = \xi_m \cdot \phi_x(x)$, onde ξ_m é uma raiz primitiva da unidade de ordem m .

Definimos uma carta (V_y, ψ_y) de Y centrada em y fazendo $V_y = \pi(U_x)$ e tomando $\psi_y : V_y \rightarrow \mathbb{C}$ como a única aplicação que faz o diagrama a seguir comutar.

$$\begin{array}{ccccc} U_x & \xrightarrow{\phi_x} & \mathbb{C} & \ni & z \\ \pi \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V_y & \xrightarrow{\psi_y} & \mathbb{C} & \ni & z^m \end{array}$$

Para verificar a compatibilidade das cartas de Y apresentadas acima, observe, que por construção, as funções de transição podem ser expressas utilizando a ação do grupo G , as funções de transição das cartas de X , potências, e raízes (sempre em domínios onde estão bem definidas). \square

Cabe observar que o Teorema 4.13 não vale para variedades complexas de dimensão mais alta.

EXEMPLO 4.1. *Se $n \geq 2$ então o quociente de \mathbb{C}^n pelo grupo G gerado involução $\sigma(x) = -x$ não admite estrutura de variedade topológica. De fato, qualquer aberto $U \subset \mathbb{C}^n/G$ contendo $[0]$ é tal que $U - \{[0]\}$ não é simplesmente conexo. Se \mathbb{C}^n/G fosse uma variedade topológica então existiria aberto V contendo $[0]$ tal que $V - \{[0]\}$ é simplesmente conexo.*

4. Aplicações da fórmula de Riemann-Hurwitz

4.1. Riemann-Hurwitz para quocientes finitos. Se X é uma superfície de Riemann e $G \subset \text{Aut}(X)$ é um subgrupo finito então a aplicação holomorfa $\pi : X \rightarrow X/G$ possui características especiais que permitem formular uma versão mais precisa da fórmula de Riemann-Hurwitz.

PROPOSIÇÃO 4.14. *Sejam X uma superfície de Riemann e $G \subset \text{Aut}(X)$ um subgrupo finito. Considere a aplicação quociente $\pi : X \rightarrow X/G$. Se π possui exatamente k valores críticos então existem inteiros r_1, \dots, r_k , com $r_i \geq 2$, tais que*

$$2g(X) - 2 = (\#G) \cdot \left(2g\left(\frac{X}{G}\right) - 2 + \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) \right).$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in X$ um ponto qualquer. Podemos comparar os grupos de isotropia de x e $g(x)$ via a identidade

$$G_{g(x)} = g^{-1} \cdot G_x \cdot g.$$

Como consequência, se $y \in Y = X/G$ então

$$\#G_x = \text{grau}_x(\pi) \quad \text{e} \quad \#\pi^{-1}(y) = \frac{\#G}{\#G_x}$$

para qualquer pré-imagem x de y . Em particular, $\text{grau}(\pi) = \#G$.

Sejam y_1, \dots, y_k os valores críticos de π e denote por r_i o grau local de π em qualquer $x \in \pi^{-1}(y_i)$. Combinando a fórmula de Riemann-Hurwitz com as observações acima, podemos escrever

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 &= \text{grau}(\pi) \cdot (2g(Y) - 2) + \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \pi^{-1}(y_i)} (\text{grau}_x(\pi) - 1) = \\ &= \#G \cdot (2g(Y) - 2) + \sum_{i=1}^k \frac{\#G}{r_i} (r_i - 1) = \\ &= \#G \cdot \left(2g(Y) - 2 + \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) \right), \end{aligned}$$

provando a proposição. □

4.2. Controle da ramificação. A contribuição dos pontos de ramificação de $\pi : X \rightarrow X/G$ à fórmula apresentada na Proposição 4.14 é controlada pelo seguinte Lema.

LEMA 4.15. Sejam $k \geq 3$, r_1, \dots, r_k inteiros satisfazendo $r_i \geq 2$ e

$$R = \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right).$$

Valem as seguintes afirmações.

(1) Se $R > 2$ então $R - 2 \geq \frac{1}{42}$.

(2) Se $R = 2$ então $k \leq 4$. Além disso:

$$(a) \text{ Se } k = 3 \text{ então } (r_1, r_2, r_3) = \begin{cases} (2, 3, 6), & \text{ou} \\ (2, 4, 4), & \text{ou} \\ (3, 3, 3). \end{cases}$$

$$(b) \text{ Se } k = 4 \text{ então } (r_1, r_2, r_3, r_4) = (2, 2, 2, 2).$$

$$(3) \text{ Se } R < 2 \text{ então } k = 3 \text{ e } (r_1, r_2, r_3) = \begin{cases} (2, 2, m) & \text{para qualquer } m \geq 2, \text{ ou} \\ (2, 3, 3), & \text{ou} \\ (2, 3, 4), & \text{ou} \\ (2, 3, 5). \end{cases}$$

DEMONSTRAÇÃO. A prova é elementar. Fixe um inteiro $k \geq 3$ e considere dois vetores (r_1, \dots, r_k) e (s_1, \dots, s_k) com entradas naturais e não-decrescentes. Se considerarmos a ordem lexicográfica \succeq em \mathbb{N}^k então

$$(r_1, \dots, r_k) \succeq (s_1, \dots, s_k) \implies \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) \geq \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{s_i}\right).$$

Para $k \geq 5$, o cálculo de R para o elemento minimal $(2, 2, \dots, 2, 2)$ mostra que $R \geq 2 + \frac{1}{2}$. Para $k = 4$, o cálculo de R para $(2, 2, 2, 3)$ mostra que $R \geq 2 + \frac{1}{6}$ desde que $(r_1, r_2, r_3, r_4) \neq (2, 2, 2, 2)$.

Para $k = 3$, é preciso calcular R para $(2, 3, 7)$, $(2, 4, 5)$, e $(3, 3, 4)$. O vetor $(3, 3, 4)$ implica que $R = 2 + \frac{1}{12}$, e o vetor $(2, 4, 5)$ implica que $R = 2 + \frac{1}{20}$. Já o vetor $(2, 3, 7)$ nos dá $2 + \frac{1}{42}$, e portanto minimiza R entre os vetores com $R > 2$. \square

4.3. Subgrupos finitos de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$. A fórmula de Riemann-Hurwitz pode ser utilizada para classificar os subgrupos de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$.

PROPOSIÇÃO 4.16. O grupo de biholomorfismos de \mathbb{P}^1 é isomorfo ao grupo $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$.

DEMONSTRAÇÃO. Considere o homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \rho : \text{SL}(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto (x : y) \mapsto (ax + by : cx + dy). \end{aligned}$$

Como os elementos $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ são aplicações holomorfas de grau 1, a Proposição 3.12 implica que ρ é um homomorfismo sobrejetivo. Para concluir basta observar que $\ker \rho = \pm \text{id}$. \square

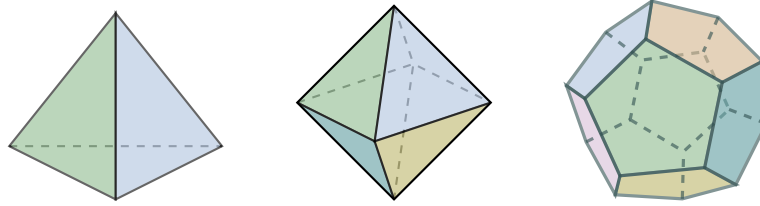


FIGURA 4.5. O tetraedro, o octaedro e o dodecaedro são sólidos platônicos com grupo de isometrias A_4 , S_4 e A_5 , respectivamente.

PROPOSIÇÃO 4.17. *Seja $G \subset \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ um subgrupo finito. Então se $\#G \notin \{12, 24, 60\}$ então G é conjugado a um dos seguintes grupos.*

(1) O grupo cíclico $C_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ com m elementos gerado por

$$\varphi_m([x : y]) = [\xi_m \cdot x : y].$$

(2) O grupo dihedral D_{2m} gerado por φ_m e a involução $\sigma([x : y]) = [y : x]$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $G \subset \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ um subgrupo finito e considere a aplicação quociente $\pi : \mathbb{P}^1 \rightarrow Y = \mathbb{P}^1/G$. Denote por k o número de valores críticos de π , por y_1, \dots, y_k os valores críticos de π e por r_1, \dots, r_k os graus locais de π em pontos nas pré-imagens de y_1, \dots, y_k .

Segue do Corolário 4.8 que $g(Y) = 0$. Consequentemente, a Proposição 4.14 implica que

$$\#G = \frac{2}{2-R} \quad \text{e} \quad R = \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) < 2.$$

O Lema 4.15 implica que $k \leq 3$. Analisemos as diferentes possibilidades para k .

Se $G \neq \text{id}$ não é o grupo trivial então a Proposição 4.14 implica que $k \geq 2$. De fato, se $k = 1$ então $R < 1$ e $\#G \notin \mathbb{Z}$.

Se $k = 2$ então o grupo G tem apenas dois pontos com grupo de isotropia não-trivial. Uma mudança de coordenadas permite assumir que estes pontos são $0 = [0 : 1]$ e $\infty = [1 : 0]$. É claro que neste caso G está contido no subgrupo de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ isomorfo à \mathbb{C}^* formado pelas aplicações $[x : y] \mapsto [\lambda x : y]$ com $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Segue que G é cíclico e isomorfo à C_m para algum $m \geq 2$.

Se $k = 3$ então o Lema 4.15 garante que $(r_1, r_2, r_3) = (2, 2, m)$ ou $(2, 3, 3)$ ou $(2, 3, 4)$ ou $(2, 3, 5)$. As três últimas possibilidades correspondem a grupos de ordem 12, 24 e 60.

Consideremos o caso em que $(r_1, r_2, r_3) = (2, 2, m)$. A Proposição 4.14 implica que $\#G = 2m$. Se y_3 é o ponto crítico de π correspondendo à $r_3 = m$ então $\pi^{-1}(y_3)$ tem cardinalidade $2 = \#G/r_3$. Assumindo que estes dois pontos são $0 = [0 : 1]$ e $\infty = [1 : 0]$ vemos que G contém o automorfismo $\varphi_m([x : y]) = [\xi_m x : y]$. O subgrupo gerado por φ_m coincide com os grupos de isotropia G_0 e G_∞ . Como 0 e ∞ são os únicos dois pontos em \mathbb{P}^1 com grupo de isotropia de índice 2 em G , elementos em $G - G_0$ devem permutá-los. Segue que G contém elemento da forma $[x : y] \mapsto [\lambda y : x]$ com $\lambda \in \mathbb{C}^*$. A mudança de coordenada $[x : y] \mapsto [\lambda x : y]$ implica que G é conjugado ao grupo gerado por φ_m e σ com enunciado no Item (2). \square

Para cada uma das possibilidades $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ e $(2, 3, 5)$ para (r_1, r_2, r_3) que aparecem na prova da Proposição 4.17, existe apenas um subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$, módulo conjugação, realizando-a. Curiosamente, estes subgrupos podem ser realizados como grupos isometria de sólidos platônicos. São eles:

- (1) O grupo A_4 de ordem 12 agindo em \mathbb{P}^1 como as isometrias do tetraedro.
- (2) O grupo S_4 de ordem 24 agindo em \mathbb{P}^1 como as isometrias do cubo, ou de seu poliedro dual o octaedro.
- (3) O grupo A_5 de ordem 60 agindo em \mathbb{P}^1 como as isometrias do icosaedro, ou de seu poliedro dual o dodecaedro.

Para um prova desse resultado, veja [MBD61, Capítulo X].

4.4. Teorema de Hurwitz. Argumentos similares aos utilizados na prova da Proposição 4.17 permitem limitar a ordem de subgrupos finitos do grupo de automorfismos de uma superfície de Riemann de gênero maior ou igual a 2.

TEOREMA 4.18. *Seja X uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$. Se $G \subset \text{Aut}(X)$ é um subgrupo finito então*

$$\#G \leq 84(g(X) - 1).$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $Y = X/G$ a superfície de Riemann quociente e a aplicação natural $\pi : X \rightarrow Y$. A Proposição 4.14 permite escrever

$$\#G = \frac{2g(X) - 2}{2g(Y) - 2 + R}$$

com R da forma $\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right)$.

Se $g(Y) \geq 2$ então $2g(Y) - 2 + R \geq 2$ e portanto $\#G \leq g - 1$. Se $g(Y) = 1$ então $R \neq 0$. Como, claramente, $R \neq 0$ implica que $R \geq 1/2$ temos que $\#G \leq 4(g - 1)$ nesse caso. Finalmente, se $g(Y) = 0$ então $R > 2$. O Lema 4.15 garante que $R - 2 \geq \frac{1}{42}$. Segue que $\#G \leq 84(g - 1)$. \square

O resultado acima é parte do famoso Teorema de Hurwitz que diz que o grupo de automorfismo de uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$ é finito e de ordem no máximo $84(g - 1)$. Mais adiante, mostraremos esse resultado de finitude.

5. Exercícios

EXERCÍCIO 4.1. Seja $F_d \subset \mathbb{P}^2$ a curva projetiva de grau d definida como

$$F_d = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid x^d + y^d + z^d = 0\}.$$

Verifique que F_d é uma curva projetiva lisa na terminologia da Seção 3.2. Mostre que

$$g(F_d) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

aplicando a fórmula de Riemann-Hurwitz a aplicação holomorfa

$$\begin{aligned} \pi : F_d &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ (x : y : z) &\mapsto (x : y). \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 4.2. Seja X uma superfície de Riemann compacta e $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ uma função meromorfa não constante em X . Seja $h \in \text{Aut}(X)$ um automorfismo de ordem finita $\text{ord}(h)$. Se o número de pontos fixos de h é maior que $2 \text{ grau}(f)$ então $f = f \circ h$ e $\text{grau}(f)$ é um múltiplo de $\text{ord}(h)$.

Parte 2

Fibrados lineares, divisores e Riemann-Roch

CAPÍTULO 5

Fibrados vetoriais

O capítulo começa com uma breve descrição de espaços vetoriais em variedades diferenciáveis e como estes são determinados por uma coleção de aplicações de transição. Assumimos que o leitor possui alguma familiaridade com o conceito. De qualquer forma definimos todos os termos que vamos precisar, buscando estabelecer as convenções adotadas nesse texto.

Em um segundo momento, o capítulo dirige o foco para fibrados vetoriais holomorfos em variedades complexas. O capítulo termina explicando como divisores em superfícies de Riemann (somas formais localmente finitas de pontos) determinam (classes de isomorfismos de) fibrados holomorfos de posto um.

1. Fibrados vetoriais

1.1. Definições básicas. Um fibrado vetorial sobre uma variedade diferenciável é uma família diferenciável de espaços vetoriais de mesma dimensão parametrizada por X . Para falar da noção de diferenciabilidade de uma família de espaços vetorial é necessária uma topologia no corpo base do espaço vetorial em questão. Vamos nos restringir, como a ampla maioria de autores, aos fibrados vetoriais com corpo base \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

DEFINIÇÃO 5.1. *Seja X uma variedade diferenciável e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Um \mathbb{K} -fibrado vetorial F de posto r sobre X é uma variedade diferenciável F munida de uma aplicação diferenciável $\pi_F : F \rightarrow X$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (1) *(Trivialidade local) Para todo $x \in X$, existe um aberto $U \subset X$ contendo x e uma aplicação diferenciável $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{K}^r$ tal que a aplicação*

$$\begin{aligned} \Phi_U : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{K}^r \\ y &\longmapsto (\pi(y), \varphi_U(y)) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo.

- (2) *(Estrutura linear) Para cada par de vizinhanças U e V como no item anterior, existe uma aplicação diferenciável $g_{UV} : U \cap V \rightarrow GL(r, \mathbb{K})$ tal que*

$$\Phi_U \circ \Phi_V^{-1}(x, v) = (x, g_{UV}(x) \cdot v).$$

As aplicações Φ_U como no Item (1) são chamadas de trivializações de F , enquanto as aplicações g_{UV} apresentados no Item (2) são aplicações de transição do fibrado vetorial F . Quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dizemos que F é um fibrado vetorial complexo.

Se E é um fibrado vetorial sobre X e $x \in X$ é um ponto de X então a fibra de E sobre x é o conjunto $E_x = \pi^{-1}(x)$. Segue da definição de fibrados vetoriais que E_x é um espaço vetorial de forma natural.

A noção de equivalência entre dois fibrados vetoriais sobre a mesma variedade X impõem-se naturalmente.

DEFINIÇÃO 5.2. *Sejam E e F dois fibrados vetoriais sobre uma variedade diferenciável X . Dizemos que E e F são isomorfos (como fibrados vetoriais) se existe um difeomorfismo $\beta : E \rightarrow F$ tal que*

(1) o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\beta} & F \\ \pi_E \searrow & & \swarrow \pi_F \\ & X & \end{array}$$

comuta; e

(2) para todo $x \in X$ a aplicação $\beta_x : E_x \rightarrow F_x$ induzida por β é linear.

Um conceito extremamente simples, mas nem por isso sem importância, é o conceito de seção de um fibrado vetorial.

DEFINIÇÃO 5.3. *Uma seção de um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow X$ é uma aplicação diferenciável $s : X \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = \text{id}_X$. Uma seção local definida em um aberto $U \subset X$ é uma aplicação diferenciável $s : U \rightarrow E$ satisfazendo $\pi \circ s = \text{id}_U$.*

Denotaremos o conjunto das seções de um fibrado vetorial E sobre uma variedade X por $\Gamma(X, E)$. Note que $\Gamma(X, E)$ é um espaço vetorial sobre o corpo base \mathbb{K} .

1.2. Aplicações de transição. Na prática, quando precisamos efetuar cálculos envolvendo um fibrado vetorial E , trabalhamos com as aplicações de transição do mesmo com respeito à uma coleção de trivializações locais. O resultado a seguir garante que não há perda de informação: as aplicações de transição determinam e são determinadas pelos fibrados vetoriais.

PROPOSIÇÃO 5.4. *Se U, V , e W são abertos de X e Φ_U, Φ_V e Φ_W são trivializações sobre U, V e W , respectivamente, então as respectivas aplicações de transição satisfazem*

(1) Se $U \cap V \neq \emptyset$ então $g_{UV} \cdot g_{VU} = \text{id}$ em $U \cap V$.

(2) Se $U \cap V \cap W \neq \emptyset$ então $g_{UV} \cdot g_{VW} \cdot g_{WU} = \text{id}$ em $U \cap V \cap W$.

Reciprocamente, fixada uma cobertura \mathcal{U} de X e dada uma coleção de aplicações diferenciáveis $g_{UV} : U \cap V \rightarrow GL(r, \mathbb{K})$ indexada por pares de abertos em \mathcal{U} e satisfazendo os itens (1) e (2) acima então existe um fibrado vetorial de posto r com essas funções de transição.

DEMONSTRAÇÃO. Por definição, veja Item (2) na Definição 5.1, a aplicação g_{UV} é determinada pela identidade $\Phi_U \circ \Phi_V^{-1}(x, v) = (x, g_{UV}(x) \cdot v)$. Como

$$(\Phi_U \circ \Phi_V^{-1}) \circ (\Phi_V \circ \Phi_U^{-1}) = \text{Id}$$

temos que $g_{UV} \cdot g_{VU} = \text{Id}$. De forma análoga, a identidade

$$(\Phi_U \circ \Phi_V^{-1}) \circ (\Phi_V \circ \Phi_W^{-1}) \circ (\Phi_W \circ \Phi_U^{-1}) = \text{Id}$$

implica que $g_{UV} \cdot g_{VW} \cdot g_{WU} = \text{id}$.

Fixe agora uma coleção de aplicações de transição $g_{UV} : U \cap V \rightarrow GL(r, \mathbb{K})$ indexada por pares de abertos em uma cobertura \mathcal{U} de X . Suponha que a coleção satisfaz os Itens (1) e (2) apresentados no enunciado da proposição. Para construir o fibrado vetorial E consideramos a união disjunta

$$\coprod_{U \in \mathcal{U}} U \times \mathbb{K}^r$$

munida da relação de equivalência

$$U \times \mathbb{K}^r \ni (x, v) \sim (y, w) \in V \times \mathbb{K}^r \iff x = y \text{ vistos como pontos de } X \text{ e } v = g_{UV}(x) \cdot w.$$

O fibrado vetorial E é definido como o quociente

$$E = \coprod_{U \in \mathcal{U}} U \times \mathbb{K}^r / \sim.$$

Note que a aplicação de projeção $\pi : E \rightarrow X$ é dada, sobre um dos abertos $U \times \mathbb{K}^r \subset E$, por $\pi(x, v) = x$. Levando em conta a forma da relação de equivalência considerada, segue que esta definição estende de forma coerente a todo o espaço E . \square

O próximo resultado explicita a noção de isomorfismos entre dois fibrados em termos de suas aplicações de transição.

PROPOSIÇÃO 5.5. *Considere duas coleções de aplicações de transição $\{g_{UV}\}$ e $\{h_{UV}\}$, indexadas por pares de abertos de uma mesma cobertura \mathcal{U} , para fibrados E e F de mesmo posto. Os fibrados E e F são isomorfos se, e somente se, existe coleção de aplicações $\{\beta_U : U \rightarrow GL(r, \mathbb{K})\}$ indexada por abertos de \mathcal{U} tal que*

$$g_{UV} = \beta_U^{-1} \cdot h_{UV} \cdot \beta_V$$

para qualquer par de abertos $U, V \in \mathcal{U}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja \tilde{X} a união disjunta $\coprod_{U \in \mathcal{U}} U$. Suponha que exista coleção de aplicações $\{\beta_U\}$ como acima. Estas definem um isomorfismo entre os fibrados triviais sobre \tilde{X}

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} : \coprod U \times \mathbb{K}^r &\longrightarrow \coprod U \times \mathbb{K}^r \\ (x, v) &\mapsto (x, \beta_U(x) \cdot v) \quad \text{se } x \in U. \end{aligned}$$

Denote por \sim_E a relação de equivalência que determina E e \sim_F a relação de equivalência que determina F . Se $x \in U$ e $y \in V$ coincidem como pontos de X e $(x, v) \sim_E (y, w)$ então $w = g_{VU}(x) \cdot v$ e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(x, v) &= (x, \beta_U(x) \cdot v) \sim_F (y, h_{VU}(x) \cdot \beta_U(x) \cdot v) = \\ &= (y, \beta_V(x) \cdot g_{VU}(x) \cdot v) = (y, \beta_V(x) \cdot w) = \tilde{\beta}(y, w). \end{aligned}$$

Segue que a aplicação $\tilde{\beta}$ passa ao quociente e define um isomorfismo $\beta : E \rightarrow F$.

Reciprocamente, se temos um isomorfismo

$$\beta : E = \coprod U \times \mathbb{K}^r / \sim_E \rightarrow \coprod U \times \mathbb{K}^r / \sim_F = F$$

então, para $U \in \mathcal{U}$ definimos $\beta_U : U \rightarrow GL(r, \mathbb{K})$ como a única aplicação que satisfaz $\beta(x, v) = (x, \beta_U(x) \cdot v)$ para representantes de (x, v) no aberto $U \times \mathbb{K}^r$. \square

De forma análoga, também podemos explicitar o conceito de seção de um fibrado vetorial em termos de aplicações de transição.

PROPOSIÇÃO 5.6. *Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade diferenciável X determinado por uma coleção de aplicações de transição $\{g_{UV}\}$ indexada por pares de abertos de uma cobertura \mathcal{U} suficientemente fina. Uma seção $s : X \rightarrow E$ de X determina, e é determinada, por uma coleção de aplicações $s_U : U \rightarrow \mathbb{K}^r$ que satisfazem*

$$s_U = g_{UV} \cdot s_V$$

para quaisquer par de abertos $U, V \in \mathcal{U}$.

DEMONSTRAÇÃO. Exercício para o leitor. \square

EXEMPLO 5.1 (Fibrado tangente). *Seja X uma variedade diferenciável de dimensão n . Se $\mathcal{U} = \{(U, \phi_U)\}$ é uma atlas diferenciável de X com aplicações de transição $\phi_{UV} = \phi_U \circ \phi_V^{-1}$ então o fibrado tangente de X é o fibrado vetorial sobre X é determinado pela coleção de aplicações diferenciáveis*

$$\begin{aligned} g_{UV} : U \cap V &\longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto D(\phi_U \circ \phi_V^{-1})(\phi_V)(x) \end{aligned}$$

indexada por pares ordenados de abertos da cobertura \mathcal{U} . Denotaremos o fibrado tangente de uma variedade diferenciável real X por T_X ou $T_{X, \mathbb{R}}$.

1.3. Álgebra (multi)-linear. Dado um espaço vetorial V sobre \mathbb{K} , a álgebra linear ensina que existem vários espaços vetoriais sobre \mathbb{K} construídos a partir de V . Os mais comuns são o dual V^* de V , as potências tensoriais $V^{\otimes k}$ para $k \geq 1$, as potências simétricas $\text{Sym}^k V$ para $k \geq 1$ e as potências exteriores $\bigwedge^k V$ para $k \geq 1$.

Partindo de um fibrado vetorial F podemos construir, de forma natural, os fibrados vetoriais $F^*, F^{\otimes k}, \text{Sym}^k F, \bigwedge^k F$ através de versões à parâmetros das construções da álgebra linear.

EXEMPLO 5.2 (Fibrado dual). *Se E é um fibrado vetorial sobre uma variedade diferenciável X descrito por aplicações de transição $\{g_{UV} : U \cap V \rightarrow \text{GL}(r, \mathbb{K})\}$ então E^* pode ser descrito via as aplicações de transição $\{(g_{UV}^t)^{-1}\}$. Em palavras, as aplicações de transição de E^* são o inverso das transpostas das aplicações de transição de E .*

De forma análoga, se E e F são fibrados vetoriais temos fibrados vetoriais $E \otimes F$ e $\text{Hom}(E, F) \simeq E^* \otimes F$ naturalmente definidos.

1.4. Complexificação de fibrados vetoriais reais. Se V é um espaço vetorial real então a complexificação de V é o espaço vetorial complexo $V \otimes \mathbb{C} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Dado um fibrado vetorial real E definido por aplicações de transição $g_{UV} : U \cap V \rightarrow \text{GL}(r, \mathbb{R})$, então a complexificação $E \otimes \mathbb{C}$ de E é o fibrado vetorial complexo com as mesmas aplicações de transição, só que agora vistas como aplicações com valores em $\text{GL}(r, \mathbb{C})$.

2. Fibrados vetoriais holomorfos

2.1. Definição. Fibrados vetoriais holomorfos são fibrados vetoriais complexos com aplicações de transição holomorfas.

2.2. Fibrados lineares holomorfos. Os fibrados lineares holomorfos em uma variedade complexa são os fibrados vetoriais holomorfos de posto um.

2.3. Grupo de Picard. Seja X uma variedade complexa. O conjunto de classes de isomorfismos de fibrados lineares holomorfos em X é usualmente denotado por $\text{Pic}(X)$. O produto tensorial de fibrados lineares define em $\text{Pic}(X)$ uma estrutura de grupo abeliano. Nesse grupo o inverso é um fibrado linear dado é o seu fibrado dual. O grupo $\text{Pic}(X)$ é chamado de grupo de Picard de X .

3. Divisores em superfícies de Riemann

3.1. Definição. Um importante conceito no estudo das superfícies de Riemann é o conceito de divisor.

DEFINIÇÃO 5.7. *Seja X uma superfície de Riemann. O grupo de divisores de X é o grupo abeliano cujos elementos são somas*

$$\sum_{j \in J} m_j \cdot p_j, \quad m_j \in \mathbb{Z}, p_j \in X,$$

localmente finitas de pontos de X . O produto no grupo é a operação que adiciona os coeficientes de um mesmo ponto $p \in X$. O grupo de divisores de X é denotado por $\text{Div}(X)$.

Na definição acima, uma soma localmente finita quer dizer que para cada ponto $p \in X$ existe uma vizinhança aberta $U_p \subset X$ tal que apenas um número finito dos somandos pertence à U_p .

3.2. Fibrados associados. *Seja $D \in \text{Div}(X)$. Podemos escolher uma cobertura \mathcal{U} de X e funções meromorfas $f_U : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ indexadas por abertos de U tais que*

$$D|_U = (f_U)_0 - (f_U)_\infty.$$

Consequentemente, se $U, V \in \mathcal{U}$ então as funções meromorfas f_U e f_V possuem exatamente os mesmos zeros e pólos (contados com multiplicidades) em $U \cap V$. Segue que os quocientes

$$f_{UV} = \frac{f_U|_{U \cap V}}{f_V|_{U \cap V}}$$

são funções holomorfas que nunca se anulam, isto é $f_{UV} \in \mathcal{O}^*(U \cap V)$. Claramente estas funções satisfazem $f_{UU} = 1$, $f_{UV} \cdot f_{VU} = 1$ quando $U \cap V \neq \emptyset$, e $f_{UV} \cdot f_{VW} \cdot f_{WU} = 1$ sempre que $U \cap V \cap W \neq \emptyset$.

Podemos aplicar a Proposição 5.4 para construir um fibrado que possui as funções f_{UV} como funções de transição. Denotaremos a classe de isomorfismo deste fibrado por $\mathcal{O}_X(D)$. Note que não há ambiguidade na definição de $\mathcal{O}_X(D)$. Se temos duas coberturas distintas e duas coleções de funções meromorfas indexadas por elas com as propriedades acima, então podemos tomar um refinamento comum de ambas as coberturas e produzir duas novas coleções de funções meromorfas via restrição. As coleções resultantes ainda terão as mesmas propriedades. Como o conjunto de zeros e pólos (com multiplicidades) coincidem para ambas as coleções, temos que os quocientes são funções holomorfas sem zeros e a Proposição 5.5 garante que os fibrados lineares resultantes são isomorfos. Adaptação direta da Proposição 5.6 mostra que a coleção de funções meromorfas f_U determina uma seção meromorfa f de $\mathcal{O}_X(D)$ satisfazendo $(f)_0 - (f)_\infty = D$.

3.3. Equivalência linear de divisores. Considere a aplicação

$$\begin{aligned}\Psi : \text{Div}(X) &\longrightarrow \text{Pic}(X) \\ D &\mapsto \mathcal{O}_X(D)\end{aligned}$$

que associa a um divisor D o seu fibrado associado $\mathcal{O}_X(D)$.

PROPOSIÇÃO 5.8. *A aplicação Ψ é um homomorfismo de grupos. Seu núcleo é formado por divisores da forma $(f)_0 - (f)_\infty$ onde $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ é uma função meromorfa não identicamente nula.*

DEMONSTRAÇÃO. A aplicação é claramente um homomorfismo de grupos pois

$$(f \cdot g)_0 = (f)_0 + (g)_0 \quad \text{e} \quad (f \cdot g)_\infty = (f)_\infty + (g)_\infty.$$

Seja D um divisor no núcleo de Ψ . Tome uma cobertura \mathcal{U} e uma coleção de funções meromorfas $\{f_U : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}\}$ tal que $D|_U = (f_U)_0 - (f_U)_\infty$. Então, de acordo com a Proposição 5.5, existe uma coleção de funções holomorfas $\{g_U : U \rightarrow \mathbb{C}^*\}$ que nunca se anulam satisfazendo

$$1 = g_U^{-1} \cdot \frac{f_U}{f_V} \cdot g_V.$$

Esta identidade garante que a fórmula

$$f(x) = \frac{f_U(x)}{g_U(x)} \quad \text{se } x \in U,$$

define, sem ambiguidade, uma função meromorfa global $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Claramente, $D = (f)_0 - (f)_\infty$. \square

A proposição acima sugere a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 5.9. *O grupo de divisores principais de uma superfície de Riemann X é o subgrupo $\text{PDiv}(X) \subset \text{Div}(X)$ gerado por divisores da forma $(f)_0 - (f)_\infty$ onde $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ é uma função meromorfa não identicamente nula.*

A Proposição 5.8 implica que temos um homomorfismo injetivo de grupos abelianos

$$\frac{\text{Div}(X)}{\text{PDiv}(X)} \longrightarrow \text{Pic}(X).$$

Veremos, como parte da prova do Teorema de Riemann-Roch, que este homomorfismo é de fato um isomorfismo de grupos quando X é uma superfície de Riemann compacta. Quando X é não compacta, também temos um isomorfismo. No caso de superfícies de Riemann arbitrárias, a prova deste isomorfismo (ou seja a prova de que todo fibrado possui seção meromorfa) é um dos pontos chaves da prova do Teorema de uniformização.

OBSERVAÇÃO 5.10. *É possível definir o grupo de divisores para variedades complexas de dimensão arbitrária (somas formais localmente finitas de hipersuperfícies) e temos ainda um homomorfismo injetivo análogo à Ψ . Mas atenção, a sobrejetividade não vale para variedades complexas arbitrárias em dimensão maior do que um, mesmo se nos restringirmos a variedades complexas compactas.*

4. Exercícios

EXERCÍCIO 5.1. *Prove a Proposição 5.6.*

EXERCÍCIO 5.2. *Seja X uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 1$. Utilize o Teorema de Riemann-Hurwitz para mostrar que a aplicação*

$$X \longrightarrow \text{Pic}(X)$$

$$p \mapsto \mathcal{O}_X(p)$$

é injetiva.

CAPÍTULO 6

Feixes e cohomologia

Feixes, e seus grupos cohomologia, são objetos matemáticos úteis para codificar passagens de dados locais para dados globais. Foram criados pelo matemático Jean Leray enquanto prisioneiro de guerra na Austria entre os anos de 1940 e 1945, [Miloo].

Apresentamos neste capítulo os rudimentos da teoria de feixes e da cohomologia de Čech. Optamos por introduzir estes objetos em generalidade ligeiramente maior do que o estritamente necessário para desenvolver a teoria das superfícies de Riemann, por entender trataram-se de objetos fundamentais e de ampla aplicabilidade.

Em contrapartida, a generalidade cobra seu preço, e somos obrigados a discutir certas sutilezas da teoria que normalmente são evitadas por boa parte dos textos modernos sobre superfícies de Riemann. Não forneceremos provas completas de todos os resultados necessários para uma exposição auto-contida da teoria, mas buscaremos indicar fontes para todas as demonstrações omitidas.

Para preparar estas notas foram utilizados os textos [Dem], [Ser55], [Har77].

1. Pré-feixes e feixes

1.1. Definições. Antes de definir propriamente um feixe, definimos o conceito auxiliar de pré-feixe de grupos abelianos. Grosso modo, são famílias de grupos abelianos indexadas por abertos de um espaço topológico satisfazendo condições naturais de compatibilidade.

DEFINIÇÃO 6.1. *Seja X um espaço topológico. Um pré-feixe \mathcal{F} de grupos abelianos sobre X consiste dos seguintes dados:*

- (1) *um grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ para cada aberto $U \subset X$; e*
- (2) *para cada par de abertos U, V tal que $V \subset U$ um morfismo de grupos (chamado de morfismo de restrição)*

$$r_{U,V} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V);$$

sujeitos às seguintes condições:

(a) o grupo associado ao aberto vazio é o grupo trivial, isto é

$$\mathcal{F}(\emptyset) = 0 = \text{grupo abeliano com apenas um elemento};$$

(b) para todo aberto U o homomorfismo $r_{U,U}$ é a identidade em $\mathcal{F}(U)$;

(c) Se $W \subset V \subset U$ são três abertos encaixados então

$$r_{U,W} = r_{V,W} \circ r_{U,V}.$$

Os elementos $s \in \mathcal{F}(U)$ são as seções do pré-feixe \mathcal{F} sobre o aberto U . No caso particular em que $U = X$ é o espaço topológico em sua totalidade, dizemos que $s \in \mathcal{F}(X)$ é um seção global do pré-feixe \mathcal{F} .

A definição de pré-feixe permite a existência de seções globais com restrições aos abertos diferentes de X iguais à zero. A definição de pré-feixe não garante a existência de seções globais realizando famílias de seções locais que coincidem quando restritas às interseções dos domínios da família. Estas duas características da definição de pré-feixes não são desejáveis para aplicações práticas. A definição de feixe de grupos abelianos *corrige estas falhas*.

DEFINIÇÃO 6.2. Um pré-feixe \mathcal{F} sobre X é um feixe se para um aberto $U \subset X$ qualquer e $\bigcup_{j \in J} U_j$ uma cobertura aberta de U valem as seguintes propriedades.

(d) (Axioma de localidade) Se $f, g \in \mathcal{F}(U)$ são tais que

$$r_{U,U_j}(f) = r_{U,U_j}(g)$$

para todo $j \in J$ então $f = g$. Em Português: duas seções de $\mathcal{F}(U)$ que coincidem localmente em todo ponto de U , coincidem em todo U .

(e) (Axioma de colagem) Se para cada $j \in J$ temos um elemento $f_j \in \mathcal{F}(U_j)$ e estes satisfazem

$$r_{U_j, U_j \cap U_k}(f_j) = r_{U_k, U_j \cap U_k}(f_k)$$

para quaisquer $j, k \in J$ então existe $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que

$$r_{U,U_j}(f) = f_j$$

para todo $j \in J$. Em Português: coleção de seções locais coerente determina uma seção global.

Apresentamos abaixo um exemplo concreto, ainda que artificial, de pré-feixe que não é um feixe por não satisfazer o axioma de localidade.

EXEMPLO 6.1. Seja X um espaço topológico com ao menos um aberto distinto de X e do aberto vazio \emptyset . Se G é um grupo arbitrário então podemos definir um pré-feixe \mathcal{F} em X , que não é um feixe, fazendo

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} G, & \text{se } U = X; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e considerando os morfismos de restrição evidentes. Note que \mathcal{F} assim definido é um pré-feixe mas não satisfaz o axioma de localidade (d) da Definição 6.2.

1.2. Exemplos de feixes. Seja X um variedade complexa. Os seguinte feixes terão importância no decorrer do texto.

Feixe	Descrição
\mathbb{Z}	funções localmente constantes com valores em \mathbb{Z}
\mathbb{R}	funções localmente constante com valores em \mathbb{R}
\mathbb{C}	funções localmente constante com valores em \mathbb{C}
\mathbb{C}^*	funções localmente constante com valores em \mathbb{C}^* (multiplicativo)
S^1	funções localmente constante com valores em S^1 (multiplicativo)
\mathcal{O}_X	funções holomorfas
\mathcal{O}_X^*	funções holomorfas que não se anulam (multiplicativo)
\mathcal{M}_X	funções meromorfas
\mathcal{M}_X^*	funções meromorfas não identicamente nulas (multiplicativo)
$\mathcal{O}_X(D)$	seções holomorfas do fibrado linear holomorfo $\mathcal{O}_X(D)$
\mathcal{E}	seções holomorfas de uma fibrado vetorial holomorfo E
Ω_X^q	q -formas holomorfas
C_X^∞	funções diferenciáveis
\mathcal{A}_X^q	q -formas diferenciais
$\mathcal{A}_X^{p,q}$	formas diferenciais de tipo (p, q)

EXEMPLO 6.2. *Seja X um espaço topológico, G um grupo abeliano e $x \in X$. O pré-feixe arranha-céu com suporte em x e grupo G é o pré-feixe $G(x)$ com seções locais dados por*

$$G(x)(U) = \begin{cases} G, & \text{se } x \in U; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e com morfismos de restrição evidentes. Verifica-se facilmente que $G(X)$ não é apenas um pré-feixe, mas também um feixe.

1.3. Talos de um pré-feixe. Seja X um espaço topológico e \mathcal{F} um pré-feixe sobre X . Considere a união disjunta

$$\coprod_{x \in U} \mathcal{F}(U)$$

de todos os grupos $\mathcal{F}(U)$ indexada pelos abertos U que contém x . Sejam U e V abertos de X contendo x . Diremos $\sigma_U \in \mathcal{F}(U)$ é equivalente à $\sigma_V \in \mathcal{F}(V)$ (em símbolos $\sigma_U \sim \sigma_V$) se existe um aberto W contido em $U \cap V$ e contendo x tal que

$$r_{U,W}(\sigma_U) = r_{V,W}(\sigma_V).$$

DEFINIÇÃO 6.3. O talo¹ de \mathcal{F} em x é o quociente

$$\prod_{U \ni x} \mathcal{F}(U) / \sim.$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U),$$

com limite tomado sobre todos os abertos de X que contém o ponto x .

O talo de um feixe \mathcal{F} em um ponto dado herda propriedades algébricas do feixe em questão. Se \mathcal{F} é um feixe de álgebras, anéis ou corpos então \mathcal{F}_x é uma álgebra, anel ou corpo.

Para todo aberto $U \subset X$ e todo ponto $x \in U$ temos homomorfismos naturais

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \mathcal{F}_x \\ s &\longmapsto s_x \end{aligned}$$

que envia uma seção definida em todo o aberto U em um germe de seção em x .

1.4. Morfismos de pré-feixes.

DEFINIÇÃO 6.4. Se \mathcal{F} e \mathcal{G} são pré-feixes de grupos abelianos sobre um mesmo espaço topológico X então um morfismo de pré-feixes $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ consiste em homomorfismos $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ para cada aberto U de X que satisfazem a seguinte relação de compatibilidade: se $V \subset U$ são abertos encaixados então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ r_{U,V} \downarrow & & \downarrow r_{U,V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

comuta. Quando os morfismos $\varphi(U)$ são isomorfismos para todos os abertos U de X então dizemos que φ é um isomorfismo de pré-feixes.

Um morfismo de pré-feixes $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ define, para cada $x \in X$, um morfismo $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ entre os talos de \mathcal{F} e \mathcal{G} no ponto x .

¹Em inglês, escrevemos: "stalk of \mathcal{F} at x ".

PROPOSIÇÃO 6.5. Se \mathcal{F} e \mathcal{G} são feixes sobre um mesmo espaço topológico X então morfismo de pré-feixes $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é um isomorfismo se, e somente se, $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ é um isomorfismo para todo $x \in X$.

DEMONSTRAÇÃO. Veja, por exemplo, [Har77, Capítulo 2, Proposição 1.1]. \square

1.5. O espalhamento de um pré-feixe.

DEFINIÇÃO 6.6. O espalhamento de um pré-feixe \mathcal{F} é o conjunto

$$|\mathcal{F}| = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

munido da topologia gerada por abertos da forma

$$\coprod_{x \in U} s_x$$

onde $U \subset X$ é um aberto e $s \in \mathcal{F}(U)$ é uma seção de \mathcal{F} sobre U .

O espalhamento $|\mathcal{F}|$ de um pré-feixe \mathcal{F} não é, em geral, um espaço topológico Hausdorff. Entretanto, $|\mathcal{F}|$ admite uma projeção natural em X

$$\pi : |\mathcal{F}| \longrightarrow X$$

que é um homeomorfismo local.

EXEMPLO 6.3. Seja $X = \mathbb{C}$. O feixe arranha-céu sobre X com suporte em 0 e grupo $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ possui espalhamento homeomorfo à reta complexa com duas origens descrita na Observação 1.8.

DEFINIÇÃO 6.7. Se para cada aberto $U \subset X$, definimos $\mathcal{F}^+(U)$ como o grupo de aplicações contínuas de $s : U \rightarrow |\mathcal{F}|$ tais que $\pi \circ s = \text{id}_U$, então a coleção $\{\mathcal{F}^+(U)\}$ junto com os morfismos de restrição naturais $r_{U,V} : \mathcal{F}^+(U) \rightarrow \mathcal{F}^+(V)$ para abertos $V \subset U$ determinam um feixe \mathcal{F}^+ chamado de feixe associado ao pré-feixe \mathcal{F} .

Segue da definição de \mathcal{F}^+ a existência de um morfismo de pré-feixes natural

$$\theta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+,$$

que envia $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ para a seção

$$\begin{aligned} s : U &\longrightarrow |\mathcal{F}| \\ x &\longmapsto \sigma_x. \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 6.8. Se $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é um morfismo entre um pré-feixe \mathcal{F} e um feixe \mathcal{G} então existe um único morfismo $\psi : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ que faz o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \searrow \theta & & \nearrow \psi \\ & \mathcal{F}^+ & \end{array}$$

comutar. Em particular, se \mathcal{F} é um feixe então \mathcal{F}^+ é isomorfo à \mathcal{F} .

DEMONSTRAÇÃO. A prova é imediata e segue diretamente da definição de \mathcal{F}^+ . Convidamos o leitor a se convencer deste fato. \square

1.6. Feixes núcleo, imagem e conúcleo. Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} dois pré-feixes sobre um mesmo espaço topológico X . Se $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é um morfismo de pré-feixes definimos o núcleo de φ como o pré-feixe $\ker \varphi$ dado pela coleção de grupos $\{\ker \varphi(U)\}$ indexada pelos abertos de U e com morfismos de restrição induzidos pelos morfismos de restrição de \mathcal{F} .

PROPOSIÇÃO 6.9. Se \mathcal{F} e \mathcal{G} são feixes então $\ker \varphi$ também é um feixe.

DEMONSTRAÇÃO. Imediata. Exercício para o leitor. \square

De forma análoga, definimos o pré-feixe $\mathcal{I}(\varphi)$ dado pela coleção de grupos $\{\varphi(U)(\mathcal{F}(U))\}$ indexada pelos abertos de U e com morfismos de restrição induzidos pelos morfismos de restrição de \mathcal{G} . Atenção, mesmo se $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é um morfismo entre feixes, o pré-feixe $\mathcal{I}(\varphi)$ não é necessariamente um feixe.

EXEMPLO 6.4. Seja $X = \mathbb{C}^*$ e considere os feixes \mathcal{O}_X de funções holomorfas em X e também o feixe \mathcal{O}_X^* de funções holomorfas em X que nunca se anulam. A aplicação exponencial determina um morfismo de feixes

$$\exp : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^*$$

que envia a seção $f \in \mathcal{O}_X(U)$ na seção $\exp(f) \in \mathcal{O}_X^*(U)$. Apesar de ambos \mathcal{O}_X e \mathcal{O}_X^* serem feixes, o pré-feixe imagem $\mathcal{I}(\exp)$ não é um feixe. A função z é um elemento de $\mathcal{O}_X(X)$, a sua restrição a qualquer aberto simplesmente conexo de X está na imagem de \exp , mas $z \notin \exp(\mathcal{O}_X(X))$.

DEFINIÇÃO 6.10. Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo entre feixes. O feixe imagem $\text{im}(\varphi)$ é o feixe associado ao pré-feixe $\mathcal{I}(\varphi)$, isto é

$$\text{im}(\varphi) = \mathcal{I}(\varphi)^+,$$

na notação da Definição 6.7. De forma similar, o feixe conúcleo de φ é o feixe associado ao pré-feixe

$$\mathcal{C}(\varphi)(U) = \frac{\mathcal{G}(U)}{\varphi(\mathcal{F}(U))}$$

com morfismos de restrição induzidos pelos morfismos de restrição de \mathcal{G} , isto é

$$\text{coker}(\varphi) = \mathcal{C}(\varphi)^+.$$

1.7. Sequência exatas de feixes. Se $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ são feixes de grupos abelianos sobre um mesmo espaço topológico X e $\alpha_i : \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_{i+1}$ são morfismos de feixes então dizemos que

$$\dots \xrightarrow{\alpha_{-2}} \mathcal{F}_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\alpha_n} \dots$$

é uma sequência exata de feixes quando $\text{im}(\alpha_i) = \text{ker}(\alpha_{i+1})$ para todo i .

Sequências exatas de feixes em que $\mathcal{F}_i = 0$ quando $i < 0$ ou $i > 2$ são de suma importância para a teoria. Estas merecem uma definição à parte.

DEFINIÇÃO 6.11. *Seja X um espaço topológico. Sejam \mathcal{F} , \mathcal{G} , e \mathcal{H} feixes sobre um mesmo espaço topológico X . Sejam também $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ e $\beta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ morfismos de feixes. Dizemos que a sequência de morfismos de feixes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta se $\text{ker } \alpha = 0$, $\text{im } \alpha = \text{ker } \beta$ e $\text{coker } \beta = 0$.

Define-se de forma análoga sequências exatas de grupos, anéis e outras estruturas algébricas.

EXEMPLO 6.5. *Seja X uma variedade complexa. A sequência exponencial sobre X é a sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i \cdot} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 1.$$

Note que trocamos 0 por 1 à direita da sequência para lembrarmos que estamos considerando o feixe \mathcal{O}_X^* como um feixe de grupos abelianos multiplicativos.

PROPOSIÇÃO 6.12. *Se*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de feixes de grupos abelianos sobre um espaço topológico X então para todo aberto $U \subset X$ temos uma sequência exata de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha(U)} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta(U)} \mathcal{H}(U).$$

Note que não há zero à direita da sequência para indicar que $\beta(U)$ não é, necessariamente, um morfismo sobrejetivo.

1.8. Feixes de seções de fibrados vetoriais holomorfos. Seja E em fibrado vetorial holomorfo de posto r sobre uma variedade complexa X com projeção $\pi : E \rightarrow X$. O feixe de seções holomorfas de E , denotado por \mathcal{E} , é o feixe

$$\mathcal{E}(U) = \{s : U \rightarrow E \mid s \text{ é aplicação holomorfa e } \pi \circ s = \text{id}_U\}.$$

A estrutura de espaço vetorial nas fibras de E define estrutura de \mathbb{C} -módulo, e em particular de grupo abeliano, em $\mathcal{E}(U)$ para qualquer $U \subset X$. Mais ainda, a estrutura de espaço vetorial nas fibras de E permite definir, para cada $U \subset X$, uma estrutura de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo em $\mathcal{E}(U)$. Diz-se então que \mathcal{E} é um feixe de \mathcal{O}_X -módulos.

Como as fibras de E possuem dimensão r , elas são geradas por qualquer coleção de r elementos \mathbb{C} -linearmente independentes. Logo se sobre um aberto $U \subset X$ existem r seções holomorfas $s_1, \dots, s_r : U \rightarrow E$ de E tais que $s_1(x), \dots, s_r(x) \in E_x$ são \mathbb{C} -linearmente independentes para todo $x \in U$ então qualquer outra seção holomorfa $s : U \rightarrow E$ de E sobre U satisfaz

$$s = \sum_{i=1}^r f_i \cdot s_i$$

para alguma coleção de funções holomorfas $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_X(U)$. Além disso, se \tilde{s} é uma outra seção holomorfa que se escreve como $\tilde{s} = \sum_{i=1}^r \tilde{f}_i \cdot s_i$ para certas funções $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r \in \mathcal{O}_X(U)$ temos que $s = \tilde{s}$ se, e somente se, $f_i = \tilde{f}_i$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Logo, é correto dizer que $\mathcal{E}(U)$ é isomorfo à $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_X(U) \cdot s_i$.

DEFINIÇÃO 6.13. Um feixe \mathcal{F} de \mathcal{O}_X -módulos é localmente livre de posto r se para todo ponto $x \in X$ existe vizinhança de U de x tal que $\mathcal{F}(U)$ é isomorfo (como $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo) à $\mathcal{O}_X(U)^{\oplus r}$. Feixes de \mathcal{O}_X -módulos localmente livres de posto 1 são também chamados de feixes invertíveis.

PROPOSIÇÃO 6.14. Um feixe \mathcal{F} de \mathcal{O}_X -módulos é localmente livre de posto r se, e somente se, existe um fibrado vetorial holomorfo F de posto r tal que \mathcal{F} é o feixe de seções holomorfas de F .

DEMONSTRAÇÃO. Como argumentado acima, se F é um fibrado vetorial de posto r então o seu feixe de seções holomorfas \mathcal{F} é localmente livre de posto r .

Provemos a recíproca. Se \mathcal{F} é um feixe localmente livre de posto r então podemos escolher uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U\}$ tal que para todo aberto $U \in \mathcal{U}$ temos um isomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos

$$\psi_U : \mathcal{O}_X(U)^{\otimes r} \longrightarrow \mathcal{F}(U).$$

Fixemos um único isomorfismo ψ_U para cada aberto $U \in \mathcal{U}$. Denotemos por e_i a seção de $\mathcal{O}_X(U_i)^{\otimes r}$ que é igual a um no i -ésimo fator e zero em todos os demais. Em interseções $U \cap V$ com $U, V \in \mathcal{U}$, ao comparar $\psi_U(e_i)$ com $\psi_V(e_i)$, vemos que existe matriz de funções holomorfas $g_{UV} \in GL(r, \mathcal{O}_X(U \cap V))$ tal que

$$\begin{pmatrix} \psi_U(e_1) \\ \vdots \\ \psi_U(e_r) \end{pmatrix} = g_{UV} \cdot \begin{pmatrix} \psi_V(e_1) \\ \vdots \\ \psi_V(e_r) \end{pmatrix}.$$

Se $U \cap V \neq \emptyset$ então $g_{UV} \cdot g_{VU} = \text{Id}$. Similarmente, se $U \cap V \cap W \neq \emptyset$ então as matrizes g_{UV}, g_{VW} e g_{WU} satisfazem a condição

$$g_{UV} \cdot g_{VW} \cdot g_{WU} = \text{Id}.$$

Logo a coleção $\{g_{UV}\}$ satisfaz as hipóteses da Proposição 5.4 e define portanto um fibrado vetorial holomorfo F de posto r . O feixe de seções de F é claramente isomorfo ao feixe \mathcal{F} . \square

2. Cohomologia de Čech

2.1. Cocadeias e diferenciais. Seja X um espaço topológico, \mathcal{F} um feixe de grupos abelianos sobre X e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de X . Se $(i_0, \dots, i_k) \in I^{k+1}$ é um multi-índice, denotaremos o aberto

$$U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$$

por $U_{(i_0, \dots, i_k)}$.

DEFINIÇÃO 6.15. O k -ésimo grupo de cocadeias de \mathcal{F} com respeito à cobertura \mathcal{U} é o grupo abeliano

$$C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(i_0, i_1, \dots, i_k) \in I^{k+1}} \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_k})$$

Um elemento de $C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ é uma coleção $\{s_{(i_0, \dots, i_k)} \in \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_k})\}$ de seções locais de \mathcal{F} indexada por I^{k+1} .

Para $k \geq 0$, definimos o morfismo de grupos abelianos

$$\delta_k : C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

através da fórmula

$$\delta_k(s)_{(i_0, \dots, i_{k+1})} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j s_{(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{k+1})}|_{U_{(i_0, \dots, i_{k+1})}}.$$

Aqui escrevemos, e no que segue escreveremos,

$$s_{(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{k+1})|_{\mathcal{U}_{(i_0, \dots, i_{k+1})}}}$$

ao invés de

$$r_{\mathcal{U}_{(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{k+1})}, \mathcal{U}_{(i_0, \dots, i_{k+1})}}(s_{(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{k+1})|_{\mathcal{U}_{(i_0, \dots, i_{k+1})}}}),$$

para não carregar ainda mais a notação.

PROPOSIÇÃO 6.16. *Para todo $k \geq 0$, a composição de morfismos de grupos abelianos*

$$C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_k} C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_{k+1}} C^{k+2}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

é zero. Ou seja, $\delta_{k+1} \circ \delta_k = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Mostremos que $\delta_1 \circ \delta_0 = 0$. Tome $s = (s_i \in \mathcal{U}_i)_{i \in I}$. Note que $\delta_0(s)$ é a cocadeia $\sigma = (\sigma_{i,j})_{i,j \in I^2}$ com

$$\sigma_{i,j} = s_{j|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}} - s_{i|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}}.$$

O cálculo

$$\begin{aligned} \delta_1(\sigma)_{i,j,k} &= \sigma_{j,k|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k}} - \sigma_{i,k|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k}} + \sigma_{i,j|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k}} = \\ &= \left((s_k)_{|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k}} - (s_j)_{|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k}} \right) - \left((s_k)_{|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k}} - (s_i)_{|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k}} \right) + \\ &+ \left((s_j)_{|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k}} - (s_i)_{|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k}} \right) = 0 \end{aligned}$$

mostra que $\delta_1 \circ \delta_0 = 0$. Deixamos o caso geral como exercício para o leitor. \square

2.2. Cohomologia de Čech com respeito a uma cobertura. Um elemento $s \in C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ é um cociclo se $\delta_k(s) = 0$. Fixado $k \geq 0$, os cociclos em $C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ formam um subgrupo que denotaremos por

$$Z^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker\{\delta_k : C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})\}.$$

Um elemento $s \in C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ é um cobordo se existe $t \in C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tal que $s = \delta_k(t)$. Fixado $k \geq 1$, os cobordos em $C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ formam um subgrupo que denotaremos por

$$B^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{im}\{\delta_{k-1} : C^{k-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})\}.$$

Por convenção, o único cobordo em $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ é o elemento trivial, isto é $B^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$.

A Proposição 6.16 implica que $B^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset Z^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ para todo $k \geq 0$. Definimos o k -ésimo grupo de cohomologia de \mathcal{F} com respeito a cobertura \mathcal{U} como o quociente

$$\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{Z^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{B^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})}.$$

Se $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é um morfismo de feixes então α induz, de forma natural, morfismos de grupos abelianos

$$\alpha : \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

para todo $k \geq 0$.

2.3. Refinamentos e cohomologia de Čech. Dadas duas coberturas $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ e $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ de um mesmo espaço topológico X , dizemos que \mathcal{V} refina \mathcal{U} , $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$, se existe uma aplicação $t : J \rightarrow I$ tal que $V_j \subset U_{t(j)}$ para todo $j \in J$. A aplicação t é um refinamento da cobertura \mathcal{U} na cobertura \mathcal{V} .

Um refinamento t de \mathcal{U} em \mathcal{V} induz, para todo $k \geq 0$, morfismo

$$t_k^* : C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^k(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

através da fórmula

$$(t_k^*(s))_{(j_0, \dots, j_k)} = (s_{(t(j_0), \dots, t(j_k))})_{|_{V_{j_0} \cap \dots \cap V_{j_k}}}.$$

Segue da definição que os morfismos t_k^* , $k \in \mathbb{N}$, fazem o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta_k} & C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ \downarrow t_k^* & & \downarrow t_{k+1}^* \\ C^k(\mathcal{V}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta_k} & C^{k+1}(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \end{array}$$

comutar. Logo t_k^* induz morfismo, denotado pelo mesmo símbolo

$$t_k^* : \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^k(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

entre os grupos de cohomologia de Čech com respeito às coberturas \mathcal{U} e \mathcal{V} .

LEMA 6.17. *Seja $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ uma cobertura que refina a cobertura $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$.*

(1) *Se $t : J \rightarrow I$ é um refinamento de \mathcal{U} em \mathcal{V} então o morfismo*

$$t_k^* : \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^k(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

é injetivo para todo $k \geq 0$.

(2) Se $t, t' : J \rightarrow I$ são dois refinamentos de \mathcal{U} em \mathcal{V} então os morfismos

$$t_k^*, t_k'^* : \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^k(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

coincidem para todo $k \geq 0$.

(3) Sejam \mathcal{W}, \mathcal{V} e \mathcal{U} três coberturas tais que \mathcal{W} refina \mathcal{V} e \mathcal{V} refina \mathcal{U} então as aplicações induzidas por respectivos refinamentos fazem o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{H}^k(\mathcal{W}, \mathcal{F}) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \check{H}^k(\mathcal{V}, \mathcal{F}) & \end{array}$$

comutar para todo $k \geq 0$.

DEMONSTRAÇÃO. O Item (1) segue diretamente das definições. A prova do Item (2) é um pouco mais delicada, ainda que padrão, e envolve a construção de um operador de homotopia entre os complexos $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e $C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Detalhes podem ser encontrados em, por exemplo, [Ser55, Proposição 3]. De posse do Item (2), o Item (3) é um simples exercício. \square

Duas coberturas abertas \mathcal{U} e \mathcal{V} de um mesmo espaço topológico X são equivalentes se \mathcal{U} refina \mathcal{V} e \mathcal{V} refina \mathcal{U} . Segue do Lema 6.17 que duas coberturas abertas equivalentes possuem grupos de cohomologia de Čech canonicamente isomorfos. Como toda cobertura aberta é equivalente a uma cobertura com conjunto de índices contido no conjunto dos abertos de X , temos que as classes de equivalência de coberturas abertas com respeito à relação de equivalência introduzida acima, é um conjunto.

DEFINIÇÃO 6.18. Se X é um espaço topológico e \mathcal{F} é um feixe sobre X então o k -ésimo grupo de cohomologia de X com coeficientes em \mathcal{F} é, por definição, o grupo

$$\check{H}^k(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}),$$

onde o limite é tomado no conjunto das classes de equivalência de coberturas abertas de X .

EXEMPLO 6.6. Se X é uma superfície de Riemann então

$$\text{Div}(X) \simeq \check{H}^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \quad e \quad \text{Pic}(X) \simeq \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

2.4. Feixes finos. Em geral, não é fácil calcular os grupos de cohomologia de Čech de um feixe dado. Destacamos aqui uma classe importante de feixes onde o cálculo dos grupos de cohomologia de Čech é um simples exercício.

DEFINIÇÃO 6.19. *Sejam \mathcal{F} um feixe sobre um espaço topológico X e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura localmente finita de X . Uma partição da unidade para \mathcal{F} subordinada à cobertura \mathcal{U} é uma coleção de morfismos de feixes*

$$\rho_i : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

indexada por I tal que

(1) o suporte

$$\overline{\{x \in X \mid \text{o germe } (\rho_i)_x \text{ é diferente de } 0\}}$$

de ρ_i está contido em U_i ; e

(2) vale a identidade

$$\sum_{i \in I} \rho_i = \text{id}_{\mathcal{F}}.$$

DEFINIÇÃO 6.20. *Um feixe \mathcal{F} sobre um espaço topológico X é fino se para toda cobertura localmente finita \mathcal{U} de X existe uma partição da unidade de \mathcal{F} subordinada à \mathcal{U} .*

Lembramos que um espaço topológico X é chamado de paracompacto se X é Hausdorff e toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura localmente finita.

EXEMPLO 6.7. *Toda variedade diferenciável X é paracompacta. A existência de partições da unidade, como discutidas em cursos de análise em variedades, implica que o feixe $C^\infty(X)$ é um feixe fino.*

EXEMPLO 6.8. *Dizemos que um feixe de grupos abelianos \mathcal{F} sobre uma variedade diferenciável X é um feixe de C^∞_X -módulos se para todo aberto $U \subset X$, o grupo $\mathcal{F}(U)$ é um $C^\infty_X(U)$ -módulo, e se $V \subset U$ são abertos encaixados então o morfismo de restrição $r_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ satisfaz a seguinte relação de compatibilidade*

$$r_{U,V}(f \cdot s) = f|_V \cdot r_{U,V}(s)$$

para toda seção $s \in \mathcal{F}(U)$ e toda função $f \in C^\infty(U)$.

Todo feixe de C^∞_X -módulos é fino. Em particular, para todo fibrado vetorial E sobre X , o feixe \mathcal{E} de seções diferenciáveis de E é um feixe fino.

PROPOSIÇÃO 6.21. *Se \mathcal{F} é um feixe fino sobre um espaço topológico paracompacto X então*

$$\check{H}^k(X, \mathcal{F}) = 0$$

para qualquer $k > 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura localmente finita de X . Seja $s \in Z^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Queremos construir $t \in C^{k-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tal que

$$\delta_{k-1}(t) = s.$$

Para tanto, seja $\rho_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura \mathcal{U} . Se $j \in I$ e $s_{i_0, \dots, i_{k-1}, j} \in \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_{k-1}, j})$ então $\rho_j(s_{i_0, \dots, i_{k-1}, j})$ é uma seção cujo suporte está estritamente contido em U_j . Logo, podemos estende-la à uma seção de \mathcal{F} no aberto $U_{i_0, \dots, i_{k-1}}$ fazendo-a zero no complemento $U_{i_0, \dots, i_{k-1}} - U_j$.

Abusando da notação, e justificando o abuso via a discussão acima, definimos $t = (t_{i_0, \dots, i_{k-1}}) \in C^{k-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ através da fórmula

$$t_{(i_0, \dots, i_{k-1})} = \sum_{j \in I} \rho_j \left(s_{(i_0, \dots, i_{k-1}, j)} \right).$$

Afirmamos que $t \in C^{k-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ definido como acima satisfaz $\delta(t) = (-1)^k \cdot s$. De fato,

$$\begin{aligned} \delta(t)_{(i_0, \dots, i_k)} &= \sum_{j=0}^k (-1)^j t_{(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_k)}|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}} = \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum_{\ell \in I} \rho_\ell (s_{(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_k, \ell)})|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}} = \\ &= \sum_{\ell \in I} \rho_\ell \left(\sum_{j=0}^k (-1)^j s_{(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_k, \ell)} \right)|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}} = \\ &= \sum_{\ell \in I} \rho_\ell \left((-1)^k s_{(i_0, \dots, i_k)} \right)|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}} = \\ &= (-1)^k s_{(i_0, \dots, i_k)}, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade é verificada graças à identidade $\delta(s) = 0$. \square

COROLÁRIO 6.22. *Se X é uma variedade diferenciável então*

$$\check{H}^k(X, \mathcal{A}_X^j) = 0$$

para todo $k > 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Toda variedade diferenciável é um espaço topológico paracompacto e qualquer feixe de C_X^∞ -módulos admite partição da unidade. \square

2.5. Coberturas de Leray. O conceito a seguir possui grande utilidade prática.

DEFINIÇÃO 6.23. *Seja X um espaço topológico e \mathcal{F} um feixe sobre X . Uma cobertura \mathcal{U} de X é uma cobertura de Leray se para qualquer subconjunto finito de abertos $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ vale que*

$$\check{H}^q(U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n, \mathcal{F}) = 0$$

para qualquer $q > 0$.

Em muitos caso é possível calcular a cohomologia de Čech de um feixe \mathcal{F} através de uma cobertura fixa, sem necessidade de tomar o limite indutivo sobre classes de equivalência de coberturas. Este é o caso para coberturas de Leray como garante o próximo resultado.

PROPOSIÇÃO 6.24. *Seja X um espaço topológico e \mathcal{F} é um feixe sobre X . Se \mathcal{U} é uma cobertura de Leray de X então*

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \check{H}^q(X, \mathcal{F})$$

para todo $q \geq 0$.

2.6. Sequências exatas de feixes.

TEOREMA 6.25. *Seja*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

uma sequência exata curta de feixes de grupos abelianos sobre um espaço topológico X . Então existe uma sequência exata longa de grupos de cohomologia da forma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \check{H}^0(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{H}^0(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \check{H}^0(X, \mathcal{H}) \\ & & & & \searrow^{\alpha^0} & & \nearrow \\ & & \check{H}^1(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{H}^1(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \check{H}^1(X, \mathcal{H}) \end{array}$$

onde os morfismos entre grupos de cohomologia de mesmo grau são induzidos pelos morfismos entre os respectivos feixes. Além disso, se X é um espaço topológico paracompacto

então a sequência exata longa de cohomologia acima pode ser estendida para uma sequência exata longa envolvendo grupos de cohomologia de ordem superior na seguinte forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \check{H}^0(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{H}^0(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \check{H}^0(X, \mathcal{H}) \\
 & & & & \alpha^0 & & \\
 & & \check{H}^1(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{H}^1(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \check{H}^1(X, \mathcal{H}) \\
 & & & & \alpha^1 & & \\
 & & \check{H}^2(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{H}^2(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \check{H}^2(X, \mathcal{H}) \\
 & & & & & & \\
 & & \check{H}^n(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{H}^n(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \check{H}^n(X, \mathcal{H})
 \end{array}$$

ainda com os morfismos entre grupos de cohomologia de mesmo grau induzidos pelos morfismos entre os respectivos feixes.

DEMONSTRAÇÃO. Para uma prova da primeira parte do enunciado, veja [Ser55, Seção 24]. A segunda parte é demonstrada em [Ser55, Seção 25].

Aqui nos contentaremos em esboçar uma demonstração assumindo a existência de cobertura \mathcal{U} arbitrariamente fina tal que as sequências

$$0 \longrightarrow C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \longrightarrow C^k(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

são exatas para todo $k \geq 0$.

A parte essencial da prova está descrita no diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & C^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & C^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & C^i(\mathcal{U}, \mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & C^{i+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & C^{i+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & C^{i+1}(\mathcal{U}, \mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & C^{i+2}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & C^{i+2}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & C^{i+2}(\mathcal{U}, \mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Handwritten blue annotations in the diagram include:

- Vertical arrows labeled $\gamma^i \in$ and $\gamma^{i+1} \in$ between the first three rows.
- Horizontal arrows labeled $\alpha^i(\gamma) \in$ and $\delta(\gamma) \in$ between the second and third rows.
- Vertical arrows labeled $0 \in$ between the third and fourth rows.
- Horizontal arrows labeled $0 \in$ between the fourth and fifth rows.

□

3. Isomorfismo de de Rham

3.1. Cohomologia de de Rham. Se X é uma variedade diferenciável então o k -ésimo grupo de cohomologia de de Rham é o grupo abeliano

$$H_{\text{dR}}^k(X, \mathbb{C}) = \frac{\ker d : \mathcal{A}_X^q(X) \rightarrow \mathcal{A}_X^{q+1}(X)}{\text{im } d : \mathcal{A}_X^{q-1}(X) \rightarrow \mathcal{A}_X^q(X)}.$$

3.2. Lema de Poincaré.

LEMA 6.26. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto contrátil. Se ω é uma q -forma diferencial fechada então ω é exata.*

COROLÁRIO 6.27. *Se X é uma variedade diferenciável de dimensão n então a sequência de feixes*

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{A}_X^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^n \longrightarrow 0$$

é exata.

3.3. O isomorfismo.

TEOREMA 6.28. *Se X é uma variedade diferenciável então*

$$\check{H}^k(X, \mathbb{C}) = H_{\text{dR}}^k(X, \mathbb{C}),$$

para todo $k \geq 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Para todo $i \geq 1$, seja Z^i o feixe de grupos abelianos definido como o núcleo do morfismo de feixes $d : \mathcal{A}_X^i \rightarrow \mathcal{A}_X^{i+1}$.

Note que o feixe Z^1 faz parte da sequência exata curta abaixo.

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}_X^0 \xrightarrow{d} Z^1 \rightarrow 0$$

A sequência longa em cohomologia inicia-se da seguinte forma

$$0 \rightarrow \check{H}^0(X, \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{A}_X^0) \xrightarrow{d} \check{H}^0(X, Z^1) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{C}) \rightarrow 0,$$

pois $\check{H}^1(X, \mathcal{A}_X^0) = 0$ de acordo com o Corolário 6.22. Logo

$$(1) \quad \check{H}^1(X, \mathbb{C}) = \frac{\check{H}^0(X, Z^1)}{d\check{H}^0(X, \mathcal{A}_X^0)}.$$

Segue também, da continuação da mesma sequência longa, que

$$(2) \quad \check{H}^k(X, \mathbb{C}) = \check{H}^{k-1}(X, Z^1)$$

para todo $k \geq 2$.

De forma análoga, se consideramos a sequência exata curta

$$0 \rightarrow Z^k \rightarrow \mathcal{A}_X^k \xrightarrow{d} Z^{k+1} \rightarrow 0$$

podemos tomar a sequência exata longa associada e deduzir que

$$(3) \quad \check{H}^{j+1}(X, Z^k) \simeq \begin{cases} \check{H}^j(X, Z^{k+1}), & \text{se } j \geq 1; \text{ e} \\ \frac{\check{H}^0(X, Z^{k+1})}{d\check{H}^0(X, \mathcal{A}_X^k)} = H_{\text{dR}}^{k+1}(X, \mathbf{C}), & \text{se } j = 0. \end{cases}$$

Para concluir basta combinar (1), (2) e (3). \square

3.4. Abstraído. Exatamente os mesmos argumentos utilizados para provar o isomorfismo de de Rham mostram o resultado a seguir.

TEOREMA 6.29. *Seja X um espaço topológico paracompacto. Seja*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{C}^\ell \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de feixes de grupos abelianos. Se $\check{H}^i(X, \mathcal{C}^j) = 0$ para todo $j \in \{0, \dots, \ell\}$ e para todo $i > 0$ então

$$\check{H}^k(X, \mathcal{F}) = \frac{\ker d : \check{H}^0(X, \mathcal{C}^k) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{C}^{k+1})}{\text{im } d : \check{H}^0(X, \mathcal{C}^{k-1}) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{C}^k)}.$$

4. Teorema de Cartan-Serre

TEOREMA 6.30. *Seja X uma variedade complexa compacta e E um fibrado vetorial sobre X . Se \mathcal{E} é o feixe de seções de E então para todo $i \geq 0$ vale que*

$$\dim \check{H}^i(X, \mathcal{E}) < \infty.$$

CAPÍTULO 7

Formas diferenciais e cohomologia de Dolbeault

1. Formas diferenciais em variedades complexas

1.1. Os fibrados tangentes de uma variedade complexa. Seja X uma variedade complexa de dimensão n . Como aplicações holomorfas são aplicações diferenciáveis, X possui também uma estrutura de variedade diferenciável real de dimensão $2n$. Seja $T_{X,\mathbb{R}}$ o fibrado tangente da variedade real X . O fibrado vetorial real $T_{X,\mathbb{R}}$ tem posto $2n$ e a estrutura complexa de X induz nele uma estrutura adicional representada via um automorfismo de fibrados vetoriais

$$J : T_{X,\mathbb{R}} \rightarrow T_{X,\mathbb{R}}$$

que satisfaz $J^2 = -\text{Id}$. Se z_1, \dots, z_n são coordenadas holomorfas locais de X então podemos escrever $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, \dots, z_n = x_n + iy_n$ e o automorfismo J é caracterizado por

$$J \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial y_j} \quad \text{e} \quad J \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Note que a restrição de J à fibras the $T_{X,\mathbb{R}}$ é um automorfismo sem autovetores reais.

A complexificação $T_{X,\mathbb{C}} = T_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ de $T_{X,\mathbb{R}}$ é um fibrado vetorial complexo de posto $2n$. O automorfismo J estende-se, via \mathbb{C} -linearidade, a um automorfismo de $T_{X,\mathbb{C}}$ ainda denotado por J . Como estamos agora falando de um automorfismo de um fibrado vetorial complexo que é idempotente ($J^4 = \text{Id}$), temos que J é, localmente, diagonalizável. Concretamente, se escrevemos

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

então

$$J \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right) = i \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right) \quad \text{e} \quad J \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) = -i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right).$$

Globalmente, não existem necessariamente seções de $T_{X,\mathbb{C}}$. Entretanto, existe uma decomposição de $T_{X,\mathbb{C}}$ em fibrados vetoriais complexos

$$T_{X,\mathbb{C}} = T_X^{1,0} \oplus T_X^{0,1}$$

invariante por J e com os fatores $T_X^{1,0}$ e $T_X^{0,1}$ correspondendo, fibra a fibra, aos auto-espacos de J com autovalores i e $-i$ respectivamente.

O fibrado $T_X^{1,0}$ é um fibrado holomorfo, isto é, as suas aplicações de transição são dadas por aplicações holomorfas. Já as aplicações de transição do fibrado $T_X^{0,1}$ não são holomorfas mas sim anti-holomorfas.

1.2. Tipo de uma forma diferencial. A decomposição da complexificação $T_{X,\mathbb{C}}$ do fibrado tangente de X induz decomposição similar da complexificação $\Omega_{X,\mathbb{C}}^1$ do fibrado cotangente de X :

$$(4) \quad \Omega_{X,\mathbb{C}}^1 = \Omega_X^{1,0} \otimes \Omega_X^{0,1}$$

onde o fator $\Omega_X^{1,0}$ corresponde às 1-formas \mathbb{C} -lineares, e o fator $\Omega_X^{0,1}$ corresponde às 1-formas satisfazendo $\omega(\lambda v) = \bar{\lambda} \cdot \omega(v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

As seções (locais) de $\Omega_X^{1,0}$ são chamadas de formas diferenciais de tipo $(1,0)$, enquanto as seções locais de $\Omega_X^{0,1}$ são chamadas de formas diferenciais de tipo $(0,1)$.

Em coordenadas holomorfas locais z_1, \dots, z_n , uma forma diferencial de tipo $(1,0)$ se escreve como

$$\sum_{i=1}^n a_i dz_i$$

onde a_i são funções diferenciáveis, não necessariamente holomorfas, e $dz_i = dx_i + idy_i$. Já uma forma diferencial de tipo $(0,1)$ se escreve como

$$\sum_{i=1}^n a_i d\bar{z}_i$$

onde $d\bar{z}_i = dx_i - idy_i$.

A decomposição (4) induz decomposição no fibrado de k -formas diferenciais com valores complexos:

$$\Omega_{X,\mathbb{C}}^k = \bigwedge^k \Omega_{X,\mathbb{C}}^1 = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^p \Omega_X^{1,0} \otimes \bigwedge^q \Omega_X^{0,1} = \bigoplus_{p+q=k} \Omega_X^{p,q}.$$

Os fatores $\Omega_X^{p,q} \subset \Omega_{X,\mathbb{C}}^k$ são agora caracterizados pela relação

$$\omega \in \Omega_X^{p,q} \iff \forall \lambda \in \mathbb{C}, \omega(\lambda v_1, \dots, \lambda v_k) = \lambda^p \cdot \bar{\lambda}^q \cdot \omega(v_1, \dots, v_k).$$

Em coordenadas locais (z_1, \dots, z_n) , as seções locais diferenciáveis de $\Omega_X^{p,q}$ podem ser escritas como

$$\sum_{|I|=p, |J|=q} a_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

onde a_{IJ} são funções diferenciáveis. Aqui estamos usando multi-índices $I = (i_1, \dots, i_p)$ e $J = (j_1, \dots, j_q)$, e adotando a convenção

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \quad \text{e} \quad d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

Denotaremos por $\mathcal{A}_X^{p,q}$ o feixe de seções diferenciáveis de $\Omega_X^{p,q}$. Se denotamos por \mathcal{A}_X^k o feixe de seções diferenciáveis de $\Omega_{X,\mathbb{C}}^k$ então, claramente, temos decomposição

$$\mathcal{A}_X^k = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}_X^{p,q}.$$

$\triangle!$ A partir de agora Ω_X^k será utilizado para denotar o feixe de seções holomorfas do fibrado de k -formas holomorfas. Não utilizaremos $\Omega_{X,p,q}$ no que segue.

1.3. Os operadores ∂ e $\bar{\partial}$. Quando X é uma variedade diferenciável, a diferencial exterior define, para todo $k \geq 0$, morfismo de feixes de grupos abelianos

$$d : \mathcal{A}_X^k \longrightarrow \mathcal{A}_X^{k+1}.$$

Quando X é também uma variedade complexa, a diferencial exterior pode ser decomposta na soma de dois operadores ∂ e $\bar{\partial}$ definidos em coordenadas locais z_1, \dots, z_n da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \partial \left(\sum_{I,J} a_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{IJ}}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \text{ e} \\ \bar{\partial} \left(\sum_{I,J} a_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{IJ}}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J. \end{aligned}$$

A identidade $d^2 = (\partial + \bar{\partial})^2 = 0$ implica que os operadores ∂ e $\bar{\partial}$ satisfazem as identidades $\partial^2 = 0$, $\bar{\partial}^2 = 0$, e $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$.

Por definição, o operador ∂ envia formas de tipo (p, q) em formas de tipo $(p+1, q)$ enquanto o operador $\bar{\partial}$ envia formas de tipo (p, q) em formas de tipo $(p, q+1)$.

1.4. Cohomologia de Dolbeault. Como $\bar{\partial}^2 = 0$, temos que

$$\text{im} \left\{ \bar{\partial} : \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q}(X) \right\} \subset \ker \left\{ \bar{\partial} : \mathcal{A}_X^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X) \right\},$$

onde adotamos a convenção $\mathcal{A}_X^{p,-1}(X) = 0$.

DEFINIÇÃO 7.1. Se X é uma variedade complexa então os grupos de cohomologia de Dolbeault de X são os grupos

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) = \frac{\ker \left\{ \bar{\partial} : \mathcal{A}_X^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X) \right\}}{\text{im} \left\{ \bar{\partial} : \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q}(X) \right\}},$$

onde $p, q \geq 0$ são inteiros.

2. Isomorfismo de Dolbeault

2.1. Fórmula integral de Cauchy.

PROPOSIÇÃO 7.2. Seja $\Delta \subset \mathbb{C}$ um disco. Se $f : \bar{\Delta} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função de classe C^∞ então para todo $z \in \Delta$ vale que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\partial f(w)}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Trata-se de uma aplicação do Teorema de Stokes. Fixe $z \in \Delta$ e considere a 1-forma

$$\eta = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

definida em $\Delta - \{z\}$. Note que

$$d\eta = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}(w) \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z},$$

Seja $\varepsilon > 0$ um número real suficientemente pequeno tal que o disco de centro z e raio ε esteja contido em Δ , isto é $D_\varepsilon(z) \subset \Delta$. O Teorema de Stokes nos permite escrever

$$\int_{\partial D_\varepsilon(z)} \eta = \int_{\partial\Delta} \eta - \int_{\Delta - D_\varepsilon(z)} d\eta.$$

Para concluir a prova basta verificar as identidades

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \eta = f(z) \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_\varepsilon(z)} d\eta = 0.$$

A primeira identidade, segue diretamente da definição de integral de caminhos:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \eta &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon \exp(i\theta))}{\varepsilon \exp(i\theta)} \cdot i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon \exp(i\theta)) i d\theta = f(z). \end{aligned}$$

Para verificar a segunda identidade, utilizamos coordenadas polares $w = z + r \exp(i\theta)$, para deduzir que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_\varepsilon(z)} d\eta &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_\varepsilon(z)} f(z + r \exp(i\theta)) \frac{d(z + r \exp(i\theta)) \wedge d(\bar{z} + r \exp(-i\theta))}{r \exp(i\theta)} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_\varepsilon(z)} f(z + r \exp(i\theta)) \frac{2ri \exp(i\theta) dr \wedge d\theta}{r \exp(i\theta)} = 0. \end{aligned}$$

Assim concluimos a prova da proposição. \square

COROLÁRIO 7.3. *Seja $\Delta \subset \mathbb{C}$ um disco. Se $g : \bar{\Delta} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função de classe C^∞ então a função*

$$\begin{aligned} f : \Delta &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{g(w)}{w - z} dw \wedge d\bar{w} \end{aligned}$$

também é de classe C^∞ e satisfaz

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

DEMONSTRAÇÃO. Fixe $z_0 \in \Delta$ e tome $\varepsilon > 0$ tal que o disco de centro z_0 e raio 2ε está contido em Δ , isto é $D_{2\varepsilon}(z_0) \subset \Delta$. Escreva g como a soma de duas funções $g_1, g_2 : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ tais que g_1 é identicamente zero fora de $D_{2\varepsilon}(z_0)$ e g_2 é identicamente zero em $D_\varepsilon(z_0)$.

Para qualquer $z \in D_\varepsilon(z_0)$, a integral

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{g_2(w)}{w - z} dw \wedge d\bar{w}$$

está claramente bem-definida dado que g_2 se anula em $D_\varepsilon(z_0)$ e, além disso, satisfaz

$$\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{g_2(w)}{w - z} \right) = 0.$$

Como $g_1(z)$ tem suporte compacto, podemos escrever

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{g_1(w)}{w - z} dw \wedge d\bar{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{g_1(w)}{w - z} dw \wedge d\bar{w}.$$

Aplicando a mudança de variáveis $u = w - z$, podemos reescrever a integral acima como

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} g_1(u+z) \frac{du \wedge d\bar{u}}{u}.$$

Uma nova mudança de variáveis da forma $u = r \exp(i\theta)$ permite concluir que a integral acima é convergente e igual à

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} g_1(z + r \exp(i\theta)) \exp(-i\theta) dr \wedge d\theta.$$

Claramente a fórmula acima define função $f_1 : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}(z) &= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}}(z + r \exp(i\theta)) \exp(-i\theta) dr \wedge d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\partial g_1}{\partial \bar{w}}(w) \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z}. \end{aligned}$$

Como a restrição de g_1 ao bordo de Δ é identicamente nula, segue da fórmula integral de Cauchy que a função $f = f_1 + f_2 : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_1(z) = g_1(z) = g(z)$$

como queríamos demonstrar. \square

2.2. Funções com derivadas prescritas.

LEMA 7.4. *Seja $g \in C^\infty(\overline{\Delta^n})$ uma função de classe C^∞ no polidisco $\Delta^n \subset \mathbb{C}^n$. Então existe $f \in C^\infty(\Delta^n)$ tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_n} = g.$$

Além disso, se existe $I \subset \{1, \dots, n-1\}$ tal que $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_i} \equiv 0$ para todo $i \in I$ então podemos escolher f tal que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} \equiv 0$ para todo $i \in I$.

DEMONSTRAÇÃO. A prova do Corolário 7.3 mostra que a função

$$f(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{g(z_1, \dots, z_{n-1}, w)}{w - z_n} dw \wedge d\bar{w}$$

satisfaz $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_n} = g$. Além disso, para todo $i \leq n-1$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} \equiv 0$ sempre que $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_i} \equiv 0$. Isto é suficiente para demonstrar o lema. \square

2.3. Lema de Dolbeault-Grothendieck.

LEMA 7.5 (Lema de Dolbeault-Grothendieck). *Seja $\Delta^n \subset \mathbb{C}^n$ o polidisco unitário. Seja α uma forma diferencial de tipo (p, q) com $q \geq 1$ e de classe C^∞ definida em uma vizinhança aberta U do compacto $\overline{\Delta^n}$. Se $\bar{\partial}\alpha = 0$ então existe $\beta \in \mathcal{A}_{\Delta^n}^{p, q-1}(\Delta^n)$ tal que*

$$\alpha = \bar{\partial}\beta.$$

DEMONSTRAÇÃO. Se α é uma forma de tipo (p, q) em U então podemos escrever

$$\alpha = \sum_I \alpha_I \wedge dz_I$$

onde α_I é uma forma de tipo $(0, q)$ em U . A equação $\bar{\partial}\alpha = 0$ é equivalente à $\bar{\partial}\alpha_I = 0$ para todo I . Além disso, existe $\beta \in \mathcal{A}_{\Delta^n}^{p, q-1}(\Delta^n)$ tal que $\bar{\partial}\beta = \alpha|_{\Delta^n}$ se, e somente se, existe $\beta_I \in \mathcal{A}_{\Delta^n}^{0, q-1}(\Delta^n)$ satisfazendo $\bar{\partial}\beta_I = \alpha_I|_{\Delta^n}$ para todo I . Essas observações elementares mostram que para provar o resultado, basta fazê-lo para formas α de tipo $(0, q)$.

Seja portanto $\alpha \in \mathcal{A}_U^{0, q}(U)$. Seja $\ell \geq 0$ um inteiro, e denote por $\underline{\ell}$ o conjunto $[0, \ell] \cap \mathbb{N}$. Seja $k \geq 0$ o menor inteiro tal que podemos escrever

$$\alpha = \sum_{I \subset \underline{k}^q} \alpha_I d\bar{z}_I.$$

Em outras palavras, k é o menor inteiro tal que α pertence ao $C_U^\infty(U)$ -submódulo de $\mathcal{A}_{\Delta^n}^{0, q}(\Delta^n)$ gerado por produtos exteriores das 1-formas $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_k$.

Provaremos o resultado por indução em k . Para que a indução funcione provaremos algo ligeiramente mais forte. Vamos mostrar a existência de β definida em vizinhança aberta de $\overline{\Delta^n}$ satisfazendo o enunciado.

Quando $k = 0$, o resultado é óbvio visto que a $(0, q)$ -forma α é necessariamente nula. Assuma que o resultado é válido para k . Para mostrar que o resultado é válido também para $k + 1$ é suficiente considerar α da forma

$$\alpha = d\bar{z}_{k+1} \wedge \beta + \gamma,$$

onde tanto β quanto γ são formas que se escrevem apenas com $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_k$. Logo podemos escrever

$$\beta = \sum_{I \in \underline{k}^{q-1}} \beta_I d\bar{z}_I \quad \text{e} \quad \gamma = \sum_{J \in \underline{k}^q} \gamma_J d\bar{z}_J$$

Como, por hipótese, $\bar{\partial}\alpha = 0$ deduzimos que

$$\frac{\partial\beta_I}{\partial\bar{z}_j} = \frac{\partial\gamma_J}{\partial\bar{z}_j} = 0$$

para todos $j \in \{k+2, \dots, n\}$, $I \in \mathbb{k}^{q-1}$ e $J \in \mathbb{k}^q$. Em outras palavras, os coeficientes das formas β e γ são holomorfos nas variáveis z_{k+2}, \dots, z_n .

O Lemma 7.4 garante a existência de funções $g_I \in C^\infty(V)$ definidas em vizinhança aberta de Δ^n tais que

$$\frac{\partial g_I}{\partial \bar{z}_{k+1}} = \beta_I \quad \text{e} \quad \frac{\partial g_I}{\partial \bar{z}_{k+2}} = \dots = \frac{\partial g_I}{\partial \bar{z}_n} = 0.$$

Seja ψ a $(0, q-1)$ -forma em V definida pela expressão

$$\psi = \sum_{I \in \mathbb{k}^{n-1}} g_I d\bar{z}_I.$$

Por construção ψ é tal que $\alpha|_V - \bar{\partial}\psi$ pode ser escrita apenas com $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_k$. Por hipótese de indução, existe vizinhança aberta W de Δ^n contida em V e $\varphi \in \mathcal{A}_W^{(0, q-1)}(W)$ tal que

$$\alpha|_W - \bar{\partial}\psi|_W = \bar{\partial}\varphi.$$

Portanto $\alpha|_W = \bar{\partial}(\psi|_W + \varphi)$ como queríamos demonstrar. \square

2.4. Isomorfismo.

TEOREMA 7.6 (Isomorfismo de Dolbeault). *Se X é uma variedade complexa então*

$$\check{H}^q(X, \Omega_X^p) = H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X),$$

para todos $p, q \geq 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Fixe $p \in \mathbb{N}$. Considere a seguinte sequência de feixes

$$0 \longrightarrow \Omega_X^p \xrightarrow{\text{inclusão}} \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_X^{p,n} \longrightarrow 0$$

Se α é um forma de tipo $(p, 0)$ satisfazendo $\bar{\partial}\alpha = 0$ então α é claramente uma p -forma holomorfa. Essa observação combinada com o Lema 7.5 garante que a sequência acima é exata.

De acordo com o Exemplo 6.8, os feixes $\mathcal{A}^{p,i}$ são feixes finos para todo $i \geq 0$. A Proposição 6.21 garante que $\check{H}^j(X, \mathcal{A}_X^{p,i}) = 0$ para todo $j > 0$. O Teorema 6.29 implica que $\check{H}^q(X, \Omega_X^p) = H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)$. \square

Uma consequência imediata do Isomorfismo de Dolbeault é o anulamento dos grupos de cohomologia de Ω_X^i em graus suficientemente altos.

COROLÁRIO 7.7. *Se X é uma variedade complexa então*

$$\check{H}^i(X, \Omega_X^j) = 0$$

para todo $i > \dim X$ e todo j .

DEMONSTRAÇÃO. O Isomorfismo de Dolbeault implica que $\check{H}^i(X, \Omega_X^j) = H_{\bar{\partial}}^{j,i}(X)$. Se $i > \dim X$ então $\mathcal{A}_X^{j,i}$ é o feixe nulo pois não existem formas diferenciais não nulas de tipo (j, i) . Logo $H_{\bar{\partial}}^{j,i}(X) = 0$. \square

3. Cohomologia de Dolbeault de fibrados vetoriais

Seja E um fibrado vetorial holomorfo sobre uma variedade complexa X . Denotemos por $\mathcal{A}_X^{0,0}(E)$ o feixe seções de classe C^∞ de E e por $\mathcal{A}_X^{i,j}(E)$ $(i, j) \in \mathbb{N}^2 - \{(0, 0)\}$ o feixe de formas diferenciais de classe C^∞ e de tipo (i, j) , isto é

$$\mathcal{A}_X^{i,j}(E) = \mathcal{A}_X^{i,j} \otimes \mathcal{A}_X^{0,0}(E).$$

Como as aplicações de transição de E são holomorfas, o operador $\bar{\partial}$ age de forma natural nos feixes $\mathcal{A}_X^{i,j}(E)$ definindo morfismos

$$\bar{\partial} : \mathcal{A}_X^{i,j}(E) \rightarrow \mathcal{A}_X^{i,j+1}(E)$$

\mathcal{O}_X -lineares que satisfazem $\bar{\partial}\bar{\partial} = 0$.

A cohomologia de Dolbeault de X com coeficientes em E é definida de forma análoga à cohomologia de Dolbeault de X :

DEFINIÇÃO 7.8. Se X é uma variedade complexa e E é um fibrado vetorial holomorfo sobre X então os grupos de cohomologia de Dolbeault de X com coeficientes em E são os grupos

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, E) = \frac{\ker \left\{ \bar{\partial} : \mathcal{A}_X^{p,q}(E) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(E) \right\}}{\text{im} \left\{ \bar{\partial} : \mathcal{A}_X^{p,q-1}(E) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q}(E) \right\}},$$

onde $p, q \geq 0$ são inteiros.

Note que \mathcal{E} , o feixe de seções holomorfas de E , aparece como núcleo do morfismo

$$\bar{\partial} : \mathcal{A}_X^{0,0}(E) \rightarrow \mathcal{A}_X^{0,1}(E).$$

Mais geralmente, para todo $p \geq 0$, o núcleo do morfismo

$$\bar{\partial} : \mathcal{A}_X^{p,0}(E) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,1}(E).$$

é o feixe $\mathcal{E} \otimes \Omega_X^p$.

Observando que o Lema de Dolbeault-Grothendieck também vale para (p, q) -formas de classe C^∞ com valores em E , deduzimos imediatamente o seguinte resultado.

TEOREMA 7.9. *Se X é uma variedade complexa e E é um fibrado vetorial sobre X então*

$$\check{H}^q(X, \Omega_X^p \otimes \mathcal{E}) = H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, E),$$

para todos $p, q \geq 0$. Em particular, se $q > \dim X$ então

$$\dim \check{H}^q(X, \mathcal{E}) = 0$$

para qualquer feixe localmente livre de \mathcal{O}_X -módulos definido sobre X .

CAPÍTULO 8

Formas diferenciais em superfícies de Riemann

1. Cohomologia de abertos de \mathbb{C}

PROPOSIÇÃO 8.1. *Se $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto então*

$$H_{\partial}^{0,1}(U) = H_{\partial}^{1,1}(U) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Se $g \in C_{\bar{U}}^{\infty}(U)$ uma função de classe C^{∞} . Para mostrar a proposição basta construir $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^{∞} tal que $g = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

Primeiramente suponha que g possui suporte compacto. Nesse caso, o argumento utilizado para provar o Corolário 7.3 mostra que podemos tomar f igual à função

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{w-z} dw \wedge d\bar{w}.$$

Aqui abusamos da notação e denotamos por g sua extensão ao plano que é identicamente nula em $\mathbb{C} - U$.

Para mostrar o caso geral, considere uma sequência de compactos $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ tal que

- (1) para todo $n \in \mathbb{N}$, o compacto K_n está contido no interior do compacto K_{n+1} ; e
- (2) a união dos compactos K_n é igual ao aberto U ; e
- (3) para todo $n \in \mathbb{N}$, o aberto $U - K_n$ não possui componente conexa relativamente compacta em U .

Note que a imposição da condição (3) permite aplicar o Teorema de Runge para construir aproximações de funções holomorfas em vizinhança de K_n por meio de funções racionais com pólos em $\mathbb{C} - U$. Em particular, funções holomorfas em vizinhanças K_n podem ser aproximadas em K_n com precisão arbitrária via funções holomorfas definidas em todo o aberto U .

Seja $\{\chi_n : \mathbb{C} \rightarrow [0, 1]\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções de classe C^{∞} tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\chi_n \equiv 1$ em uma vizinhança aberto de K_n e identicamente zero no complemento de K_{n+1} .

As funções $g_n = \chi_n g$ possuem suporte compacto e portanto, pelo argumento anterior, existem funções $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$g_n(z) = \frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}}(z).$$

Em vizinhança de K_n onde ambas as funções χ_n e χ_{n+1} são identicamente iguais à um, a diferença $f_{n+1} - f_n$ é holomorfa pois

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial \bar{z}}(z) - \frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}}(z) = (\chi_{n+1} - \chi_n)(z) \cdot g(z).$$

Logo, o Teorema de Runge garante a existência de uma função holomorfa $h_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$|f_{n+1}(z) - f_n(z) - h_n(z)| \leq \frac{1}{2^n} \text{ para todo } z \in K_n.$$

Para $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, considere a série

$$s_n = f_n + \sum_{m \geq n} (f_{m+1} - f_m - h_m) - h_1 - \dots - h_{n-1}.$$

Note que em K_n a série s_n converge uniformemente. Além disso, ainda em K_n , temos a igualdade

$$\begin{aligned} s_n &= f_n + (f_{n+1} - f_n - h_n) + \sum_{m \geq n+1} (f_{m+1} - f_m - h_m) - h_1 - \dots - h_{n-1} = \\ &= s_{n+1}. \end{aligned}$$

Definimos $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$f = f_0 + \sum_{m \geq 0} (f_{m+1} - f_m - h_m) = s_0.$$

No compacto K_n valem as igualdades

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial s_n}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}}(z),$$

pois $\sum_{m \geq n} (f_{m+1} - f_m - h_m) - h_1 - \dots - h_{n-1}$ é uma função holomorfa em K_n . Segue que f satisfaz

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = g(z)$$

para todo $z \in U$ como queríamos demonstrar. \square

COROLÁRIO 8.2. *Se $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto então*

$$\check{H}^1(U, \mathcal{O}_U) = \check{H}^1(U, \Omega_U^1) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta combinar o Isomorfismo de Dobeault (Teorema 7.6) com a Proposição 8.1. \square

2. Comparação entre cohomologias

Nesta seção comparamos os grupos de cohomologia de Dolbeault e de de Rham de uma superfície de Riemann compacta.

2.1. Cohomologia de de Rham de uma superfície compacta orientável. Para futura referência, apresentamos no resultado a seguir os grupos de cohomologia de de Rham de uma superfície compacta orientável.

TEOREMA 8.3. *Seja S uma superfície diferenciável conexa, compacta e orientável. Se o gênero de S é igual à g então os grupos de cohomologia de de Rham de S satisfazem*

$$H_{\text{dR}}^0(S) = \mathbb{C}, \quad H_{\text{dR}}^1(S) \simeq \mathbb{C}^{2g} \quad e \quad H_{\text{dR}}^2(S) \simeq \mathbb{C}.$$

Para uma prova desse resultado recomendamos a leitura de [Ful95, Capítulo 18].

2.2. Ferramenta básica. Para estudar a cohomologias de Dolbeault de superfícies de Riemann compactas utilizaremos o seguinte resultado.

TEOREMA 8.4. *Seja X uma superfície de Riemann compacta. Seja $\eta \in \mathcal{A}_X^2(X)$ uma 2-forma em X . Existe uma função $f \in \mathcal{A}_X^0(X)$ tal que $\partial\bar{\partial}f = \eta$ se, e somente se, $\int_X \eta = 0$.*

Se $\eta = \partial\bar{\partial}f$ então o Teorema de Stokes implica que $\int_X \eta = 0$. De fato,

$$\int_X \eta = \int_X \partial\bar{\partial}f = \int_X d(\bar{\partial}f) = 0.$$

A recíproca depende de argumentos delicados de análise e não apresentaremos aqui. Uma prova completa pode ser encontrada em [Don11, Capítulo 9].

2.3. Formas de volume.

PROPOSIÇÃO 8.5. *Seja X uma superfície de Riemann compacta. O morfismo de integração de X*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_X^{1,1}(X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \alpha &\mapsto \int_X \alpha. \end{aligned}$$

induz um isomorfismo entre $H_{\bar{\partial}}^{1,1}(X)$ e \mathbb{C} .

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente vejamos que o morfismo acima induz um morfismo em $H_{\bar{\partial}}^{1,1}(X)$. Como toda $(1,1)$ -forma é $\bar{\partial}$ -fechada e integração é uma operação \mathbb{C} -linear, basta verificar que

$$\int_X \bar{\partial}\beta = 0$$

para toda forma β de tipo $(1,0)$. Como X possui dimensão um, toda forma de tipo $(1,0)$ é automaticamente ∂ -fechada. Logo

$$\bar{\partial}\beta = \bar{\partial}\beta + \partial\beta = d\beta.$$

Aplicando o Teorema de Stokes, deduzimos que

$$\int_X \bar{\partial}\beta = \int_X d\beta = 0$$

como queríamos verificar.

O morfismo $H_{\bar{\partial}}^{1,1}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ definido via integração é sobrejetivo visto que existem de formas de volume. Para verificar a injetividade aplicamos o Teorema 8.4 a uma $(1,1)$ -forma α que satisfaz

$$\int_X \alpha = 0,$$

para poder escrever $\alpha = \partial\bar{\partial}f$. Segue que α é $\bar{\partial}$ -exata pois $\alpha = -\bar{\partial}(\partial f)$. Isto é suficiente para mostrar a injetividade do morfismo de integração em $H_{\bar{\partial}}^{1,1}(X)$. \square

2.4. Cohomologia do feixe estrutural e 1-formas holomorfas.

TEOREMA 8.6. *Se X é uma superfície de Riemann compacta então $\check{H}^0(X, \Omega_X^1)$ é canonicamente isomorfo à $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X)^*$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se ω é uma 1-forma holomorfa e f é uma função de classe C^∞ então o Teorema de Stokes implica que

$$\int_X d(f\omega) = - \int_X \omega \wedge df = - \int_X \omega \wedge \bar{\partial}f$$

onde a última identidade é válida pois o produto de duas $(1,0)$ -formas é automaticamente zero em variedades complexas de dimensão um. Como consequência, temos que a integração de formas diferenciais define, canonicamente, um emparelhamento

$$\begin{aligned} \check{H}^0(X, \Omega_X^1) \otimes H_{\bar{\partial}}^{0,1}(X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega \otimes \beta &\mapsto \int_X \omega \wedge \beta. \end{aligned}$$

Portanto temos morfismo canônico

$$\varphi : \check{H}^0(X, \Omega_X^1) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{0,1}(X)^*.$$

Este morfismo é injetivo pois dada $\omega \in \check{H}^0(X, \Omega_X^1)$, $\omega \neq 0$, temos que a classe de $\bar{\omega}$ em $H_{\bar{\partial}}^{0,1}(X)$ é não nula pois

$$\int_X \omega \wedge \bar{\omega} \neq 0.$$

Em particular, a conjugação complexa define um morfismo injetivo de \mathbb{R} -espaços vetoriais

$$\begin{aligned} \tau : \check{H}^0(X, \Omega_X^1) &\longrightarrow H_{\bar{\partial}}^{0,1}(X) \\ \omega &\mapsto \bar{\omega}. \end{aligned}$$

Para mostrar a sobrejetividade vamos utilizar o Teorema 8.4. Seja $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}(X)$ uma $(0,1)$ -forma $\bar{\partial}$ -fechada. Note que $\partial\alpha = d\alpha$. Logo

$$\int_X \partial\alpha = 0.$$

De acordo com o Teorema 8.4, existe $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\partial\alpha = \partial\bar{\partial}f$. Segue que a classe de α em $H_{\bar{\partial}}^{0,1}(X)$ admite representante $\alpha' = \alpha - \bar{\partial}f$, que satisfaz $\partial\alpha' = 0$. Segue que $\bar{\partial}\alpha' = \bar{\partial}\bar{\alpha}' = 0$, i.e. $\bar{\alpha}'$ é uma 1-forma holomorfa. Claramente, a operação \mathbb{R} -linear $\alpha \mapsto \bar{\alpha}'$ é inversa de τ . Segue portanto que $\check{H}^0(X, \Omega_X^1)$ e $H_{\bar{\partial}}^{0,1}(X)$ são espaços vetoriais de mesma dimensão. Consequentemente, o morfismo \mathbb{C} -linear φ é um isomorfismo. \square

2.5. Síntese.

TEOREMA 8.7. *Se X é um superfície de Riemann de gênero g então os grupos de cohomologia de Dolbeault de X satisfazem*

$$\dim H_{\bar{\partial}}^{0,1}(X) = \dim H_{\bar{\partial}}^{1,0}(X) = \frac{1}{2} \dim H_{\text{dR}}^1(X, \mathbb{C}) = g \quad e \quad \dim H_{\bar{\partial}}^{1,1}(X) = 1.$$

DEMONSTRAÇÃO. A identidade $\dim H_{\bar{\partial}}^{1,1}(X) = 1$ segue da Proposição 8.5. O Teorema 8.6 garante que $\dim H_{\bar{\partial}}^{0,1}(X) = \dim H_{\bar{\partial}}^{1,0}(X)$. Para concluir a prova do teorema resta verificar

$$\dim H_{\bar{\partial}}^{0,1}(X) + \dim H_{\bar{\partial}}^{1,0}(X) = \dim H_{\text{dR}}^1(X).$$

Para tanto considere a sequência exata

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow 0,$$

e a seqüência longa em cohomologia de Čcheck

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \check{H}^0(X, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \check{H}^0(X, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \check{H}^0(X, \Omega_X^1) \\
 & & & & & & \searrow \\
 & & & & & & \check{H}^1(X, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \check{H}^1(X, \Omega_X^1) \\
 & & & & & & \searrow \\
 & & & & & & \check{H}^2(X, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \check{H}^2(X, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \check{H}^2(X, \Omega_X^1)
 \end{array}$$

O Corolário 7.7 garante que $\check{H}^2(X, \mathcal{O}_X) = \check{H}^2(X, \Omega_X^1) = 0$. Como $\dim \check{H}^1(X, \Omega_X^1) = \dim H_{\bar{\partial}}^{1,1}(X)$ (Isomorfismo de Dolbeault) segue da Proposição 8.5 que o morfismo $\check{H}^1(X, \Omega_X^1) \rightarrow \check{H}^2(X, \mathbb{C})$ aparecendo na seqüência longa é um isomorfismo. A compacidade de X implica que $\check{H}^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$ e, conseqüentemente, o morfismo $\check{H}^0(X, \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{O}_X)$ também é um isomorfismo. Após combinar todas essas afirmações, temos a seqüência exata curta

$$0 \rightarrow \check{H}^0(X, \Omega_X^1) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow 0.$$

Aplicamos o Isomorfismo de Dolbeault mais uma vez para concluir. \square

3. Formas diferenciais meromorfas e o Teorema dos resíduos

DEFINIÇÃO 8.8. *Seja ω uma 1-forma meromorfa em uma superfície de Riemann X . O resíduo de ω em um ponto $p \in X$ é, por definição, a integral*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \omega$$

onde γ é o bordo de um disco D contido em X tal que ω é holomorfa em $D - \{p\}$.

TEOREMA 8.9. *Seja X uma superfície de Riemann compacta, Se ω uma forma meromorfa em X então*

$$\sum_{p \in X} \text{Res}_p(\omega) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $g : X \rightarrow [0, 1]$ uma função de classe C^∞ tal que g é identicamente um fora de uma união disjunta de discos D_1, \dots, D_k contidos em X e contendo os pólos de ω ; e g é identicamente zero em vizinhanças dos pólos de ω .

A forma $g \cdot \omega$ pode ser estendida a uma 1-forma de classe C^∞ em toda a superfície de Riemann X . O Teorema de Stokes nos diz que

$$\int_X d(g \cdot \omega) = 0.$$

Como $\omega|_{X-\cup D_i} = \omega|_{X-\cup D_i}$ e a diferencial de 1-formas holomorfas em superfícies de Riemann é igual à zero, temos que

$$0 = \int_X d(g \cdot \omega) = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} d(g \cdot \omega).$$

Uma nova aplicação do Teorema de Stokes fornece o resultado

$$0 = \sum_{i=1}^k \int_{\partial D_i} g \cdot \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\partial D_i} \omega$$

pois $g|_{\partial D_i} \equiv 1$ por construção. □

CAPÍTULO 9

Fibrados lineares em superfícies de Riemann

1. Fibrados lineares e feixes de funções meromorfas

Dados dois divisores D_1 e D_2 em um superfície de Riemann X dizemos que $D_1 \geq D_2$ se, e somente se, $D_1 - D_2$ é uma soma de pontos com coeficientes não negativos.

PROPOSIÇÃO 9.1. *Seja \mathcal{L} um fibrado linear holomorfo sobre uma superfície de Riemann X e seja \mathcal{F} o seu feixe de seções. Se \mathcal{L} possui uma seção meromorfa s não identicamente nula e $D = \text{div}(s)$ então \mathcal{L} é isomorfo ao subfeixe \mathcal{F} de \mathcal{M}_X cuja grupo de seções sobre um aberto $U \subset X$ é igual à*

$$\{f \in \mathcal{M}_X(U) \mid \text{div}(f) \geq -D\}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Se s_1, s_2 são duas seções meromorfas de \mathcal{L} e s_2 não é identicamente zero então, como \mathcal{L} é o feixe de seções de um fibrado holomorfo de posto 1, existe função meromorfa $h : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ tal que

$$s_1 = h s_2.$$

Nesse caso, abusamos da notação e escrevemos $h = \frac{s_1}{s_2}$.

Usando esta observação podemos definir o morfismo de feixes

$$\psi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}_X$$

que em um aberto U é definido como

$$\begin{aligned} \psi(U) : \mathcal{L}(U) &\longrightarrow \mathcal{M}_X(U) \\ f &\longmapsto \frac{f}{s_2}. \end{aligned}$$

Se U é um aberto onde \mathcal{L} admite uma seção s_1 que nunca se anula então de $\psi(U)$ é igual à \mathcal{F} . Além disso, $\psi(U)$ é claramente injetiva para $U \subset X$. Como para abertos suficientemente pequenos $U \subset X$ sempre existem seções de \mathcal{L} que nunca se anulam, segue que ψ define um isomorfismo entre \mathcal{L} e \mathcal{F} . \square

DEFINIÇÃO 9.2. Sejam X uma superfície de Riemann e $D \in \text{Div}(X)$ um divisor. Definimos $\mathcal{L}(D)$ como o \mathbb{C} -espaço vetorial

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}_X(X) \mid \text{div}(f) \geq -D\}.$$

Quando X é uma superfície de Riemann compacta, o espaço vetorial $\mathcal{L}(D)$ possui dimensão finita. Utilizaremos $\ell(D)$ para denotar a dimensão de $\mathcal{L}(D)$.

2. Teoremas clássicos na linguagem de feixes

2.1. Partes principais e o Teorema de Mittag-Leffler.

DEFINIÇÃO 9.3. Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e $u \in U$ um ponto. Se $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ é uma função meromorfa, dizemos que a parte principal de f no ponto $u \in U$ é o único polinômio $p \in \mathbb{C}[t]$ que se anula em 0 e tal que $f(z) - p((z-u)^{-1})$ possui uma singularidade removível em u .

Por definição, uma função meromorfa $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ possui um pólo em $u \in U$ se, e somente se, a parte principal de f em u é não nula.

TEOREMA 9.4 (Teorema de Mittag-Leffler). Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto, $B \subset U$ um subconjunto discretos de pontos e $\{p_b \in \mathbb{C}[t]\}_{b \in B}$ uma coleção de polinômios indexada por B . Então existe uma função meromorfa $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tal que f é holomorfa em $U - B$ e, para qualquer $b \in B$, a parte principal de f em b é igual ao polinômio p_b .

DEMONSTRAÇÃO. Seja $D \in \text{Div}(U)$ o divisor

$$D = \sum_{b \in B} (\text{grau}(p_b)) \cdot b.$$

De acordo com a Proposição 9.1, podemos identificar $\mathcal{O}_U(D)$ com o subfeixe de \mathcal{M}_U formado por germes de funções meromorfas f com $(f)_\infty \leq D$. Observe que temos uma sequência exata de feixes

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{O}_U(D) \rightarrow \frac{\mathcal{O}_U(D)}{\mathcal{O}_U} \rightarrow 0.$$

Se $b \in B$ então os elementos do talo de $\frac{\mathcal{O}_U(D)}{\mathcal{O}_U}$ em b podem ser identificados com polinômios em $(z-b)^{-1}$ sem termo constante e de grau menor ou igual à $\text{grau}(p_b)$. O morfismo quociente

$$\mathcal{O}_U(D) \rightarrow \frac{\mathcal{O}_U(D)}{\mathcal{O}_U}$$

envia uma função meromorfa f com divisor de pólos menor ou igual à D na coleção de suas partes principais nos pontos $b \in B$.

Note que $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}}) = 0$ graças ao Corolário 8.2. Tomando a sequência exata longa em cohomologia, vemos que o morfismo

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}}(D)) \rightarrow \check{H}^0\left(\mathcal{U}, \frac{\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(D)}{\mathcal{O}_{\mathcal{U}}}\right)$$

é sobrejetivo, concluindo a prova do Teorema. \square

2.2. Fibrados lineares holomorfos em abertos de \mathbb{C} .

PROPOSIÇÃO 9.5. *Se \mathcal{U} é um aberto de \mathbb{C} então todo fibrado linear holomorfo é isomorfo ao fibrado trivial.*

DEMONSTRAÇÃO. Queremos mostrar que $\text{Pic}(\mathcal{U}) = \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^*)$ é o grupo trivial. Para tanto considere a sequência exponencial

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^* \rightarrow 1.$$

Como $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}}) = 0$ (Corolário 8.2) e $\check{H}^2(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}}) = 0$ (Corolário 7.7), a sequência longa exata em cohomologia implica que

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^*) = \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}).$$

Como \mathcal{U} possui dimensão dois e é uma superfície não compacta, $\check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = 0$. Explicar isso melhor. \square

2.3. Teorema de Weierstrass.

TEOREMA 9.6 (Teorema de Weierstrass). *Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ um aberto. Dado um divisor efetivo $D \in \text{Div}(\mathcal{U})$, existe função holomorfa $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$ tal que $(f)_0 = D$.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere o fibrado linear $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(-D)$. A Proposição 9.5 implica que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(-D)$ é trivial. Em particular, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(-D)$ possui uma seção holomorfa que nunca se anula.

Considere o morfismo de feixes

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{U}}(-D) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{U}}.$$

A imagem de uma seção de $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(-D)$ que nunca se anula é uma função holomorfa que se anula exatamente em D . \square

3. Existência de seções meromorfas para fibrados lineares

TEOREMA 9.7. *Seja X uma superfície de Riemann compacta. Se L é um fibrado linear holomorfo sobre X então L possui seção meromorfa não identicamente nula.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja \mathcal{L} o feixe de seções holomorfas de L e seja $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(\text{mp})$ o feixe de seções meromorfas de L com divisor de pólos $\leq \text{mp}$. Considere a seqüência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(\text{mp}) \rightarrow \frac{\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(\text{mp})}{\mathcal{L}} \rightarrow 0.$$

Note que $\frac{\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(\text{mp})}{\mathcal{L}}$ é um feixe arranha-céu com suporte em p e talo sobre p isomorfo ao espaço vetorial $\mathbb{C}[t]/t^m$.

Considere a seqüência longa associada

$$0 \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{L}) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(\text{mp})) \rightarrow \frac{\mathbb{C}[t]}{t^m} \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{L}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(\text{mp})) \rightarrow 0.$$

Usamos aqui que

$$\check{H}^1(X, \frac{\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(\text{mp})}{\mathcal{L}}) = 0,$$

fato válido para qualquer feixe suportado em um ponto.

Algebra linear implica que

$$\begin{aligned} \check{h}^0(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(\text{mp})) &= \check{h}^0(X, \mathcal{L}) + \dim \frac{\mathbb{C}[t]}{t^m} - \check{h}^1(X, \mathcal{L}) + \check{H}^1(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(\text{mp})) \\ &\geq \check{h}^0(X, \mathcal{L}) - \check{h}^1(X, \mathcal{L}) + m. \end{aligned}$$

Se $m > \check{h}^0(X, \mathcal{L}) - \check{h}^1(X, \mathcal{L})$ então

$$\check{h}^0(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(\text{mp})) > 0$$

garantindo a existência de uma seção meromorfa de \mathcal{L} holomorfa no complemento de p . \square

COROLÁRIO 9.8. *Seja X uma superfície de Riemann compacta. O morfismo de grupos*

$$\begin{aligned} \text{Div}(X) &\longrightarrow \text{Pic}(X) \\ D &\longmapsto \mathcal{O}_X(D) \end{aligned}$$

é sobrejetivo.

4. Exercícios

EXERCÍCIO 9.1. *Seja X uma superfície de Riemann compacta. Se $f, g \in \mathcal{M}_X(X)$ são funções meromorfas não constantes tais que $\text{div}(f) \leq \text{div}(g)$ então f/g é uma função constante.*

EXERCÍCIO 9.2. *Sejam D_1, D_2 dois divisores em uma superfície de Riemann compacta. Defina $\min(D_1, D_2)$ e $\max(D_1, D_2)$ tomando mínimos e máximos dos coeficientes de D_1 e D_2 . Mostre que*

$$\ell(D_1) + \ell(D_2) \leq \ell(\min(D_1, D_2)) + \ell(\max(D_1, D_2)).$$

O Teorema de Riemann-Roch

1. Morfismos entre fibrados lineares holomorfos

1.1. O grau de fibrados lineares.

DEFINIÇÃO 10.1. *Seja s uma seção meromorfa de um fibrado linear holomorfo L sobre uma superfície de Riemann X . O divisor associado à s é o divisor*

$$\operatorname{div}(s) = (s)_0 - (s)_\infty.$$

PROPOSIÇÃO 10.2. *Seja L um fibrado linear holomorfo sobre uma superfície de Riemann compacta X . Se s_1, s_2 são duas seções meromorfas não identicamente nulas então*

$$\operatorname{grau}(\operatorname{div}(s_1)) = \operatorname{grau}(\operatorname{div}(s_2)).$$

DEMONSTRAÇÃO. Se s_1 e s_2 são seções meromorfas de um mesmo fibrado linear então existe uma função meromorfa $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tal que

$$s_1 = f \cdot s_2.$$

Temos portanto que

$$\operatorname{div}(s_1) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(s_2).$$

O Teorema 3.10 garante que $\operatorname{grau} \operatorname{div}(f) = 0$. A aditividade dos graus implica o resultado. \square

O Corolário 9.8 garante que qualquer fibrado linear holomorfo L sobre uma superfície de Riemann compacta possui seções meromorfas não identicamente nulas. Definimos o grau de L como sendo o grau do divisor associado à qualquer seção meromorfa não identicamente nula de L . A Proposição acima garante que não há ambiguidade nesta definição. Denotaremos o grau de L , ou do seu feixe de seções \mathcal{L} , por $\operatorname{grau}(L)$ ou $\operatorname{grau}(\mathcal{L})$.

1.2. Característica de Euler de feixes. Seja \mathcal{F} um feixe de \mathbb{C} -módulos sobre um variedade X , ou mais geralmente sobre um espaço topológico Hausdorff com base enumerável. Diremos que \mathcal{F} possui cohomologia finita se $\check{H}^i(X, \mathcal{F}) = 0$ para

i suficientemente grande e $\dim \check{H}^i(X, \mathcal{F}) < \infty$ para todo i . Nesse caso, a característica de Euler de \mathcal{F} é, por definição, o inteiro

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim \check{H}^i(X, \mathcal{F}).$$

PROPOSIÇÃO 10.3. *Seja X um espaço topológico Hausdorff com base enumerável. Se*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de feixes de \mathbf{C} -módulos com cohomologia finita então

$$\chi(X, \mathcal{G}) = \chi(X, \mathcal{F}) + \chi(X, \mathcal{H}).$$

DEMONSTRAÇÃO. Álgebra Linear. Deixamos a prova como exercício para o leitor. \square

1.3. Característica de Euler de fibrados lineares. Sejam X uma superfície de Riemann e $D \in \text{Div}(X)$ um divisor. Assuma que D é um divisor efetivo e considere $\sigma \in \check{H}^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ seção holomorfa tal que $(\sigma)_0 = D$.

Para todo fibrado linear holomorfo $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ com feixe de seções holomorfas \mathcal{L} , temos um morfismo injetivo de feixes

$$\begin{aligned} \mu_\sigma : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(D) \\ s &\longmapsto s \otimes \sigma, \end{aligned}$$

dado por multiplicação por σ .

O morfismo μ_σ é sobrejetivo fora do suporte de D . Note que o feixe \mathcal{L} não figura na notação que utilizamos para o morfismo acima. Trata-se de um abuso proposital, visto que as aplicações para feixes de seções de fibrados lineares distintos são definidas localmente da mesma forma. Em particular, o conúcleo de μ_σ independe de \mathcal{L} e é isomorfo a uma soma direta de feixes arranha-céus com suportes em D . Mais precisamente, se

$$D = \sum_{i=1}^k m_i \cdot p_i$$

então

$$\text{coker}(\mu_\sigma) = \bigoplus_{i=1}^k \mathbf{C}^{m_i}(p_i)$$

na notação do Exemplo 6.2. Será conveniente denotar o conúcleo de (qualquer um dos morfismos) μ_σ por \mathcal{O}_D .

PROPOSIÇÃO 10.4. *Se \mathcal{L} é o feixe de seções de um fibrado linear holomorfo e D é um divisor efetivo então*

$$\chi(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(D)) = \chi(X, \mathcal{L}) + \text{grau}(D).$$

DEMONSTRAÇÃO. Considere a sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0.$$

Como o suporte de \mathcal{O}_D igual a um número finito de pontos, vale que $\check{H}^i(X, \mathcal{O}_D) = 0$ para todo $i > 0$. Além disso,

$$\check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) \simeq \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{C}^{m_i}.$$

Temos portanto que $\chi(X, \mathcal{O}_D) = \sum_{i=1}^k m_i = \text{grau}(D)$.

Para concluir basta aplicar a Proposição 10.3. □

2. Uma primeira versão do Teorema de Riemann-Roch

TEOREMA 10.5. *Seja X uma superfície de Riemann compacta de gênero g . Se \mathcal{L} é o feixe de seções de um fibrado linear holomorfo então*

$$\chi(X, \mathcal{L}) = \text{grau}(\mathcal{L}) + \chi(X, \mathcal{O}_X).$$

DEMONSTRAÇÃO. Observe que o Teorema é válido para $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ trivialmente.

Se o Teorema é válido um feixe \mathcal{L} então ele também é válido para o feixe $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(p)$ para todo $p \in X$. De fato, basta aplicar a Proposição 10.3 à sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(p) \rightarrow \mathcal{O}_p \rightarrow 0$$

para deduzir que

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(p)) &= \chi(X, \mathcal{L}) + 1 = \\ &= \text{grau}(\mathcal{L}) + 1 + \chi(X, \mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

Por indução, temos a validade do Teorema de Riemann-Roch para o feixe de seções de qualquer fibrado associado a um divisor efetivo.

De forma análoga, se o Teorema é válido para \mathcal{L} então ele também é válido para $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(-p)$ para todo $p \in X$. Agora aplicamos a Proposição 10.3 à sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(-p) \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_p \rightarrow 0$$

e observamos que

$$\chi(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(-p)) = \chi(X, \mathcal{L}) - 1 = \text{grau}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(-p)) + \chi(X, \mathcal{O}_X).$$

Com isso, deduzimos por indução, a validade do teorema para o feixe de seções de qualquer fibrado associado à um divisor.

Para concluir lembramos que o Corolário 9.8 garante que todo fibrado linear holomorfo é linearmente equivalente a um fibrado associado à um divisor. \square

PROPOSIÇÃO 10.6. *Se X é uma superfície de Riemann compacta de gênero g então*

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = 1 - g.$$

DEMONSTRAÇÃO. Corolário 7.7 garante que $\check{h}^j(X, \mathcal{O}_X) = 0$ se $j \geq 2$. Utilizando o isomorfismo de Dolbeault (Teorema 7.6), temos que

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = \check{h}^0(X, \mathcal{O}_X) - \check{h}^1(X, \mathcal{O}_X) = 1 - H_0^{0,1}(X).$$

Para concluir basta aplicar o Teorema 8.7 que garante que $\dim H_0^{0,1}(X) = g$. \square

COROLÁRIO 10.7. *Seja X uma superfície de Riemann compacta de gênero g . Se \mathcal{L} é o feixe de seções de um fibrado linear holomorfo então*

$$\chi(X, \mathcal{L}) = \text{grau}(\mathcal{L}) + 1 - g.$$

DEMONSTRAÇÃO. Combinar o Teorema 10.5 com a Proposição 10.6. \square

3. Primeiras aplicações

3.1. Um refinamento da fórmula de Riemann-Hurwitz.

LEMA 10.8. *Se ω é uma 1-forma meromorfa então*

$$\text{grau}(\text{div}(\omega)) = 2 \dim \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X) - 2 = 2g - 2.$$

DEMONSTRAÇÃO. Queremos calcular o inteiro $\text{grau}(\Omega_X^1)$. De acordo com o Teorema 10.5

$$\begin{aligned} \text{grau}(\Omega_X^1) &= \chi(X, \Omega_X^1) - \chi(X, \mathcal{O}_X) = \\ &= h^0(X, \Omega_X^1) - h^1(X, \Omega_X^1) - h^0(X, \mathcal{O}_X) + h^1(X, \mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

A identidade $\text{grau}(\text{div}(\omega)) = 2 \dim \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X) - 2$ é consequência do Teorema 8.6 combinado com a Proposição 8.5. A segunda identidade segue da primeira combinada com o Teorema 8.7. \square

DEFINIÇÃO 10.9. *Se X é uma superfície de Riemann então o divisor canônico de X é qualquer divisor $K_X \in \text{Div}(X)$ tal que $\mathcal{O}_X(K_X)$ é isomorfo ao feixe Ω_X^1 .*

Dada uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ não constante, temos um morfismo de grupos

$$f^* : \text{Div}(Y) \longrightarrow \text{Div}(X),$$

tal que

$$f^*y = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{grau}_x(f) \cdot x.$$

PROPOSIÇÃO 10.10. *Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação holomorfa entre superfícies de Riemann compactas então*

$$\text{grau}(f^*D) = \text{grau}(f) \cdot \text{grau}(D)$$

para qualquer $D \in \text{Div}(Y)$.

DEMONSTRAÇÃO. Consequência imediata do Teorema 3.10. \square

DEFINIÇÃO 10.11. *Seja $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação entre superfícies de Riemann não constante. O divisor de ramificação de f é o divisor $\Delta(f) \in \text{Div}(X)$ definido como*

$$\Delta(f) = \sum_{x \in X} (\text{grau}_x(f) - 1) \cdot x.$$

O resultado a seguir é um refinamento do Teorema 4.7 (fórmula de Riemann-Hurwitz) provado no Capítulo 4.

TEOREMA 10.12. *Se $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre superfícies de Riemann compactas então*

$$K_X \sim f^*(K_Y) + \Delta(f),$$

onde \sim denota equivalência linear de divisores.

DEMONSTRAÇÃO. Seja ω uma 1-forma meromorfa em Y não identicamente nula. Logo podemos tomar $K_Y \sim \text{div}(\omega)$. O pull-back de ω como 1-forma diferencial é uma 1-forma meromorfa em X , e portanto

$$K_X \sim \text{div}(f^*\omega).$$

Contas locais, que deixamos a cargo do leitor, mostram que

$$\text{div}(f^*\omega) = f^* \text{div}(\omega) + \Delta(f).$$

O Teorema segue desta última identidade. \square

3.2. Existência de funções meromorfas de grau $g + 1$.

PROPOSIÇÃO 10.13. *Se X é uma superfície de Riemann compacta de gênero g então existe função meromorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau menor ou igual à $g + 1$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $D \in \text{Div}(X)$ um divisor efetivo de grau $g + 1$. De acordo com o Teorema 10.5 temos que

$$\dim \check{H}^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \geq g + 1 + 1 - g = 2.$$

Sejam $s_1, s_2 \in \check{H}^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ duas seções holomorfas linearmente independentes. O quociente s_1/s_2 é uma função meromorfa não constante de grau $\leq g + 1$. Note que o grau é estritamente menor do que $g + 1$ apenas quando os suportes de $\text{div}(s_1)$ e $\text{div}(s_2)$ possuem pontos em comum. \square

COROLÁRIO 10.14. *Se X é uma superfície de Riemann compacta de gênero 0 então X é biholomorfa a \mathbb{P}^1 .*

3.3. Cohomologia do feixe de funções meromorfas.

LEMA 10.15. *Seja X uma superfície de Riemann. Se \mathcal{L} é o feixe seções de um fibrado linear sobre X então*

$$\dim \check{H}^1(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(np)) \leq \dim \check{H}^1(X, \mathcal{L})$$

para todo $p \in X$ e todo $n \geq 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue da sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(p) \rightarrow \mathbb{C}(p) \rightarrow 0$$

que $\dim \check{H}^0(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(p)) = \dim \check{H}^0(X, \mathcal{L}) + \varepsilon$ como $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Por outro lado, o Teorema 10.5 implica que

$$\chi(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(p)) - \chi(X, \mathcal{L}) = 1.$$

Logo

$$\dim \check{H}^1(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(p)) = \dim \check{H}^1(X, \mathcal{L}) - (1 - \varepsilon) \leq \dim \check{H}^1(X, \mathcal{L}).$$

O resultado segue por indução. \square

LEMA 10.16. *Seja X uma superfície de Riemann. Se \mathcal{L} é o feixe de seções de um fibrado holomorfo linear então existe $n_0 = n_0(\mathcal{L}) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\dim \check{H}^1(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(np)) = 0$$

para todo $p \in X$ e todo $n \geq n_0$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f \in \check{H}^0(X, \mathcal{O}_X(np))$. Assuma que $f \neq 0$. Se $D_f = \text{div}(f)$ então multiplicação por f define sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(np) \rightarrow \mathcal{O}_{D_f} \rightarrow 0.$$

Denote por ψ_f o morfismo

$$\psi_f : \check{H}^1(X, \mathcal{L}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(np))$$

que figura na sequência longa em cohomologia. Como $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_{D_f}) = 0$, temos que ψ_f é necessariamente um morfismo sobrejetivo.

Dessa forma definimos uma aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : \check{H}^0(X, \mathcal{O}_X(np)) &\longrightarrow \text{Hom}(\check{H}^1(X, \mathcal{L}), \check{H}^1(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(np))) \\ f &\mapsto \psi_f. \end{aligned}$$

Segue da definição das aplicações ψ_f que

$$\psi_{af+bg} = a\psi_f + b\psi_g$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{C}$. Ou seja, a aplicação Ψ é \mathbb{C} -linear.

O Lema 10.15 implica a desigualdade

$$\dim \text{Hom}(\check{H}^1(X, \mathcal{L}), \check{H}^1(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(np))) \leq (\dim \check{H}^1(X, \mathcal{L}))^2.$$

Se $n \geq (\dim \check{H}^1(X, \mathcal{L}))^2 + g$ então o Teorema 10.5 implica que

$$\dim \check{H}^0(X, \mathcal{O}_X(np)) > \dim \text{Hom}(\check{H}^1(X, \mathcal{L}), \check{H}^1(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(np))).$$

Logo existe seção holomorfa $f \in \check{H}^0(X, \mathcal{O}_X(np))$ distinta de zero mas tal que $\psi_f = 0$. Como ψ_f é sempre sobrejetiva, deduzimos o anulamento de $\check{H}^1(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(np))$ sempre que n for maior do que $(\dim \check{H}^1(X, \mathcal{L}))^2 + g$. \square

TEOREMA 10.17. *Seja X uma superfície de Riemann compacta. Se \mathcal{M}_X denota o feixe de funções meromorfas em X então*

$$\check{H}^1(X, \mathcal{M}_X) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f \in \check{H}^1(X, \mathcal{M}_X)$ uma classe de cohomologia. Seja $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura finita suficientemente fina, de modo que existe representante $\{f_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{M}_X)$ de f . Para cada $i \in I$ escolha aberto $V_i \subset U_i$ relativamente compacto de modo que $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ ainda é uma cobertura de X .

O cociclo $\{g_{ij} = f_{ij}|_{V_i \cap V_j}\} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{M}_X)$ ainda representa f . Segue da finitude de \mathcal{V} e da compacidade relativa dos abertos V_i em U_i que existe um divisor D tal que $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}_X(D))$.

Se $p \in X$ é um ponto fora do suporte de D então $\{g_{ij}\}$ pode ser visto como um cociclo em $Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}_X(D + np))$ para qualquer $n \geq 0$. Se n é suficientemente grande então o Lema 10.16 mostra que $\{g_{ij}\}$ é zero em $\check{H}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}_X(D + np)) \subset \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X(D + np))$ e, conseqüentemente, também é zero em $\check{H}^1(X, \mathcal{M}_X)$ como queríamos demonstrar. \square

4. Teorema de Riemann-Roch

4.1. Enunciado.

TEOREMA 10.18. *Seja X uma superfície de Riemann compacta e $D \in \text{Div}(X)$ um divisor. Então*

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) - h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - D)) = \text{grau } D + 1 - g(X).$$

4.2. Formas diferenciais meromorfas e o Teorema dos resíduos.

DEFINIÇÃO 10.19. *Seja ω uma 1-forma meromorfa em uma superfície de Riemann X . O resíduo de ω em um ponto $p \in X$ é, por definição, a integral*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \omega$$

onde γ é o bordo de um disco D contido em X tal que ω é holomorfa em $D - \{p\}$.

TEOREMA 10.20. *Seja X uma superfície de Riemann compacta, Se ω uma forma meromorfa em X então*

$$\sum_{p \in X} \text{Res}_p(\omega) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $g : X \rightarrow [0, 1]$ uma função de classe C^∞ tal que g é identicamente um fora de uma união disjunta de discos D_1, \dots, D_k contidos em X e contendo os pólos de ω ; e g é identicamente zero em vizinhanças dos pólos de ω .

A forma $g \cdot \omega$ pode ser estendida a uma 1-forma de classe C^∞ em toda a superfície de Riemann X . O Teorema de Stokes nos diz que

$$\int_X d(g \cdot \omega) = 0.$$

Como $\omega|_{X - \cup D_i} = \omega|_{X - \cup D_i}$ e a diferencial de 1-formas holomorfas em superfícies de Riemann é igual à zero, temos que

$$0 = \int_X d(g \cdot \omega) = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} d(g \cdot \omega).$$

Uma nova aplicação do Teorema de Stokes fornece o resultado

$$0 = \sum_{i=1}^k \int_{\partial D_i} g \cdot \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\partial D_i} \omega$$

pois $g|_{\partial D_i} \equiv 1$ por construção. □

4.3. Prova do Teorema de Riemann-Roch.

PROVA DO TEOREMA 10.18. Seja ω uma forma meromorfa não identicamente zero em X com $\text{div}(\omega) = K_X$.

Segue do Teorema 10.5 que

$$(5) \quad h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \geq \text{grau } D + 1 - g(X).$$

Seja $p \in X$ um ponto arbitrário e considere a sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_X(D + p) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0.$$

Tomando a sequência longa em cohomologia deduzimos que

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \leq h^0(X, \mathcal{O}_X(D + p)) \leq h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) + 1.$$

Se aplicamos o mesmo argumento para $K_X - D - p$, vemos que

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - D - p)) \leq h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - D)) \leq h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - D - p)) + 1.$$

As duas últimas desigualdades não podem ser melhoradas de forma independente. Entretanto, elas não podem ser simultaneamente desigualdades estritas. Em outras palavras, afirmamos que

$$(6) \quad h^0(X, \mathcal{O}_X(D + p)) + h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - D)) \leq h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) + h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - D - p)) + 1.$$

Suponha que não. Então existem funções meromorfas f_1 e f_2 tais que

$$\begin{aligned} \text{div}(f_1) &\geq -D - p \text{ mas } \text{div}(f_1) \not\geq -D, \text{ e} \\ \text{div}(f_2) &\geq -K_X + D \text{ mas } \text{div}(f_2) \not\geq -K_X + D + p. \end{aligned}$$

Considere a 1-forma $f_1 \cdot f_2 \cdot \omega$. O divisor de $f_1 \cdot f_2 \cdot \omega$ satisfaz

$$\text{div}(f_1 \cdot f_2 \cdot \omega) \geq -D - p - K_X + D + K_X \geq -p.$$

Logo $f_1 \cdot f_2 \cdot \omega$ é uma forma holomorfa em $X - \{p\}$ e possui no máximo um pólo simples em p . Como $\text{div}(f_1) \not\geq -D$ temos que o coeficiente de p em $\text{div}(f_1)$ é exatamente $-(\text{grau}_p(D) + 1)$. Ao mesmo tempo como $\text{div}(f_2) \not\geq -K_X + D + p$ temos que $\text{div}(f_2 \omega) \not\geq D + p$. Consequentemente o coeficiente de p em $\text{div}(f_2 \cdot \omega)$ é exatamente $\text{grau}_p(D)$. Concluímos que $f_1 \cdot f_2 \cdot \omega$ possui um pólo simples em p com resíduo não nulo. Isso contradiz o Teorema 10.20 e, portanto, mostra a desigualdade (6).

Considere a seguinte função

$$\begin{aligned} \phi : \text{Div}(X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ D &\mapsto h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) - h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - D)) - \text{grau}(D). \end{aligned}$$

Para concluir a prova do Teorema é suficiente mostrar que ϕ é uma função constante. A desigualdade (6) pode ser reescrita na forma

$$\phi(D + p) \leq \phi(D)$$

para todo $p \in X$. Como $h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - D - np)) = 0$ para n suficientemente grande, deduzimos da desigualdade (5) que

$$(7) \quad \phi(D) \geq \phi(D + np) \geq 1 - g.$$

Para concluir aplicamos a desigualdade (7) para D e $K_X - D$ para obter

$$\phi(D) + \phi(K_X - D) \geq 2 - 2g.$$

Por outro lado, como $K_X - (K_X - D) = D$, a definição de ϕ nos dá que

$$\phi(D) + \phi(K_X - D) = -\text{grau}(K_X).$$

Como $\text{grau}(K_X) = 2g - 2$, ver Lemma 10.8, deduzimos que $\phi(D) = \phi(K_X - D) = 1 - g$. \square

5. Exercícios

EXERCÍCIO 10.1. *Seja X uma superfície de Riemann compacta de gênero 1 ou 2. Mostre que X admite uma aplicação holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau 2.*

EXERCÍCIO 10.2. *Seja X uma superfície de Riemann compacta de gênero g . Se $D \in \text{Div}(X)$ é tal que $\ell(D) = g$ e $\text{grau}(D) = 2g - 2$ então existe uma forma meromorfa ω tal que $\text{div}(\omega) = D$.*

EXERCÍCIO 10.3. *Seja X uma superfície de Riemann compacta de gênero g .*

(1) *Fixe um ponto base $O \in X$. Use o Teorema de Riemann-Roch para mostrar que dados $g + 1$ pontos p_1, \dots, p_{g+1} de X , existem g pontos $q_1, \dots, q_g \in X$ tais que*

$$p_1 + \dots + p_{g+1} \sim O + q_1 + \dots + q_g,$$

onde \sim denota equivalência linear.

(2) *Utilize o item anterior para mostrar que para todo fibrado linear L de grau g sobre X existem p_1, \dots, p_g pontos de X tais que L é isomorfo ao fibrado linear $\mathcal{O}_X(p_1 + \dots + p_g)$.*

Sistemas lineares e mergulhos projetivos

1. Aplicações e sistemas lineares

1.1. Aplicações de superfícies de Riemann em espaços projetivos. Sejam X uma superfície de Riemann compacta e L um fibrado linear holomorfo sobre X com feixe de seções \mathcal{L} . Dadas duas seções σ_0 e σ_1 de \mathcal{L} com $\sigma_0 \neq 0$ sabemos que existe uma única função meromorfa h tal que $\sigma_1 = h\sigma_0$. Consequentemente, se σ_0 ou σ_1 é uma seção não identicamente nula então temos uma aplicação bem-definida de X em \mathbb{P}^1 dada por $x \mapsto (\sigma_0(x) : \sigma_1(x))$. Mais geralmente, se $V \subset H^0(X, \mathcal{L})$ é um subespaço vetorial de dimensão $r+1$, com $r \geq 0$, e escolhemos uma base $\sigma_0, \dots, \sigma_r$ de V então podemos definir aplicação φ de X em \mathbb{P}^r do seguinte modo.

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow \mathbb{P}^r \\ x &\mapsto (\sigma_0(x) : \sigma_1(x) : \dots : \sigma_r(x)). \end{aligned}$$

O grau de φ é menor ou igual ao grau de \mathcal{L} . É exatamente igual se, e somente se, as seções em V não possuem zeros comuns.

Seja agora $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^r$ uma aplicação holomorfa de uma superfície de Riemann compacta em um espaço projetivo \mathbb{P}^r . Em \mathbb{P}^r considere um hiperplano H , por exemplo $H = \{x_0 = 0\}$ em coordenadas homogêneas, e o fibrado linear holomorfo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(H)$ associado ao divisor H^1 . Um exercício simples mostra que $h^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(H)) = r+1$ e que $H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(H))$ é naturalmente isomorfo ao espaço de polinômios homogêneos de grau 1 em \mathbb{C}^{r+1} .

Consideramos em X o fibrado linear $L = \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(H)$. Se $\mathcal{U} = \{U_i\}$ é uma cobertura de \mathbb{P}^r onde $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(H)$ é dado por funções de transição g_{ij} então $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(H)$ é o fibrado sobre X que na cobertura $\mathcal{V} = \{V_i = \varphi^{-1}(U_i)\}$ é dado por funções de transição $\varphi^*g_{ij} = g_{ij} \circ \varphi$. Se x_0, \dots, x_r formam uma base do espaço vetorial $H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(H))$ então temos $(r+1)$ seções $\sigma_i = \varphi^*x_i$ de L . Podemos escrever φ na forma $\varphi(x) = (\sigma_0(x) : \dots : \sigma_r(x))$.

¹A construção de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(H)$ é completamente análoga à construção de fibrado linear holomorfo em superfície de Riemann associado à um divisor D .

Se escolhermos uma outra base y_0, \dots, y_r de $H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(H))$ e fazemos $s_i = \varphi^* s_i$ então as aplicações $\varphi(x) = (\sigma_0 : \dots : \sigma_r)$ e $\psi(x) = (s_0 : \dots : s_r)$ diferem por um automorfismo $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{P}^r)$. Concretamente,

$$\alpha \circ \psi = \varphi$$

com α igual à projetivização da aplicações linear

$$T : H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(H)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(H))$$

que satisfaz $T(x_i) = y_i$.

Note que as seções $\sigma_0, \dots, \sigma_r \in H^0(X, \mathcal{L})$ satisfazem uma equação linear da forma

$$\sum_{i=0}^r a_i \sigma_i = 0$$

com $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{C}^{r+1} - \{0\}$ se, e somente se, a imagem de φ estão contida no hiperplano $\{a_0 x_0 + \dots + a_r x_r = 0\} \subset \mathbb{P}^r$. Quando as seções $\sigma_0, \dots, \sigma_r$ são linearmente independentes dizemos que a aplicação φ é não degenerada.

Em resumo, temos uma bijeção entre os conjuntos

- aplicações não-degeneradas $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^r$ módulo automorfismos de \mathbb{P}^r ; e
- pares (L, V) onde L é um fibrado linear holomorfo sobre X e $V \subset H^0(X, \mathcal{L})$ é um subespaço vetorial de dimensão $r+1$ e gerados por seções sem zeros comuns.

1.2. Sistemas lineares.

DEFINIÇÃO 11.1. *Um sistema linear de grau d e dimensão r em uma superfície de Riemann compacta X de é um par (L, V) onde L é um fibrado linear holomorfo sobre X e $V \subset H^0(X, \mathcal{L})$ é um subespaço vetorial de dimensão $r+1$.*

Um sistema linear de grau d e dimensão r é chamado na literatura de um g_d^r .

Um sistema linear completo é um sistema linear da forma $(L, H^0(X, \mathcal{L}))$. O sistema linear completo associado à um fibrado linear L será denotado por $|L|$. Do mesmo modo, o sistema linear completo associado ao fibrado $\mathcal{O}_X(D)$, $D \in \text{Div}(X)$, será denotado por $|D|$.

DEFINIÇÃO 11.2. *Um ponto base p de um sistema linear (L, V) é um ponto $p \in X$ onde todos os elementos de V se anulam.*

Dado um sistema linear (L, V) podemos definir aplicação em \mathbb{P}^r tomando uma base $\sigma_0, \dots, \sigma_r \in V$ e fazendo $\varphi(x) = (\sigma_0(x) : \dots : \sigma_r(x))$. Uma forma alternativa, e mais intrínseca de definir aplicação, é feita do seguinte modo. Note que para cada ponto $p \in X$ podemos considerar o subespaço $V(-p) \subset V$ formado pelas

seções que se anulam em p . Se p não é um ponto base de (L, V) temos que $V(-p)$ é um subespaço de codimensão um de V e pode ser identificado com um ponto de $\mathbb{P}(V^*)$. Podemos então definir

$$\begin{aligned} \varphi : X &\dashrightarrow \mathbb{P}(V^*) \\ x &\mapsto [V(-p)] \end{aligned}$$

onde a seta pontilhada indica que a aplicação não está definida em todos os pontos. Nesse caso os pontos problemáticos são exatamente os pontos base de (L, V) .

Na próxima proposição denotaremos por $V(D) \subset V$ o subespaço linear $\{\sigma \in V \mid \text{div}(\sigma) \geq -D\}$.

PROPOSIÇÃO 11.3. *Seja (L, V) um g_d^r sem pontos base em uma superfície de Riemann compacta X . Seja $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ a aplicação associada.*

- (1) *A aplicação φ é injetiva se, e somente se, $V(-p) \neq V(-q)$ para todo par de pontos distintos $p, q \in X$;*
- (2) *A aplicação φ é uma imersão se, e somente se, $V(-2p) \neq V(-p)$ para todo $p \in X$.*
- (3) *A aplicação φ é um mergulho se, e somente se, $V(-p - q)$ possui codimensão dois em V para todos $p, q \in X$. Note que não estamos excluindo a possibilidade de que p e q coincidam.*

COROLÁRIO 11.4. *Se L é um fibrado linear de grau maior ou igual a $2g + 1$ sobre uma superfície de Riemann compacta de gênero g então a aplicação associada ao sistema linear completo $|L|$ é um mergulho.*

COROLÁRIO 11.5. *Se X é uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$ então a aplicação associada ao sistema linear completo $|3K_X|$ é um mergulho.*

2. Superfícies de Riemann de gênero um

2.1. Mergulho de superfícies de Riemann de gênero um.

PROPOSIÇÃO 11.6. *Seja X uma superfície de Riemann de gênero um. Se L é um fibrado linear de grau 3 sobre X então $|L|$ é um sistema linear de grau 3, dimensão 2, livre de pontos base e a aplicação*

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{L})^*)$$

definida pelo sistema linear completo $|L|$ é um mergulho de X em \mathbb{P}^2 . Além disso, fixado um isomorfismo $\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{L})^) \simeq \mathbb{P}^2$ existe um polinômio homogêneo $P \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ de grau 3 tal que a imagem de φ está contida no conjunto $\{x \in \mathbb{P}^2 \mid P(x) = 0\}$.*

DEMONSTRAÇÃO. O fato que φ é um mergulho segue diretamente do Corolário 11.4. Queremos mostrar a existência do polinômio homogêneo P . Considere a aplicação linear natural

$$\mu : \text{Sym}^3 H^0(X, \mathcal{L}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes 3}).$$

Se $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ formam uma base do espaço vetorial $H^0(X, \mathcal{L})$ então podemos escrever $\varphi(x) = (\sigma_0(x) : \sigma_1(x) : \sigma_2(x))$. Por sua vez, o espaço vetorial $\text{Sym}^3 H^0(X, \mathcal{L})$ pode ser identificado com os polinômios homogêneos de grau 3 nas *variáveis* σ_0, σ_1 e σ_2 . Note que

$$\dim \text{Sym}^3 H^0(X, \mathcal{L}) = 10.$$

Por outro lado, o Teorema de Riemann-Roch nos diz que $h^0(X, \mathcal{L}^{\otimes 3}) = 9$. Logo a aplicação μ possui núcleo de dimensão ao menos um. Qualquer elemento não nulo P do núcleo de μ é tal que $P(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$ é identicamente zero. Segue que a imagem de φ está contida em $\{x \in \mathbb{P}^2 \mid P(x) = 0\}$. \square

2.2. Aplicações de grau dois em \mathbb{P}^1 . Se X é uma superfície de Riemann compacta de gênero um e $p, q \in X$ são dois pontos quaisquer (distintos ou não) então o Teorema de Riemann-Roch implica que $h^0(X, \mathcal{O}_X(p+q)) = 2$. Logo o sistema linear completo $|p+q|$ define uma aplicação holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau 2.

LEMA 11.7. *Seja X uma superfície de Riemann compacta. Se $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ é uma aplicação holomorfa de grau dois então f possui exatamente $2g(X) + 2$ valores críticos distintos.*

DEMONSTRAÇÃO. Trata-se de uma aplicação da fórmula de Riemann-Hurwitz. Como f possui grau dois, o grau local de f em um ponto crítico é exatamente igual à dois e portanto contribui com 1 na fórmula de Riemann-Hurwitz. Logo se c é o número de pontos críticos de f então

$$2g(X) - 2 = 2(2g(\mathbb{P}^1) - 2) + c.$$

Seja que f possui exatamente $c = 2g(X) + 2$ pontos críticos distintos e, também, $2g(X) + 2$ valores críticos distintos. \square

O Lemma 11.7 acima garante que f possui exatamente quatro pontos críticos distintos que denotaremos por p_1, \dots, p_4 . Seja $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)$ o fibrado linear holomorfo sobre \mathbb{P}^1 de grau 4 e denote por s uma seção holomorfa de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)$ tal que $\text{div}(s) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$. Observamos que existe aplicação natural de variedades complexas

$$\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)$$

tal que $\pi \circ \varphi = \pi$ e a restrição de φ a uma fibra $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ é a aplicação $z \mapsto z^2$.

Seja Y a pré-imagem do gráfico de s por meio da aplicação φ .

PROPOSIÇÃO 11.8. Existe um biholomorfismo $\psi : X \rightarrow Y$ fazendo o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\psi} & Y & \hookrightarrow & O_{\mathbb{P}^1}(2) \\ & \searrow f & \downarrow \pi_Y & \swarrow \pi & \\ & & \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

comutar.

DEMONSTRAÇÃO. Feita em aula. □

3. Superfícies de Riemann hiperelípticas

3.1. Definição e primeiras propriedades.

DEFINIÇÃO 11.9. Uma superfície de Riemann compacta X de gênero $g \geq 2$ é uma superfície hiperelíptica se existe aplicação holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau 2.

Dada uma superfície de Riemann hiperelíptica podemos adaptar a construção feita na Seção 2.2 para apresentá-la como subvariedade do espaço total do fibrado linear $O_{\mathbb{P}^1}(g+1)$. De fato, de acordo com o Lema 11.7 uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau 2 possui exatamente $2g+2$ valores críticos que denotaremos por p_1, \dots, p_{2g+2} . Seja

$$\varphi : O_{\mathbb{P}^1}(g+1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^1}(2g+2)$$

a aplicação holomorfa tal que $\pi \circ \varphi = \pi$ e com restrição a fibras de $O_{\mathbb{P}^1}(g+1)$ igual à aplicação $z \mapsto z^2$. Se s é seção holomorfa de $O_{\mathbb{P}^1}(g+2)$ tal que $\text{div}(s) = p_1 + \dots + p_{2g+2}$ então a pré-imagem do gráfico de s via a aplicação φ é biholomorfa à superfície de Riemann X .

TEOREMA 11.10. O conjunto das classes de isomorfismos das superfícies hiperelípticas de gênero $g \geq 2$ está em bijeção com o conjunto de $2g+2$ pontos distintos de \mathbb{P}^1 módulo automorfismos de \mathbb{P}^1 .

3.2. Diferenciais holomorfas em superfícies hiperelípticas.

PROPOSIÇÃO 11.11. Seja X uma superfície de Riemann hiperelíptica de gênero $g \geq 2$. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ aplicação holomorfa de grau 2 e $p_1, \dots, p_{2g+2} \in \mathbb{P}^1$ os valores críticos de f . Assuma que nenhum dos valores críticos é igual a ∞ . Se consideramos o mergulho de X no espaço total do fibrado $O_{\mathbb{P}^1}(2g+2)$ construído na Seção 3.1 então as restrições das 1-formas meromorfas

$$x^i \frac{dx}{y} \quad i \in \{0, \dots, g-1\}$$

ao aberto de X dado por

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = \prod_{j=0}^{2g+2} (x - p_j) \right\}$$

são restrições de 1-formas holomorfas definidas em todo X .

DEMONSTRAÇÃO. Feita em aula. □

COROLÁRIO 11.12. *Se X é uma superfície de Riemann hiperelíptica de gênero $g \geq 2$ então a aplicação associada ao sistema linear completo $|K_X|$ se fatora via aplicação holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau 2 como indica no diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{|K_X|} & \mathbb{P}^{g-1} \\ f \downarrow & \nearrow \eta & \\ \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

onde η é o mergulho

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^{g-1} \\ [x : y] &\mapsto [x^g : x^{g-1}y : x^{g-2}y^2 : \dots : xy^{g-1} : y^g]. \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO. Feita em aula. □

COROLÁRIO 11.13. *Se X é uma superfície de Riemann hiperelíptica então existe um único automorfismo $\iota : X \rightarrow X$ de ordem 2 e com $2g + 2$ pontos fixos.*

COROLÁRIO 11.14. *Seja X uma superfície de Riemann de gênero $g \geq 2$. Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ são duas aplicações holomorfas de grau 2 então existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ tal que $f = \varphi \circ g$.*

3.3. Caracterização.

TEOREMA 11.15. *Seja X uma superfície de Riemann de gênero maior ou igual à 2. O sistema linear completo $|K_X|$ define um mergulho se, e somente se, X não é hiperelíptica. Além disso, se X é hiperelíptica então a imagem da aplicação definida por $|K_X|$ é isomorfa à \mathbb{P}^1 .*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha $|K_X|$ não define um mergulho. Então, de acordo com a Proposição 11.3, existem dois pontos $p, q \in X$ tais que

$$h^0(X, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_X(-p - q)) > h^0(X, \Omega_X^1) - 2.$$

Por outro lado, o Teorema de Riemann-Roch nos diz que

$$h^0(X, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_X(-p-q)) - h^0(X, \mathcal{O}_X(p+q)) = 2g - 4 + 1 - g = g - 3.$$

Segue que

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(p+q)) = h^0(X, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_X(-p-q)) - g + 3 > 1.$$

Concluimos que $h^0(X, \mathcal{O}_X(p+q)) = 2$. Consequentemente o sistema linear completo $|p+q|$ define aplicação de X em \mathbb{P}^1 de grau 2. Segue que X é hiperelíptica.

Reciprocamente, se X é hiperelíptica então o Corolário 11.12 implica que $|K_X|$ não define um mergulho. \square

Pontos de inflexão e pontos de Weierstrass

1. Divisores associados a sistemas lineares

1.1. Divisor de pontos críticos de uma função. Seja X um superfície de Riemann compacta e (L, V) um sistema linear de dimensão um. Considere a aplicação

$$\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}(V^*)$$

definida por (L, V) . Se $\sigma_0, \sigma_1 \in V$ são seções linearmente independentes então podemos expressar φ como a aplicação $\varphi = [\sigma_0 : \sigma_1]$. Localmente, se escolhermos seção s de L que não se anula em $U \subset X$, existem funções holomorfas $f_0, f_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ tais que $\sigma_0 = f_0(x) \cdot s$ e $\sigma_1 = f_1(x) \cdot s$. A aplicação φ é então, localmente, a composição da aplicação

$$\begin{aligned} \phi : U &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ x &\mapsto (f_0(x), f_1(x)), \end{aligned}$$

com projeção

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ (z, w) &\mapsto [z : w]. \end{aligned}$$

Para calcular os pontos críticos de φ , assumindo que o sistema linear (L, V) não possui pontos base em U , somos levados a considerar os pontos $x \in U$ tais que a imagem da derivada $D\phi(x)$ está contida no núcleo de $D\pi(\phi(x))$. Como π nada mais é que a projeção radial, vemos que $\ker D\pi(\phi(x)) \subset \mathbb{C}^2$ é o espaço gerado por $\phi(x)$. Assim $x \in U$ é um ponto crítico de φ se, e somente se, $\phi(x)$ e $D\phi(x) \cdot v_x$ são colineares para qualquer vetor tangente $v_x \in T_{X,x}$. Segue que a colinearidade de $\phi(x)$ e da imagem de $D\phi(x)$ é equivalente ao anulamento do determinante

$$\det \begin{pmatrix} f_0(x) & f_1(x) \\ v(f_0)(x) & v(f_1)(x) \end{pmatrix},$$

onde $v \in T_X(U)$ é um campo de vetores que não se anula em x . Note que se $f_0 = ag_0$, $f_1 = ag_1$ e $v = bw$ então

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ v(f_0) & v(f_1) \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} ug_0 & ug_1 \\ bw(ug_0) & bw(ug_1) \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} ug_0 & ug_1 \\ buw(g_0) + bw(u)g_0 & buw(g_1) + bw(u)g_1 \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} ug_0 & ug_1 \\ buw(g_0) & buw(g_1) \end{pmatrix} \\ &= b \cdot u^2 \cdot \det \begin{pmatrix} g_0 & g_1 \\ w(g_0) & w(g_1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se $\mathcal{U} = \{U_i\}$ é uma cobertura de X , $s_i : U_i \rightarrow L$ é uma coleção de seções locais de L que nunca se anulam satisfazendo $s_i = g_{ij}s_j$; $f_{0,i}, f_{1,i} : U_i \rightarrow \mathbb{C}^2$ é uma coleção de funções tais que $\sigma_0 = f_{0,i} \cdot s_i$ e $\sigma_1 = f_{1,i} \cdot s_i$; e $v_i \in T_X(U_i)$ é uma coleção de campos de vetores holomorfos que nunca se anulam satisfazendo $v_i = h_{ij}v_j$ então a coleção de funções

$$\delta_i = \det \begin{pmatrix} f_{0,i} & f_{1,i} \\ v_i(f_{0,i}) & v_i(f_{1,i}) \end{pmatrix}$$

satisfaz $\delta_i = h_{ij} \cdot g_{ij}^2 \delta_j$. Logo a coleção $\{\delta_i\}$ define uma seção do fibrado linear $\Omega_X^1 \otimes L^{\otimes 2}$.

Note uma escolha distinta de base $\tilde{\sigma}_0 = T\sigma_0, \tilde{\sigma}_1 = T\sigma_1$ para V , com $T \in GL(V)$, nos fornece uma coleção de funções $\tilde{\delta}_i$ que se relaciona com a coleção δ_i através da identidade

$$\tilde{\delta}_i = \det(T) \cdot \delta_i.$$

Em particular, o divisor definido pela coleção δ_i independe da escolha de base para V .

PROPOSIÇÃO 12.1. *Seja (L, V) um sistema linear de dimensão 1 livre de pontos base e considere a aplicação $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ definida pelo mesmo. Então o divisor definido pela coleção de funções δ_i construído acima é igual à*

$$\sum_{p \in X} (\text{grau}_p(\varphi) - 1) \cdot p \in \text{Div}(X).$$

Consequentemente, o número de pontos críticos de φ (contados com multiplicidade) é igual à $2 \text{grau}(L) + 2g - 2$.

1.2. Wronskianos. A construção apresentada na Seção 1.1 adquire contornos familiares no caso particular em que X é um aberto de \mathbb{C} , $\nu = \frac{\partial}{\partial x}$ e $L = \mathcal{O}_X$. Nesse caso, estamos considerando o determinante

$$\det \begin{pmatrix} f_0(x) & f_1(x) \\ f_0'(x) & f_1'(x) \end{pmatrix}.$$

Se no lugar de duas funções holomorfas $f_0, f_1 : X \rightarrow \mathbb{C}$ considerarmos $r + 1$ funções f_0, \dots, f_r funções então é natural considerar o determinante Wronskiano

$$W(f_0, \dots, f_r) = \det \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_r \\ f_0' & f_1' & \cdots & f_r' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(r)} & f_1^{(r)} & \cdots & f_r^{(r)} \end{pmatrix}.$$

Se u é uma função não identicamente nula então

$$W(uf_0, \dots, uf_r) = u^{r+1} W(f_0, \dots, f_r).$$

Em particular,

$$W(f_0, f_1) = f_0^2 W\left(1, \frac{f_1}{f_0}\right) = f_0^2 \cdot \left(\frac{f_1}{f_0}\right)',$$

o que confirma o fato de que o divisor construído na Seção 1.1 descreve os pontos críticos de φ .

O anulamento do Wronskiano $W(f_0, \dots, f_r)$ corresponde aos pontos $x \in X$ em que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow \mathbb{P}^r \\ x &\longmapsto (f_0(x) : \dots : f_r(x)) \end{aligned}$$

possui pontos de inflexão, i.e., pontos em que as r primeiras derivadas de uma expressão local φ com valores em \mathbb{C}^r são linearmente dependentes. De forma equivalente, um ponto x pertence ao conjunto de zeros de $W(f_0, \dots, f_r)$ se, e somente se, existe um hiperplano H em \mathbb{P}^r tal que $\varphi(x) \in H$ e $\text{grau}_x(\varphi^*H) > r$.

PROPOSIÇÃO 12.2. *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo e sejam $f_0, \dots, f_r \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ funções holomorfas em U . O determinante Wronskiano $W(f_0, \dots, f_r)$ é identicamente zero se, e somente se, as funções f_0, \dots, f_r são \mathbb{C} -linearmente dependentes.*

DEMONSTRAÇÃO. Veja, por exemplo [BD10]. □

1.3. Divisor de inflexão de um sistema linear. Seja (L, V) um sistema linear de dimensão r . Se $\sigma_0, \dots, \sigma_r \in V$ é uma base então, de forma análoga à Seção 1.1, podemos considerar o Wronskiano $W(\sigma_0, \dots, \sigma_r)$ das seções $\sigma_0, \dots, \sigma_r$ como uma seção do fibrado linear

$$(\Omega_X^1)^{\otimes \frac{r(r+1)}{2}} \otimes L^{\otimes r+1},$$

que não é identicamente zero graças à Proposição 12.2.

DEFINIÇÃO 12.3. Se (L, V) é um sistema linear de dimensão r então o divisor de inflexão de (L, V) é o divisor definido pelo anulamento do determinante Wronskiano de qualquer base $\sigma_0, \dots, \sigma_r$ do espaço vetorial V .

Uma consequência notável desta construção é que para toda superfície de Riemann X de gênero maior ou igual à 2, existe um divisor canonicamente associado à X : o divisor de inflexão do sistema linear completo $|K_X|$.

2. Semigrupos de valores e pontos de Weierstrass

2.1. Semigrupo de valores. Seja $p \in X$ um ponto de uma superfície de Riemann compacta X . Considere o conjunto \mathcal{C}_p das funções meromorfas de X com divisor de pólos suportado em p . Considere o subconjunto $\Gamma_p \subset \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dado por

$$\{\text{grau}_p(f)\}_{f \in \mathcal{C}_p}.$$

Em outras palavras, Γ_p é o conjunto das ordens dos pólos em p de funções $f \in \mathcal{C}_p$.

Note que se a e b pertencem ao conjunto Γ_p então $a + b$ também pertence ao conjunto Γ_p . Ou seja, Γ_p é um semigrupo chamado de semigrupo de valores de X em p .

PROPOSIÇÃO 12.4. Seja X uma superfície de Riemann compacta de gênero g . Se $p \in X$ então o semigrupo de valores de X em p possui as seguintes propriedades.

(1) Um número natural k pertence à Γ_p se, e somente se,

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(kp)) = h^0(X, \mathcal{O}_X((k-1)p)) + 1.$$

(2) Se $g \geq 2$ e $k \geq 2g$ então $k \in \Gamma_p$.

(3) O complemento $\mathbb{N} - \Gamma_p$ tem cardinalidade igual à g . Este complement é chamado do conjunto de lacunas de Γ_p .

DEMONSTRAÇÃO. Seja $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(p))$ um seção holomorfa com $\text{div}(s) = p$. Considere a sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X((k-1)p) \rightarrow \mathcal{O}_X(kp) \rightarrow \mathbb{C}(p) \rightarrow 0$$

onde o morfismo $\mathcal{O}_X((k-1)p) \rightarrow \mathcal{O}_X(kp)$ é dado por multiplicação por s .

Observe que $k \in \Gamma_p$ se, e somente se, existe uma seção $\sigma \in H^0(X, \mathcal{O}_X(kp))$ tal que $\sigma(p) \neq 0$. De fato, se f é uma função holomorfa com pólo em p de ordem k e nenhum outro pólo então $f \cdot s^p$ é uma seção holomorfa de $\mathcal{O}_X(kp)$ que não se anula em p . Reciprocamente, se σ é uma seção holomorfa de $\mathcal{O}_X(kp)$ que não se anula em p então $\frac{\sigma}{s^k}$ é uma função meromorfa com pólo de ordem k em p e nenhum outro pólo.

Para provar o Item (1) considere a sequência longa em cohomologia associada à sequência exata curta acima, e observe que a sobrejetividade da aplicação linear

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(kp)) \rightarrow \mathbb{C}(p)$$

é equivalente à $h^0(X, \mathcal{O}_X(kp)) = h^0(X, \mathcal{O}_X((k-1)p)) + 1$.

O Item (2) é consequência direta do Teorema de Riemann-Roch. De fato, se $k \geq 2g$ então

$$\text{grau}(\Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_X((-k)p)) < \text{grau}(\Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_X((1-k)p)) = 2g - 2 - (k-1) \leq -1$$

e portanto o Teorema de Riemann-Roch implica que

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(kp)) = h^0(X, \mathcal{O}_X((k-1)p)) + 1.$$

Finalmente para provar o Item (3) observe que o Item (1) garante que $k \in \mathbb{N} - \Gamma_p$ se, e somente se $h^0(X, \mathcal{O}_X(kp)) - h^0(X, \mathcal{O}_X((k-1)p)) = 0$. Podemos portanto escrever

$$\begin{aligned} \#(\mathbb{N} - \Gamma_p) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - (h^0(X, \mathcal{O}_X(kp)) - h^0(X, \mathcal{O}_X((k-1)p))) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k - (h^0(X, \mathcal{O}_X(kp)) - h^0(X, \mathcal{O}_X)). \end{aligned}$$

Aplicando Riemann-Roch deduzimos que $\#(\mathbb{N} - \Gamma_p) = g$. □

PROPOSIÇÃO 12.5. *Seja X uma superfície de Riemann de gênero $g \geq 1$ e seja $p \in X$ um ponto qualquer. Se $1 = n_1 < n_2 < \dots < n_g$ são os elementos do conjunto de lacunas Γ_p então*

$$\sum_{i=1}^g n_i - i \leq \frac{g(g-1)}{2}.$$

A soma acima é chamada de peso do ponto p .

DEMONSTRAÇÃO. A ser incluída. □

COROLÁRIO 12.6. *Uma superfície de Riemann X de gênero $g \geq 2$ é hiperelíptica se, e somente se, X possui um ponto de Weierstrass de peso $g(g-1)/2$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja X uma superfície de Riemann hiperelíptica e seja $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ aplicação holomorfa de grau 2. Assuma que ∞ é um valor crítico de f e seja $p = f^{-1}(\infty)$ o ponto crítico correspondente. O conjunto de lacunas em p é igual à $\{1, 3, \dots, 2g - 1\}$. Logo o peso de p é $g(g - 1)/2$.

O peso de um ponto de Weierstrass é maximizado quando o conjunto de lacunas é igual à $\{1, 3, \dots, 2g - 1\}$. Como 2 é uma não lacuna, temos que existe aplicação de grau 2 em \mathbb{P}^1 segue que X é hiperelíptica quando o peso de um ponto de Weierstrass é igual à $g(g - 1)/2$. \square

3. Pontos de Weierstrass

3.1. O divisor de Weierstrass.

DEFINIÇÃO 12.7. *Seja X uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$. O divisor de Weierstrass de X é o divisor de inflexão do sistema linear completo $|K_X|$. Denotaremos o divisor de Weierstrass de uma superfície de Riemann X por W_X . Os pontos de Weierstrass de X são os pontos do suporte de W_X .*

3.2. Relação com o semigrupo de valores.

PROPOSIÇÃO 12.8. *Seja X uma superfície de Riemann de gênero $g \geq 2$. Se $p \in X$ é um ponto qualquer então*

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(np)) - h^0(X, \mathcal{O}_X((n-1)p)) = h^0(X, \Omega_X^1(-np)) - h^0(X, \Omega_X^1(-(n-1)p)) + 1.$$

Consequentemente, $n \notin \Gamma_p$ se, e somente se, existe $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1)$ que possui um zero em p de multiplicidade exatamente igual à $n - 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Consequência imediata do Teorema de Riemann-Roch. \square

3.3. Número de pontos de Weierstrass.

LEMA 12.9. *Seja X uma superfície de Riemann de gênero $g \geq 2$. A multiplicidade de um ponto $p \in X$ no divisor de Weierstrass é igual à*

$$\sum_{i=1}^g n_i - i$$

onde $n_1 < \dots < n_g$ são os elementos do conjunto de lacunas de Γ_p .

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. \square

PROPOSIÇÃO 12.10. *Se X é uma superfície de Riemann de gênero $g \geq 2$ então X possui, no mínimo, $2(g + 1)$ pontos de Weierstrass distintos. Além disso, se X não é hiperelíptica então X possui ao menos $2g + 3$ pontos de Weierstrass distintos.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que o divisor de Weierstrass de X possui grau $(g-1)g(g+1)$ e que cada ponto no suporte de W_X aparece com multiplicidade menor ou igual à $g(g-1)/2$ de acordo com o Lema 12.9 combinado com a Proposição 12.5.

Se X não é hiperelíptica então o Corolário 12.6 garante que a multiplicidade de cada ponto de Weierstrass é estritamente menor do que $g(g-1)/2$. Logo podemos deduzir que temos pelo menos $2g+3$ pontos de Weierstrass distintos. \square

4. Automorfismos de superfícies de Riemann

4.1. Pontos fixos.

LEMA 12.11. *Seja X uma superfície de Riemann hiperelíptica. Se $\varphi \in \text{Aut}(X)$ é distinto da identidade e possui ao menos 5 pontos fixos então φ é a involução hiperelíptica de X .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ aplicação holomorfa de grau 2. A composta $f \circ \varphi$ também é holomorfa de grau 2. O Corolário 11.14 garante a existência de $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ tal que $f \circ \varphi = \psi \circ f$. Note que os pontos fixos de φ são enviados em pontos fixos de ψ . Como φ possui ao menos 5 pontos fixos, temos que ψ possui ao menos 3 pontos fixos. Deduzimos que ψ é a identidade já que automorfismos não triviais de \mathbb{P}^1 possuem no máximo 2 pontos fixos. Segue que $f \circ \varphi = f$ como queríamos demonstrar. \square

LEMA 12.12. *Se X é uma superfície de Riemann de gênero $g \geq 2$ e $\varphi \in \text{Aut}(X)$ é um automorfismo diferente da identidade então φ possui no máximo $2g+2$ pontos fixos.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $p \in X$ um ponto tal que $\varphi(p) \neq p$. A Proposição 10.13 garante a existência de uma função meromorfa f não constante tal que $(f)_\infty = g+1$. Segue $g = f - f \circ \varphi$ possui divisor de pólos de grau $2g+2$. Como os pontos fixos de φ estão contidos nos zeros de g , segue que temos no máximo $2g+2$ pontos fixos. \square

4.2. Finitude.

TEOREMA 12.13 (Scharwz). *Se X é uma superfície de Riemann de gênero $g \geq 2$ então o grupo de automorfismo de X é finito.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja k igual à cardinalidade do suporte de W_X . Em outras palavras, k é o número de pontos de Weierstrass de X . Como qualquer automorfismo de X preserva o suporte de W_X temos que $\text{Aut}(X)$ age no conjunto $|W_X|$. Logo temos um morfismo de grupos

$$\psi : \text{Aut}(X) \longrightarrow S_k,$$

onde S_k denota o grupo de permutações de k elementos.

Para mostrar o Teorema é suficiente mostrar que ψ possui núcleo finito. Se X é hiperelíptica então o Lema 12.11 o núcleo de ψ é igual ao grupo gerado pela involução hiperelíptica. Se X não é hiperelíptica então a Proposição 12.10 garante que o número de pontos de Weierstrass é estritamente maior do que $2g + 2$ e podemos aplicar o Lema 12.12 para garantir que o morfismo ψ é injetivo. \square

TEOREMA 12.14 (Hurwitz). *O grupo de automorfismos de uma superfície de gênero g tem cardinalidade menor ou igual à $84(g - 1)$.*

4.3. Superfície de Bolza. A superfície de Bolza é a superfície de Riemann X de gênero 2 com aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau 2 que ramifica sobre $0, 1, -1, i, -i, \infty$. Ela é uma compactificação da superfície afim dada por

$$y^2 = x^5 - x.$$

O grupo de automorfismos da superfície de Bolza tem ordem 48. A superfície de Bolza é a superfície de Riemann de gênero 2 com maior grupo de automorfismos.

4.4. Quártica de Klein. A quártica de Klein é a superfície de Riemann X de gênero 3 que possui maior grupo de automorfismo. A cardinalidade de $\text{Aut}(X)$ é 168 e atinge a cota fornecida pelo Teorema de Hurwitz. O mergulho canônico da quártica de Klein é isomorfo à superfície de Riemann contida em \mathbb{P}^2 definida pela equação homogênea

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

Parte 3

Diferenciais holomorfas e o Teorema de Abel-Jacobi

Períodos de formas diferenciais

1. Representação poligonal de uma superfície de Riemann compacta

Como vimos no Capítulo 4, toda superfície de compacta e orientável de gênero $g \geq 1$ admite uma representação poligonal como indicado na Figura 13.1.

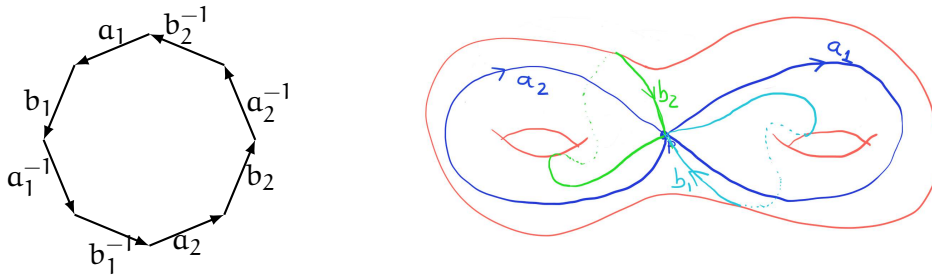


FIGURA 13.1. Representação poligonal de superfície compacta orientável de gênero 2 e a imagem do bordo de P via a aplicação φ .

Mais concretamente, se P é a região poligonal fechada representada no lado esquerdo da Figura 13.1 então existe uma aplicação diferenciável sobrejetiva $\varphi : P \rightarrow X$ que preserva orientação tal que

- (1) o interior de P é enviado injetivamente em um aberto de X ;
- (2) todos os vértices de P são enviados em um mesmo ponto $p \in X$;
- (3) cada segmento no bordo de P é enviado um caminho fechado e, além disso, o interior de cada segmento é enviado ao caminho imagem de forma injetiva;
- (4) os segmentos marcados com a_i e a_i^{-1} são enviados em um mesmo caminho, mas com orientações diferentes. O mesmo vale para caminhos marcados com b_i e b_i^{-1} .

Representamos esquematicamente a imagem do bordo de P no lado direito da Figura 13.1.

Denotaremos a classe de homotopia da imagem dos segmentos a_i e b_i em X por $[a_i]$ e $[b_i]$.

Os caminhos fechados $[a_1], \dots, [a_g], [b_1], \dots, [b_g]$ contidos em X formam uma base para o primeiro grupo de homologia $H_1(X, \mathbb{Z})$ da superfície X .

2. Integração do produto de 1-formas fechadas

PROPOSIÇÃO 13.1. *Seja X uma superfície compacta e orientável de gênero $g \geq 1$. Sejam α e β duas 1-formas fechadas em X . Para i entre 1 e g , defina*

$$u_i = \int_{[a_i]} \alpha, \quad u_{g+i} = \int_{[b_i]} \alpha$$

e

$$v_i = \int_{[a_i]} \beta, \quad v_{g+i} = \int_{[b_i]} \beta,$$

onde $[a_1], \dots, [a_g], [b_1], \dots, [b_g]$ são caminhos fechados como na Seção 1. Então

$$\int_X \alpha \wedge \beta = \sum_{i=1}^g u_i \cdot v_{g+i} - u_{g+i} v_i.$$

DEMONSTRAÇÃO. Para calcular a integral em questão, notamos primeiramente que

$$\int_X \alpha \wedge \beta = \int_P \varphi^* \alpha \wedge \varphi^* \beta$$

onde $\varphi: \bar{P} \rightarrow X$ é como na Seção 1.

Como o \bar{P} é simplesmente conexo e $\varphi^* \alpha$ é uma 1-forma fechada, podemos definir

$$F: \bar{P} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto \int_{x_0}^x \varphi^* \alpha,$$

onde x_0 é um ponto qualquer do interior de P .

Podemos então aplicar o Teorema de Stokes para garantir que

$$\int_P \varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \int_{\partial P} F \cdot \varphi^* \beta.$$

Podemos expandir a integral no lado direito da expressão acima como

$$\sum_{i=1}^g \int_{a_i} F \cdot \varphi^* \beta + \int_{a_i^{-1}} F \cdot \varphi^* \beta + \int_{b_i} F \cdot \varphi^* \beta + \int_{b_i^{-1}} F \cdot \varphi^* \beta.$$

Para cada ponto x no interior do segmento a_i , temos um ponto \tilde{x} no interior do segmento a_i^{-1} que é mapeado por φ no mesmo ponto de X . Note que o segmento contido em P e ligando x à \tilde{x} é enviado por φ em um caminho homotópico ao

caminho b_i . Se observamos que os segmentos a_i e a_i^{-1} são ambos enviados no mesmo caminho a_i com orientações opostas, vemos que podemos escrever

$$\int_{a_i} F\varphi^*\beta + \int_{a_i^{-1}} F\cdot\varphi^*\beta = \int_{a_i} \left(\int_{b_i} \alpha \right) \beta = \left(\int_{b_i} \alpha \right) \cdot \left(\int_{a_i} \beta \right).$$

Aplicando o mesmo raciocínio aos segmentos b_i , e observando que o segmento ligando pontos de b_i associados à pontos de b_i^{-1} é enviado por φ em caminho fechado homotópico a a_i^{-1} , vemos que

$$\int_{b_i} F\varphi^*\beta + \int_{b_i^{-1}} F\cdot\varphi^*\beta = - \int_{b_i} \left(\int_{a_i} \alpha \right) \beta = - \left(\int_{a_i} \alpha \right) \cdot \left(\int_{b_i} \beta \right).$$

□

3. Relações bilineares de Riemann

Os caminhos $[a_1], \dots, [a_g], [b_1], \dots, [b_g]$ de uma superfície compacta orientável de gênero g formam uma base do primeiro grupo de homologia de X com a propriedade que

$$[a_i] \cdot [a_j] = [b_i] \cdot [b_j] = 0 \quad \text{e} \quad [a_i] \cdot [b_j] = -[b_j] \cdot [a_i] = \delta_{ij}.$$

Bases de $H_1(X, \mathbb{Z})$ com essa propriedade são chamadas de bases simpléticas.

Assuma agora que X é uma superfície de Riemann compacta de gênero g e seja $\omega_1, \dots, \omega_g$ uma base do espaço vetorial $H^0(X, \Omega_X^1)$. Se fixamos também uma base simplética de $H_1(X, \mathbb{Z})$ então a matriz de períodos de X (com respeito as bases de $H^0(X, \Omega_X^1)$ de $H_1(X, \mathbb{Z})$ escolhidas) é a matriz $g \times 2g$ cuja j -ésima linha é

$$\left(\int_{[a_1]} \omega_j, \dots, \int_{[a_g]} \omega_j, \int_{[b_1]} \omega_j, \dots, \int_{[b_g]} \omega_j \right).$$

TEOREMA 13.2 (Relações bilineares de Riemann). *Se J é a matriz $(2g) \times (2g)$ dada por*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix}$$

então $P \cdot J \cdot P^T = 0$ e a parte imaginária da matriz $P \cdot J \cdot \bar{P}^T$ é negativa definida.

DEMONSTRAÇÃO. Se $\omega = \sum_{i=1}^g \lambda_i \omega_i$ é uma 1-forma holomorfa em X então

$$\left(\int_{[a_1]} \omega, \dots, \int_{[a_g]} \omega, \int_{[b_1]} \omega, \dots, \int_{[b_g]} \omega \right) = P^T \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_g).$$

Segue da Proposição 13.1 que

$$0 = \int_X \omega \wedge \omega = (\lambda_1, \dots, \lambda_j) \cdot P \cdot J \cdot P^T \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_g).$$

De forma análoga, temos que

$$\int_X \omega \wedge \bar{\omega} = (\lambda_1, \dots, \lambda_j) \cdot P \cdot J \cdot \overline{P^T} \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_g).$$

Se $\omega \neq 0$ então $\int_X \omega \wedge \bar{\omega}$ possui parte imaginária estritamente negativa. Concluímos que a parte imaginária de $P \cdot J \cdot \bar{P}^T$ é negativa definida. \square

COROLÁRIO 13.3. *Existe uma base de 1-formas holomorfas $\omega_1, \dots, \omega_g$ tal que*

$$\int_{[a_i]} \omega_j = \delta_{ij}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Considere a aplicação linear

$$\begin{aligned} \psi : H^0(X, \Omega_X^1) &\longrightarrow \mathbb{C}^g \\ \omega &\mapsto \left(\int_{[a_1]} \omega, \dots, \int_{[a_g]} \omega \right). \end{aligned}$$

Para mostrar o resultado, basta verificar que ψ é invertível. Como tanto o domínio como o contra-domínio possuem dimensão g , reduzimos o problema a verificar a injetividade de ψ .

Se ω é tal que $\psi(\omega) = 0$ então

$$\int_X \omega \wedge \bar{\omega} = \sum_{i=1}^g u_i \cdot \overline{u_{g+i}} - u_{g+i} \overline{u_i} = 0,$$

pois $(u_1, \dots, u_g) = \psi(\omega)$. Segue que $\omega = 0$ como queríamos. \square

COROLÁRIO 13.4. *As $2g$ colunas da matriz de períodos definem um subgrupo discreto Λ de \mathbb{C}^g isomorfo à \mathbb{Z}^{2g} .*

DEMONSTRAÇÃO. Basta verificar que as colunas da matriz de períodos são \mathbb{R} -linearmente independentes.

A matriz de períodos na base dada pelo Corolário 13.3 é da forma (Id, B) onde B é uma matriz $g \times g$. A relação $P \cdot J \cdot P^T$ implica que B é simétrica e o fato de que a parte imaginária de $P \cdot J \cdot P^T$ é positiva definida implica que a parte imaginária de B é negativa definida. Segue que as colunas da matriz (Id, B) são \mathbb{R} -linearmente independentes. \square

4. A Jacobiana de uma superfície de Riemann

Fixada uma base para $H^0(X, \Omega_X^1)$ e uma base simplética para $H_1(X, \mathbb{Z})$, a Jacobiana de uma superfície de Riemann compacta X é o toro complexo definido pelo quociente

$$\frac{\mathbb{C}^g}{\Lambda}$$

onde $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ é o subgrupo gerado pelas colunas da matriz de períodos de X .

A Jacobiana de X vem munida de um homomorfismo de grupos

$$AJ : \text{Div}_0(X) \longrightarrow \text{Jac}(X)$$

que envia um divisor $p - q \in \text{Div}_0(X)$ em

$$\left(\int_q^p \omega_1, \dots, \int_q^p \omega_g \right).$$

Observação: é necessário um argumento para mostrar que a aplicação AJ está bem definida. O argumento foi apresentado no final da aula.

De forma mais intrínseca, a Jacobiana de X é o quociente de $H^0(X, \Omega_X^1)^*$ pelo subgrupo gerado pela imagem de

$$\begin{aligned} H_1(X, \mathbb{Z}) &\longrightarrow H^0(X, \Omega_X^1)^* \\ \gamma &\mapsto \left(\omega \mapsto \int_\gamma \omega \right). \end{aligned}$$

CAPÍTULO 14

O Teorema de Abel-Jacobi

1. Lei de reciprocidade

PROPOSIÇÃO 14.1. *Seja X uma superfície compacta e orientável de gênero $g \geq 1$. Seja α uma 1-forma holomorfa e η uma 1-forma logarítmica em X . Considere caminhos fechados $[a_1], \dots, [a_g], [b_1], \dots, [b_g]$ como na Seção 1 do Capítulo 13 e assumamos que os pólos de η não estão na união destes caminhos. Se para i entre 1 e g , fazemos*

$$u_i = \int_{[a_i]} \alpha, \quad u_{g+i} = \int_{[b_i]} \alpha$$

e

$$v_i = \int_{[a_i]} \eta, \quad v_{g+i} = \int_{[b_i]} \eta,$$

então

$$2\pi i \sum_{z \in X} \text{Res}_z(\eta) \cdot \int_{z_0}^z \alpha = \sum_{i=1}^g u_i \cdot v_{g+i} - u_{g+i} v_i$$

onde $z_0 \in X$ é um ponto arbitrário.

DEMONSTRAÇÃO. A prova deste resultado é uma pequena variação na prova da Proposição 13.1. Se tomamos $\varphi : \bar{P} \rightarrow X$ é como na Seção 1 e definimos

$$\begin{aligned} F : \bar{P} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_{x_0}^x \varphi^* \alpha, \end{aligned}$$

onde $x_0 \in P$ é tal que $\varphi(x_0) = z_0$.

Podemos então aplicar a fórmula dos resíduos para garantir que

$$\int_{\partial P} F \cdot \varphi^* \beta = 2\pi i \sum_{x \in P} \text{Res}_x(\varphi^* \eta) \cdot \int_{x_0}^x \varphi^* \alpha = 2\pi i \sum_{z \in X} \text{Res}_z(\eta) \cdot \int_{z_0}^z \alpha.$$

Argumentando como na prova da Proposição 13.1, vemos que o lado esquerdo é igual a

$$\sum_{i=1}^g u_i \cdot v_{g+i} - u_{g+i} v_i,$$

garantindo assim a validade da proposição. \square

2. Existência de formas logarítmicas com resíduos prescritos

PROPOSIÇÃO 14.2. *Se $R \in \text{Div}_0(X) \otimes \mathbb{C}$ é um \mathbb{C} -divisor de grau zero então existe uma 1-forma logarítmica η em X tal que*

$$\text{Res}(\eta) = R.$$

Além disso, é possível escolher η tal que

$$\int_{[c_i]} \eta = 0$$

para todo i entre 1 e g , onde $[c_1], \dots, [c_g]$ são g elementos arbitrários \mathbb{Z} -linearmente independentes de $H_1(X, \mathbb{Z})$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $D = p_1 + \dots + p_k = (\eta)_\infty \in \text{Div}(X)$ o divisor reduzido (i.e. todos os coeficientes iguais à 1) com suporte igual a R . Considere a aplicação

$$\rho : H^0(X, \Omega_X^1(D)) \longrightarrow \mathbb{C}^k \eta \quad \mapsto (\text{Res}_{p_1} \eta, \dots, \text{Res}_{p_k} \eta).$$

O núcleo de ρ é igual à $H^0(X, \Omega_X^1)$ e a imagem de ρ está contida no hiperplano $\{z_1 + \dots + z_k = 0\}$ graças ao Teorema dos resíduos.

O Teorema de Riemann-Roch implica que

$$h^0(X, \Omega_X^1(D)) = h^0(X, \mathcal{O}_X(-D)) + 2g - 2 + \text{grau}(D) + 1 - g = \dim \ker \rho + k - 1,$$

e portanto garante que a imagem de ρ tem dimensão igual a $k - 1$. Segue que para qualquer $R \in \text{Div}_0(X) \otimes \mathbb{C}$ com suporte igual à D , existe η tal que $\text{Res}(\eta) = R$. \square

3. Teorema de Abel

TEOREMA 14.3. *Seja X uma superfície de Riemann compacta. O núcleo da aplicação de Abel-Jacobi $AJ : \text{Div}_0(X) \rightarrow \text{Jac}(X)$ é igual a $P\text{Div}(X)$, o grupo dos divisores principais.*

DEMONSTRAÇÃO. Utilizaremos uma representação poligonal de X como na Seção 1

Seja $R = p_1 + \dots + p_k - q_1 - \dots - q_k \in \text{Div}_0(X)$. A Proposição 14.2 garante a existência de uma 1-forma logarítmica η tal que $\text{Res}(\eta) = R$. Além disso, escolher η tal que

$$\int_{[a_i]} \eta = 0$$

para i entre 1 e g . Com esta normalização, a Proposição 14.1 (lei de reciprocidade) nos diz que

$$\sum_{i=1}^k \int_{q_i}^{p_i} \alpha = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^g \int_{[a_i]} \alpha \cdots \int_{[b_i]} \eta$$

para qualquer 1-forma $\alpha \in H^0(X, \Omega_X^1)$.

Se $\omega_1, \dots, \omega_g$ é uma base de $H^0(X, \Omega_X^1)$ tal que $\int_{[a_i]} \omega_j = \delta_{ij}$ então

$$\left(\sum_{i=1}^k \int_{q_i}^{p_i} \omega_1, \dots, \sum_{i=1}^k \int_{q_i}^{p_i} \omega_g \right) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{[b_1]} \eta, \dots, \int_{[b_g]} \eta \right).$$

Concluimos que $AJ(R) = 0$ se, e somente se, $\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{[b_1]} \eta, \dots, \int_{[b_g]} \eta \right)$ pertence à $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ o subgrupo gerado pela matriz de períodos de X com respeito à $[a_1], \dots, [a_g], [b_1], \dots, [b_g]$ e $\omega_1, \dots, \omega_g$.

Suponha $R \in \text{PDiv}(X)$, i.e. existe uma função racional f tal que $R = (f)_0 - (f)_\infty$. A 1-forma logarítmica df/f é tal que $\text{Res}(df/f) = R$. Se fizermos

$$\eta = \frac{df}{f} - \sum_{i=1}^g \left(\int_{[a_i]} \frac{df}{f} \right) \omega_i$$

vemos que $AJ((f)_0 - (f)_\infty) = 0$. Isto mostra que $\text{PDiv}(X)$ está contido no núcleo de AJ .

Reciprocamente, se $R \in \text{Div}_0(X)$ é tal que $AJ(R) = 0$ e tomamos η logarítmica tal que $\text{Res}(\eta) = R$ e $\int_{[a_i]} \eta = 0$ então existem inteiros n_i e m_i

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{[b_1]} \eta, \dots, \int_{[b_g]} \eta \right) = \sum_{i=1}^g n_i \left(\int_{[a_i]} \omega_1, \dots, \int_{[a_i]} \omega_g \right) + \sum_{i=1}^g m_i \left(\int_{[b_i]} \omega_1, \dots, \int_{[b_i]} \omega_g \right)$$

Segue que a 1-forma $\tilde{\eta} = \eta - 2\pi i \sum_{i=1}^g m_i \omega_i$ é tal que $\int_\gamma \tilde{\eta} \in 2\pi i \mathbb{Z}$ para todo caminho fechado γ que evita os pólos de $\tilde{\eta}$. Podemos portanto definir uma função $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ via a fórmula $f = \exp(\tilde{\eta})$. Esta função é meromorfa e satisfaz $(f)_0 - (f)_\infty = R$. Segue portanto que o núcleo de AJ contém $\text{PDiv}(X)$. \square

4. Teorema de Jacobi

TEOREMA 14.4. *Seja X uma superfície de Riemann compacta. A aplicação de Abel-Jacobi $AJ : \text{Div}_0(X) \rightarrow \text{Jac}(X)$ é sobrejetiva.*

DEMONSTRAÇÃO. A aplicação AJ é um morfismo de grupos. Para mostrar a sobrejetividade basta mostrar que a imagem contém uma vizinhança de $0 \in \text{Jac}(X)$.

Para tanto escolha g pontos de $x_1, \dots, x_g \in X$ e tome vizinhanças U_1, \dots, U_g deles. Temos uma aplicação

$$\varphi : U_1 \times \cdots \times U_g \longrightarrow \text{Jac}(X)(y_1, \dots, y_g) \quad \mapsto \left(\int_{x_1}^{y_1} \omega_1, \dots, \int_{x_g}^{y_g} \omega_g \right)$$

onde $\omega_1, \dots, \omega_g$ é uma base de $H^0(X, \Omega_X^1)$.

Se escrevermos ω_k no aberto U_i como $\omega_k = f_{ik}(z_i)dz_i$ com $z_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ uma coordenada local satisfazendo $z_i(x_i) = 0$ então o determinante Jacobiano de φ é igual à $\det(f_{ik}(0))$.

Mostraremos o teorema escolhendo os pontos x_1, \dots, x_g e escolhendo uma base $\omega_1, \dots, \omega_g$ de forma conveniente. Para isso, escolha x_1 tal que ω_1 não se anula em x_1 . Se existe $\omega_2 \in H^0(X, \Omega_X^1) - \{0\}$ tal que ω_2 se anula em x_1 então tomamos esta ω_2 como segundo elemento da base e escolhemos x_2 tal que ω_2 não se anula em x_2 . Se não existe tal ω_2 então $h^0(X, \Omega_X^1(-x_1)) = 0$ e temos que $g(X) = 1$. Podemos construir assim indutivamente uma base $\omega_1, \dots, \omega_g$ de $H^0(X, \Omega_X^1)$ e escolher pontos x_1, \dots, x_g tal que ω_k se anula em x_j para todo $j < k$ e ω_k não se anula em x_k . Para esta escolha de base/pontos a aplicação φ tem determinante jacobiano não nulo no ponto (x_1, \dots, x_g) . Como a dimensão de $\text{Jac}(X)$ é igual a g , segue que a imagem de φ contém uma vizinhança aberta de $0 \in \text{Jac}(X)$ como queríamos demonstrar. \square

Referências Bibliográficas

- [BD10] Alin Bostan and Philippe Dumas. Wronskians and linear independence. *Amer. Math. Monthly*, 117(8):722–727, 2010.
- [CR53] Eugenio Calabi and Maxwell Rosenlicht. Complex analytic manifolds without countable base. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4:335–340, 1953.
- [Dem] Jean-Pierre Demailly. *Complex analytic and differential geometry*.
- [Don11] Simon Donaldson. *Riemann surfaces*, volume 22 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2011.
- [For91] Otto Forster. *Lectures on Riemann surfaces*, volume 81 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. Translated from the 1977 German original by Bruce Gilligan, Reprint of the 1981 English translation.
- [Ful95] William Fulton. *Algebraic topology*, volume 153 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. A first course.
- [GX13] Jean Gallier and Dianna Xu. *A guide to the classification theorem for compact surfaces*, volume 9 of *Geometry and Computing*. Springer, Heidelberg, 2013.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Hub06] John Hamal Hubbard. *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1*. Matrix Editions, Ithaca, NY, 2006. Teichmüller theory, With contributions by Adrien Douady, William Dunbar, Roland Roeder, Sylvain Bonnot, David Brown, Allen Hatcher, Chris Hruska and Sudeb Mitra, With forewords by William Thurston and Clifford Earle.
- [MBD61] G. A. Miller, H. F. Blichfeldt, and L. E. Dickson. *Theory and applications of finite groups*. Dover Publications, Inc., New York, 1961.
- [Mil00] Haynes Miller. Leray in Oflag XVIIA: the origins of sheaf theory, sheaf cohomology, and spectral sequences. Number 84, suppl., pages 17–34. 2000. Jean Leray (1906–1998).
- [Mum95] David Mumford. *Algebraic geometry. I*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Complex projective varieties, Reprint of the 1976 edition.
- [Rad25] T. Radó. Über den Begriff der Riemannschen Fläche. *Acta Litt. Sci. Szeged*, 2:101–121, 1925.
- [Rey89] Éric Reyssat. *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, volume 77 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1989.
- [Ser55] Jean-Pierre Serre. Faisceaux algébriques cohérents. *Ann. of Math. (2)*, 61:197–278, 1955.
- [Var11] Dror Varolin. *Riemann surfaces by way of complex analytic geometry*, volume 125 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.