

## Relatório lista 11

**José Eduardo de Almeida Ayres<sup>1</sup>** - jeaayres@impa.br

<sup>1</sup>IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - Rio de Janeiro, RJ, Brasil

### Introdução

O problema prático descrito a seguir tem como objetivo observar e estudar computacionalmente a equação do calor bidimensional. Para a solução numérica será usado o método implícito de direções alternadas (ADI method) Peaceman-Rachford, o qual é baseado no método de Crank-Nickolson.

### Método de Peaceman-Rachford

Seja a EDP do calor bidimensional dada por

$$u(t) = a_1 u_{xx} + a_2 u_{yy}$$

no quadrado  $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$  e com  $0 \leq t \leq t_f$ , com condições de contorno de Dirichlet dadas

$$u(-1, y, t) = 0$$

$$u(1, y, t) = 0$$

$$u(x, -1, t) = 0$$

$$u(x, 1, t) = 0$$

e condição inicial descontínua dada por

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} 10, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ e } -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A solução inicial é vista na Figura 1. Pode-se reescrever a EDP como

$$u_t = A_1 u + A_2 u,$$

onde  $A_1 = a_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  e  $A_2 = a_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

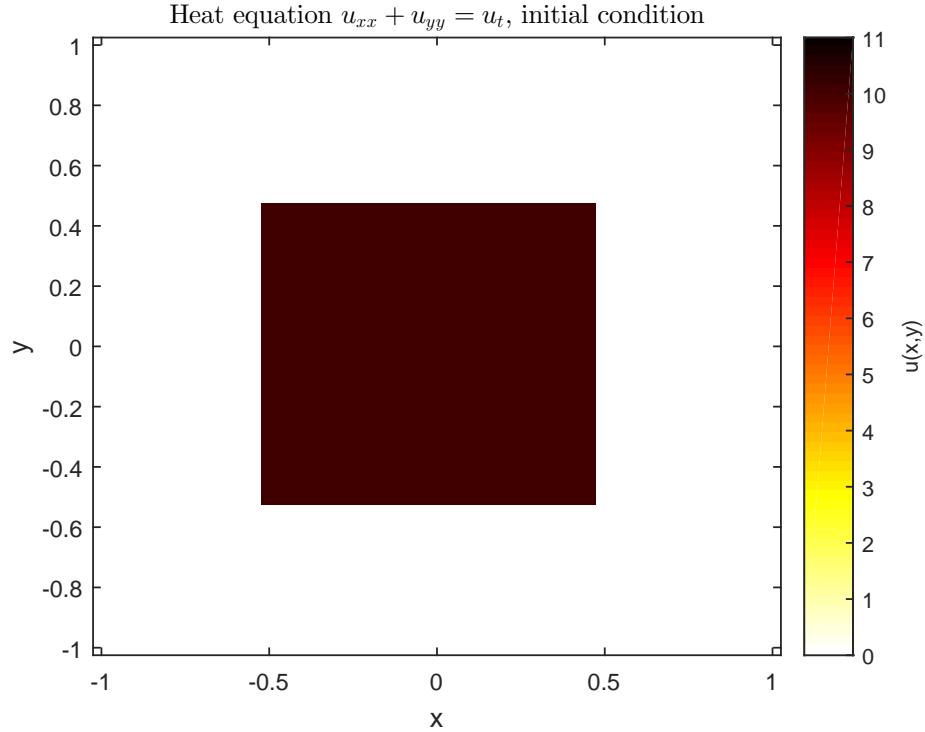


Figure 1- Equação do calor bidimensional, condição de contorno constante igual a zero e condição inicial igual a 10 para os nós mais internos da malha.

Usando Crank-Nickolson, primeiramente discretizando apenas a derivada temporal e realizando as médias espaciais, temos

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{k} = \frac{1}{2}(A_1 u^{n+1} + A_1 u^n) + \frac{1}{2}(A_2 u^{n+1} + A_2 u^n) + O(k^2),$$

e então,

$$\left(1 - \frac{k}{2}A_1 - \frac{k}{2}A_2\right) u^{n+1} = \left(1 + \frac{k}{2}A_1 + \frac{k}{2}A_2\right) u^n + O(k^3).$$

Para usar a propriedade  $(1 \pm a_1)(1 \pm a_2) = 1 \pm a_1 \pm a_2 + a_1 a_2$  vamos adicionar  $k^2 A_1 A_2 \frac{u^{n+1}}{4}$  em ambos os lados da EDP,

$$\left(1 - \frac{k}{2}A_1 - \frac{k}{2}A_2 + \frac{k^2}{4}A_1 A_2\right) u^{n+1} = \left(1 + \frac{k}{2}A_1 + \frac{k}{2}A_2 + \frac{k^2}{4}A_1 A_2\right) u^n + \frac{k^2}{4}A_1 A_2(u^{n+1} - u^n).$$

O termo  $\frac{k^2}{4}A_1 A_2(u^{n+1} - u^n) \Rightarrow \frac{k^2}{4}A_1 A_2 u^{n+1} = \frac{k^2}{4}A_1 A_2 u^n + \frac{k^2 A_1 A_2}{4}O(k) = \frac{k^2 A_1 A_2}{4}u^n + O(k^3)$ , logo podemos acrescentá-lo a termo de  $O(k^3)$  obtendo

$$\left(1 - \frac{k}{2}A_1 - \frac{k}{2}A_2 + \frac{k^2}{4}A_1 A_2\right) u^{n+1} = \left(1 + \frac{k}{2}A_1 + \frac{k}{2}A_2 + \frac{k^2}{4}A_1 A_2\right) u^n + O(k^3).$$

E, então, visto os operadores  $A_1$  e  $A_2$  na malha dados por  $A_1 h$  e  $A_2 h$ , respectivamente, temos

$$\left(1 - \frac{k}{2}A_1 h\right) \left(1 - \frac{k}{2}A_2 h\right) u_{m,l}^{n+1} = \left(1 + \frac{k}{2}A_1 h\right) \left(1 + \frac{k}{2}A_2 h\right) u_{m,l}^n + O(k^3) + O(kh^2).$$

Pode-se desenvolver o método Peaceman-Rachford através do seguinte esquema de time splitting

$$\left(1 - \frac{k}{2} A_1 h\right) \tilde{v}_{m,l}^{n+\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{k}{2} A_2 h\right) v_{m,l}^n, \quad (1)$$

e

$$\left(1 - \frac{k}{2} A_2 h\right) v_{m,l}^{n+1} = \left(1 + \frac{k}{2} A_1 h\right) \tilde{v}_{m,l}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Note que, usando o time splitting, decidimos quem será a dimensão implícita e a dimensão explícita com relação a  $A_1$  e  $A_2$ , e isto dá a ideia do alternating direction implicit method (ADI Method).

Usando Dirichlet definido a priori, e somando (1) e (2), obtemos as condições de contorno em  $\tilde{v}$ , como

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{1,l}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k}{2} A_2 h\right) v_{1,l}^n + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k}{2} A_2 h\right) v_{1,l}^{n+1} = 0; \\ \tilde{v}_{M-1,l}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k}{2} A_2 h\right) v_{M-1,l}^n + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k}{2} A_2 h\right) v_{M-1,l}^{n+1} = 0; \\ \tilde{v}_{m,1}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k}{2} A_2 h\right) v_{m,1}^n + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k}{2} A_2 h\right) v_{m,1}^{n+1} = 0; \\ \tilde{v}_{m,L-1}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k}{2} A_2 h\right) v_{m,L-1}^n + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k}{2} A_2 h\right) v_{m,L-1}^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Por fim, ao se discretizar o espaço, visto que  $\mu = \frac{k}{h^2}$ , o primeiro conjunto de equações de diferenças é dado por

$$-\frac{a_1 \mu}{2} \tilde{v}_{m-1,l}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + a_1 \mu) \tilde{v}_{m,l}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{a_1 \mu}{2} \tilde{v}_{m+1,l}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{a_2 \mu}{2} v_{m,l-1}^n + (1 - a_2 \mu) v_{m,l}^n + \frac{a_2 \mu}{2} v_{m,l+1}^n,$$

com  $l = 1, \dots, L-1$  e  $m = 1, \dots, M-1$  e  $x = mh$ ,  $y = lh$ . Já o segundo conjunto é dado por

$$-\frac{a_2 \mu}{2} v_{m,l-1}^{n+1} + (1 + a_2 \mu) v_{m,l}^{n+1} - \frac{a_2 \mu}{2} v_{m,l+1}^{n+1} = \frac{a_1 \mu}{2} \tilde{v}_{m-1,l}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - a_1 \mu) \tilde{v}_{m,l}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{a_1 \mu}{2} v_{m+1,l}^{n+\frac{1}{2}}.$$

Agora, pode-se usar o algoritmo de Thomas para obter-se, independente da direção  $y$ , todas as  $M-1$  linhas de  $v^{n+1}$  na direção  $x$ , alocando-as em um passo de tempo intermediário  $\tilde{v}$ . E depois, a partir do passo de tempo intermediário  $\tilde{v}$ , pode-se obter as  $L-1$  colunas de  $v^{n+1}$  com o uso do algoritmo de Thomas. Isso transforma o problema bidimensional em vários problemas unidimensionais mais simples.

## Resultados

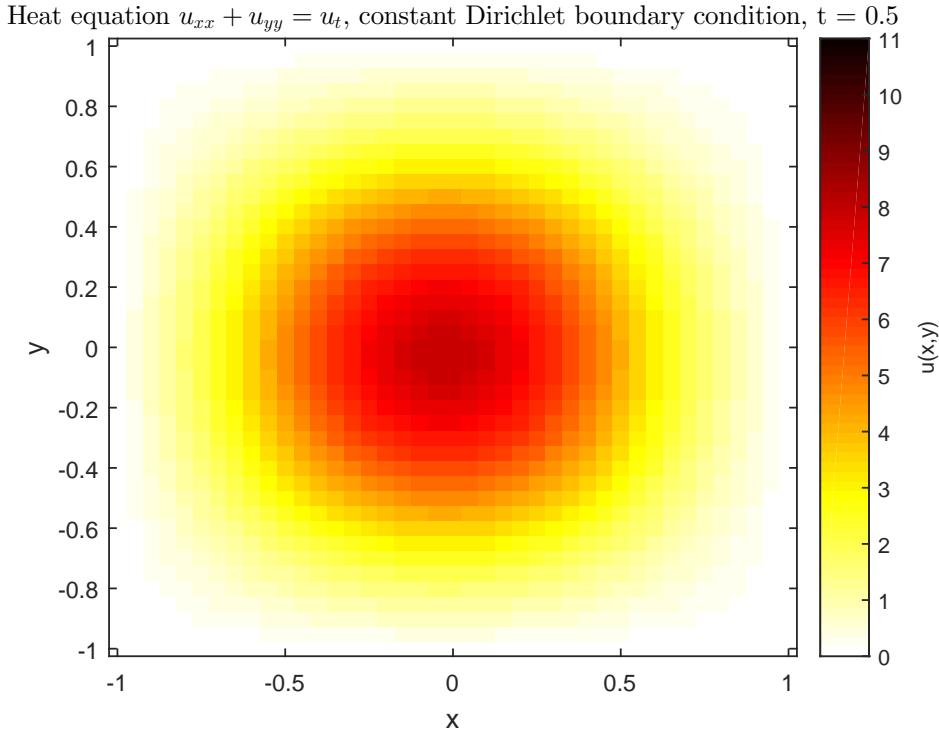


Figure 2- Equação do calor bidimensional com  $a_1 = 0.1$  e  $a_2 = 0.1$ , solução em  $t = 0.5$ .

Primeiramente, para os valores de  $h = 0.05$  e  $k = 0.005$  foram gerados resultados para valores de  $a_1 = a_2 = 0.1$ , com o objetivo de variar o tempo e observar o fenômeno de difusão bidimensional. Pode ser observado nas Figuras 2, 3 e 4 que os resultados estão dentro do esperado para a EDP do calor, com a solução inicial descontínua (Figura 1), se tornando suave já em  $t = 0.5$ . Apesar do calculo em direções alternadas, nenhuma direção foi priorizada pelo algoritmo, exibindo um bom comportamento, dentro do necessário para satisfazer o fenômeno físico. Visto que, dados fatores iguais nas derivadas direcionais, ambas as direções tem que sofrer com a mesma suavização.

Agora, observando-se as Figuras 5, 6 e 7, é visivel que ao se reduzir o valor anterior de  $a_2 = 0.1$  em  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{10}$  e  $\frac{1}{100}$ , reduz também a difusão na direção  $y$ . Para  $a_2 = \frac{1}{100}a_1$  é visto que o problema fica próximo de vários problemas unidimensionais similares nas retas de  $y$  constante, com uma pequena perturbação dada pela interferência do termo de derivada segundas em  $y$ , neste problema quase toda a energia é perdida nas fronteiras  $x = -1$  e  $x = 1$ . O mesmo é repetido de forma simétrica em  $x$ , ao se trocar  $a_1 = \frac{1}{100}a_2$ , como pode ser observado na Figura 8.

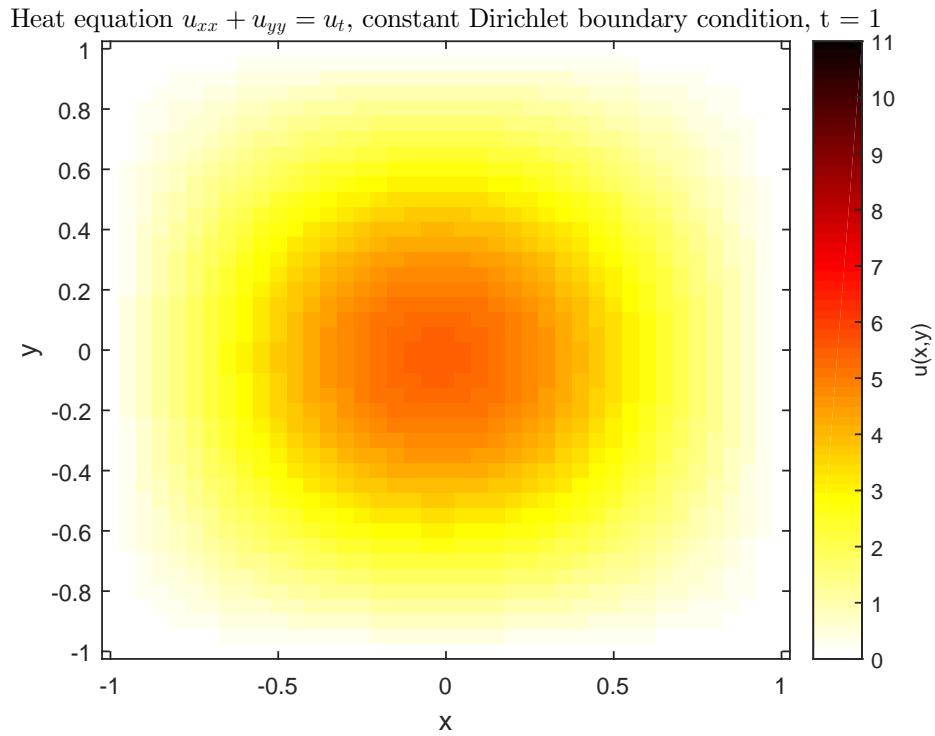


Figure 3- Equação do calor bidimensional com  $a_1 = 0.1$  e  $a_2 = 0.1$ , solução em  $t = 1$ .

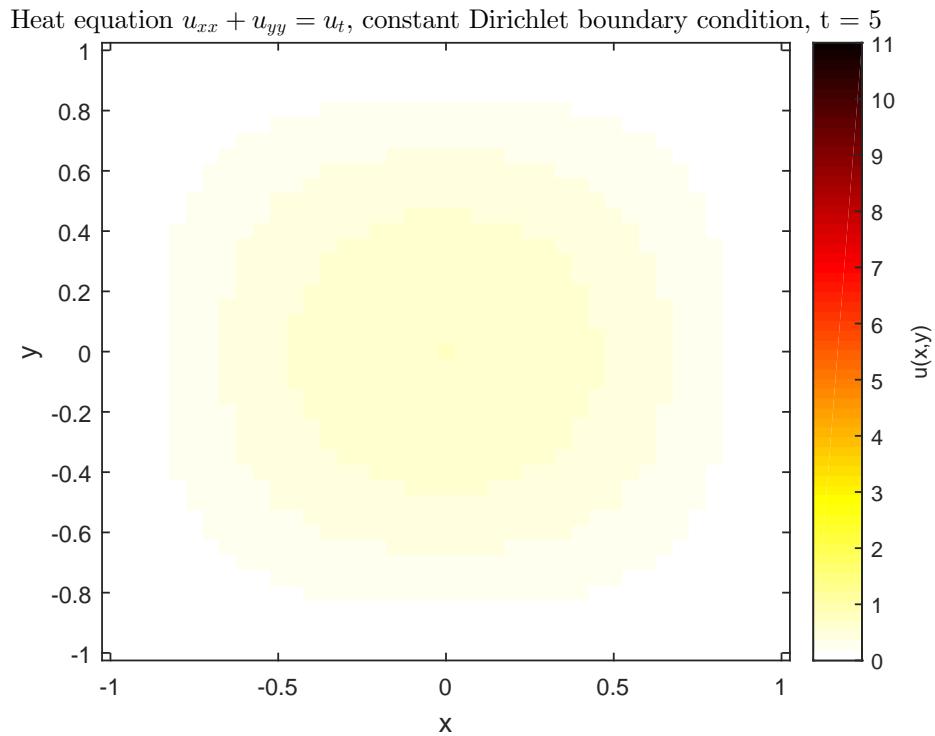


Figure 4- Equação do calor bidimensional com  $a_1 = 0.1$  e  $a_2 = 0.1$ , solução em  $t = 5$ .

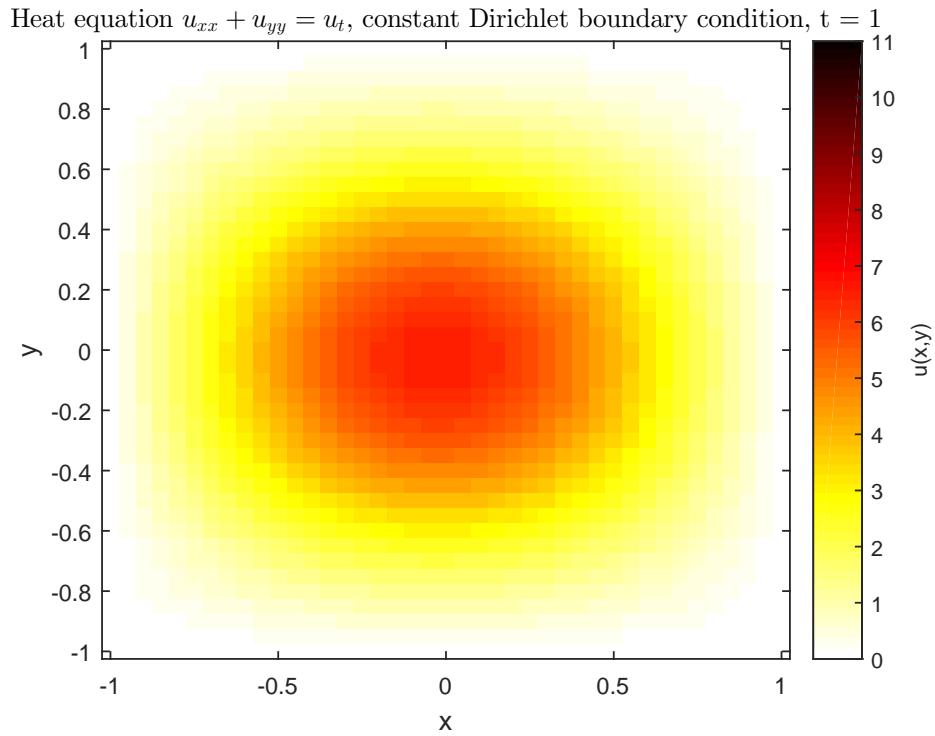


Figure 5- Equação do calor bidimensional com  $a_1 = 0.1$  e  $a_2 = 0.05$ , solução em  $t = 1$ .

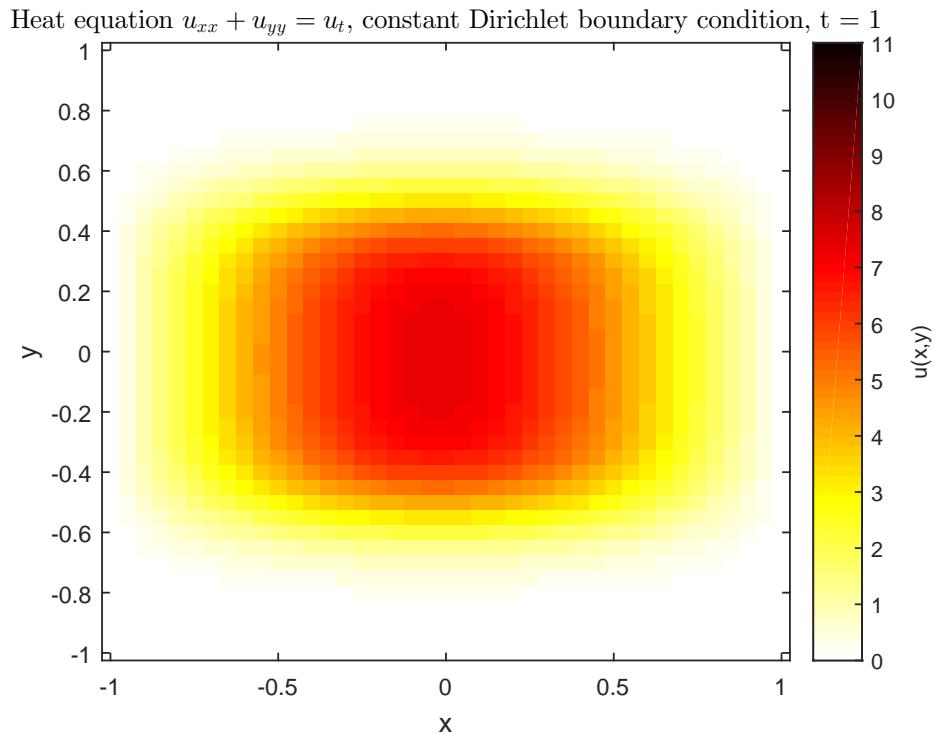


Figure 6- Equação do calor bidimensional com  $a_1 = 0.1$  e  $a_2 = 0.01$ , solução em  $t = 1$ .

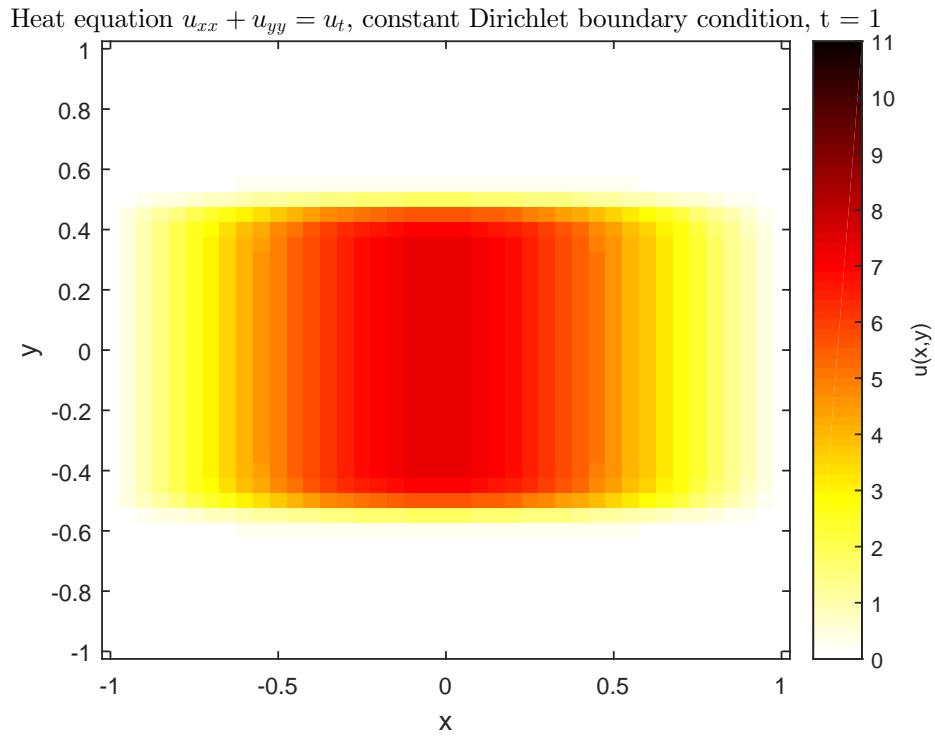


Figure 7- Equação do calor bidimensional com  $a_1 = 0.1$  e  $a_2 = 0.001$ , solução em  $t = 1$ .

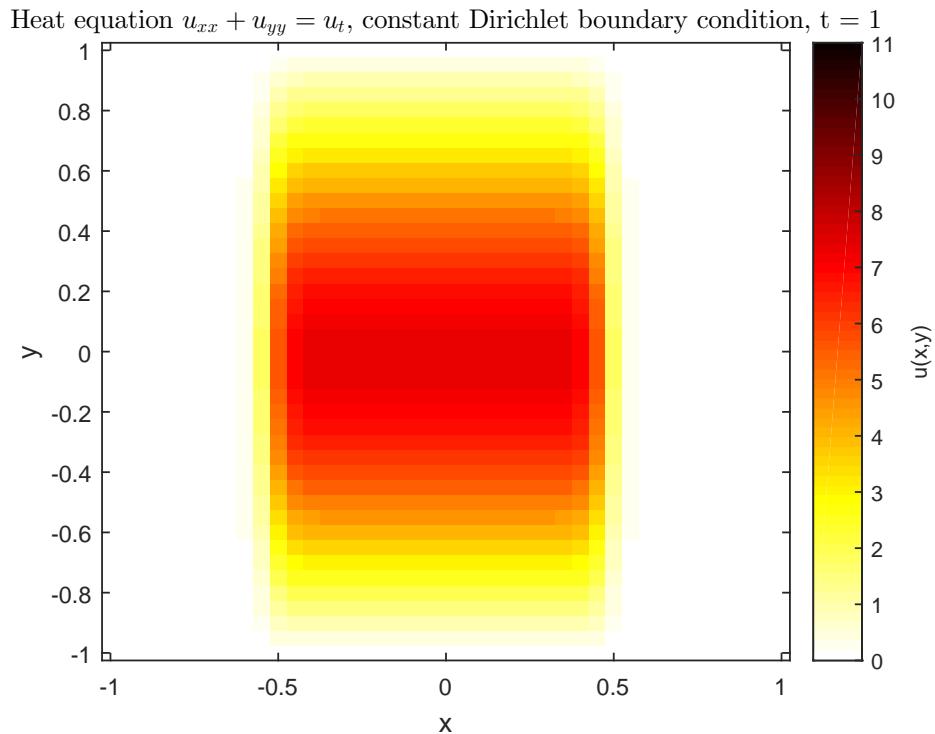


Figure 8- Equação do calor bidimensional com  $a_1 = 0.001$  e  $a_2 = 0.1$ , solução em  $t = 1$ .

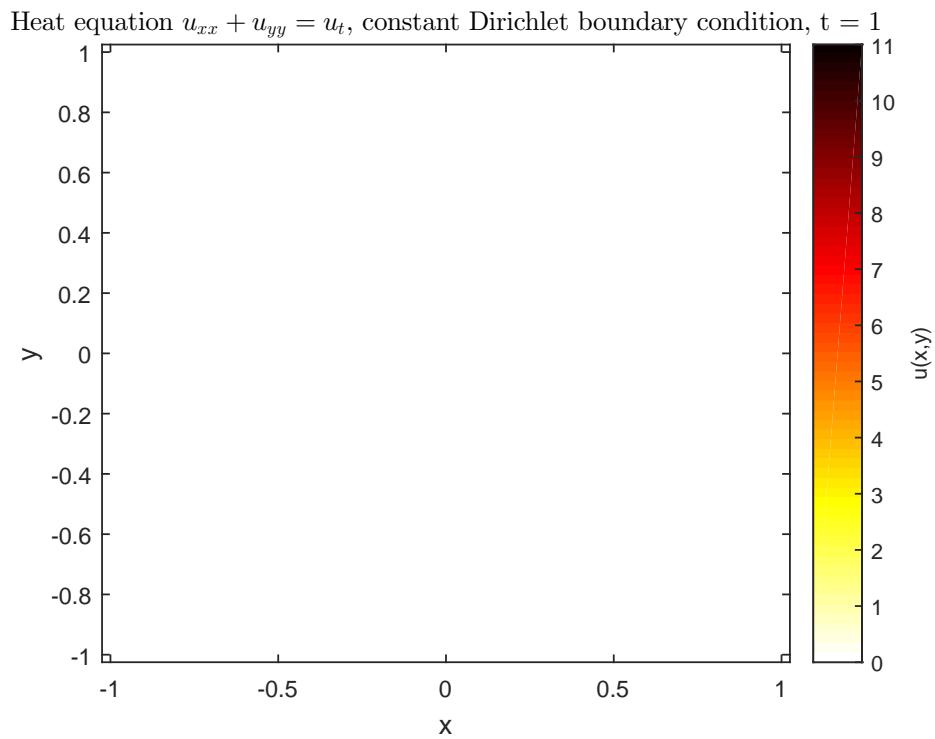


Figure 9- Equação do calor bidimensional com  $a_1 = 10$  e  $a_2 = 10$ , solução em  $t = 1$ .

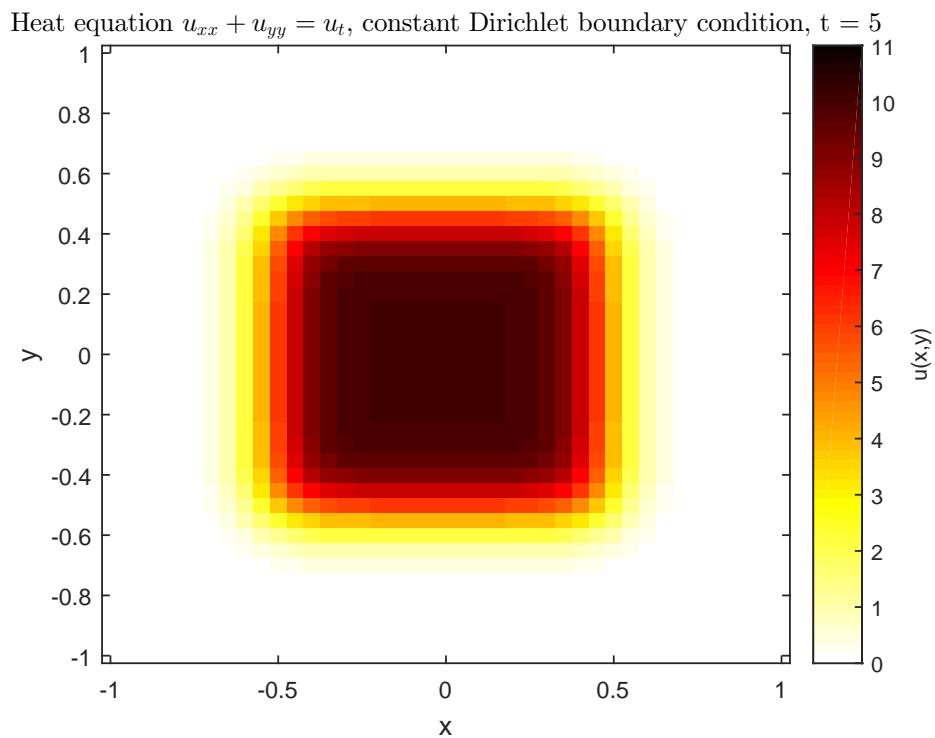


Figure 10- Equação do calor bidimensional com  $a_1 = 0.001$  e  $a_2 = 0.001$ , solução em  $t = 1$ .

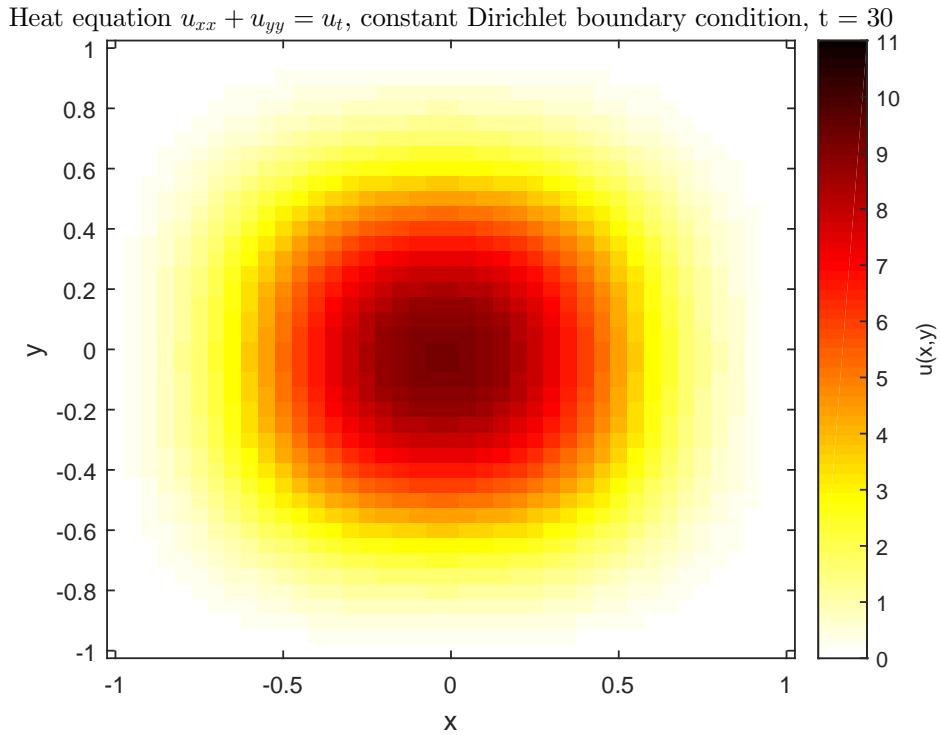


Figure 11- Equação do calor bidimensional com  $a_1 = 0.001$  e  $a_2 = 0.001$ , solução em  $t = 30$ .

Pode-se observar agora na Figura 9, que para valores grandes de  $a_1 = a_2 = 10$  o problema perde toda a energia antes de  $t = 1$ . Já para valores pequenos de  $a_1 = a_2 = 0.001$  a difusão é bem lenta, como pode ser visto nas Figuras 10 e 11. Com base nos resultados obtidos, para o problema retangular da equação de calor bidimensional com contornos de dirichlet o método ADI se comporta bem.