

Relatório lista 8

José Eduardo de Almeida Ayres¹ - jeaayres@impa.br

¹IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - Rio de Janeiro, RJ, Brasil

INTRODUÇÃO

O problema prático descrito a seguir tem como objetivo observar e estudar computacionalmente a equação do Calor não linear empregando o esquema implícito de Crank-Nicolson.

Esquema de Crank-Nicolson

Dada a equação do calor linear

$$u_t + au_{xx} = 0,$$

o esquema de Crank-Nicolson, dada uma discretização avançada no tempo e centrada no espaço (com uma média temporal realizada a priori), é dado por

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} + \frac{a}{2} \left(\frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} + \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} \right) = 0.$$

Ao se realizar alguma manipulação no esquema acima, é obtido

$$\frac{a\lambda}{2}u_{m-1}^{n+1} + (1 - a\lambda)u_m^{n+1} + \frac{a\lambda}{2}u_{m+1}^{n+1} = -\frac{a\lambda}{2}u_{m-1}^n + (1 + a\lambda)u_m^n - \frac{a\lambda}{2}u_{m+1}^n,$$

onde $\lambda = \frac{k}{h^2}$. Esse esquema, no caso linear gera um sistema tridiagonal $Ax = b$ onde as entradas da matriz A são constantes. Note que, este esquema é incondicionalmente estável, consistente, com precisão $O(k^2 + h^2)$.

O esquema de Crank-Nicolson pode ser empregado para o caso não linear a partir da seguinte modificação. Primeiramente, seja Dada a equação do calor linear

$$u_t + (a(u))_{xx} = 0,$$

onde para este trabalho será usada $a(u) = -u^2$ e portanto

$$u_t + (-u^2)_{xx} = 0.$$

O esquema de Crank-Nicolson, dada uma discretização similar a anterior para o caso linear, é dado por

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} + \frac{1}{2} \left(\frac{a(u_{m-1}^n) - 2a(u_m^n) + a(u_{m+1}^n)}{h^2} + \frac{a(u_{m-1}^{n+1}) - 2a(u_m^{n+1}) + a(u_{m+1}^{n+1})}{h^2} \right) = 0.$$

Com o objetivo de simplificar o método proposto, podemos observar que a variação de u nos tempos $t = nk$ e $t = (n+1)k$ é dada por

$$\delta u_m^n = u_m^{n+1} - u_m^n,$$

logo,

$$\delta u_m^n + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{a(u_{m-1}^n) - 2a(u_m^n) + a(u_{m+1}^n)}{h^2} + \frac{a(u_{m-1}^{n+1}) - 2a(u_m^{n+1}) + a(u_{m+1}^{n+1})}{h^2} \right) = 0.$$

Pode-se agora ser realizada uma linearização nos termos $a(u)$ tal que

$$a(u_m^{n+1}) = a(u_m^n) + \delta u_m^n \frac{da(u_m^n)}{du} + O((\delta u_m^n)^2)$$

Desprezando-se os termos de $O((\delta u_m^n)^2)$ é obtido o seguinte esquema, note que dada a linearização os termos conhecidos de $a(u)$ são duplicados e depois realizada a média, logo

$$\frac{da(u_{m-1}^n)}{du} \frac{\lambda}{2} \delta u_{m-1}^n + \left(1 - \frac{da(u_{m-1}^n)}{du} \lambda\right) \delta u_m^n + \frac{da(u_{m+1}^n)}{du} \frac{\lambda}{2} \delta u_{m+1}^n = \lambda(-a(u_{m-1}^n) + 2a(u_m^n) - a(u_{m+1}^n)).$$

O esquema obtido, diferente do caso linear, calcula a cada passo no tempo o incremento da solução u , e portanto o valor final é dado por

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \delta u_m^n.$$

Note que agora a matriz do sistema tridiagonal varia no tempo com a derivada de $a(u)$ e portanto o sistema é do tipo $A(u)x = b$. Note que, para ambos os sistemas, linear e não linear, para que a diagonal seja dominante é necessário valores negativos para a e $a(u)$, dai a escolha de $-x^2$.

Resultados

Primeiramente vamos comparar a solução no caso linear e no caso não linear, para todos os testes será usado $h = 0.1$, $k = 0.005$ e, logo, $\lambda = 0.5$. Ambas as condições de contorno serão de Dirichlet igual a zero nas fronteiras.

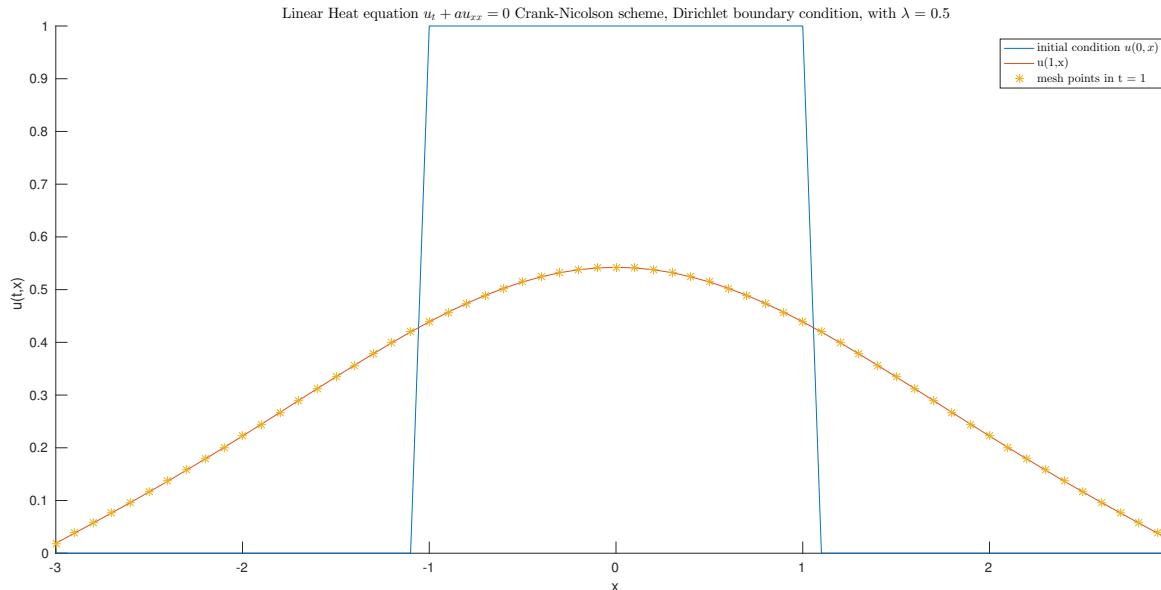


Figure 1- Equação do calor linear com solução inicial igual a 1 entre -1 e 1 e contorno de Dirichlet em $t = 1$.

Ao se observar as Figuras 1, 2 e 3, correspondentes ao problema linear, é visível que a difusão é menos suave se comparada a das Figuras 4, 5 e 6, que mostram o problema não linear. em $t = 1$ é possível se verificar que o caso não linear ainda mantém toda sua energia, enquanto no caso linear parte da energia já foi perdida nos contornos. Para $t = 30$ vemos que o caso linear perdeu completamente a energia, se tornando uma solução constante no espaço, por outro lado a EDP não linear ainda mantém em torno de 25% da energia inicial, mostrando a suavidade da difusão. Se observarmos a Figura 7, é visto que a EDP não linear ainda mantém em torno de 3% da energia, mesmo após um $t = 300$.

Ao se usar uma condição inicial mais suave, dada por $u(0, x) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ é obtido também um decaimento, se comprado as descontinuidades vistas anteriormente, mais rápido e suave tanto para a EDP linear quanto para a não linear, como pode ser visto nas Figuras 8, 9, 10 e 11. É visível também a perda de energia mais rápida nesse caso.

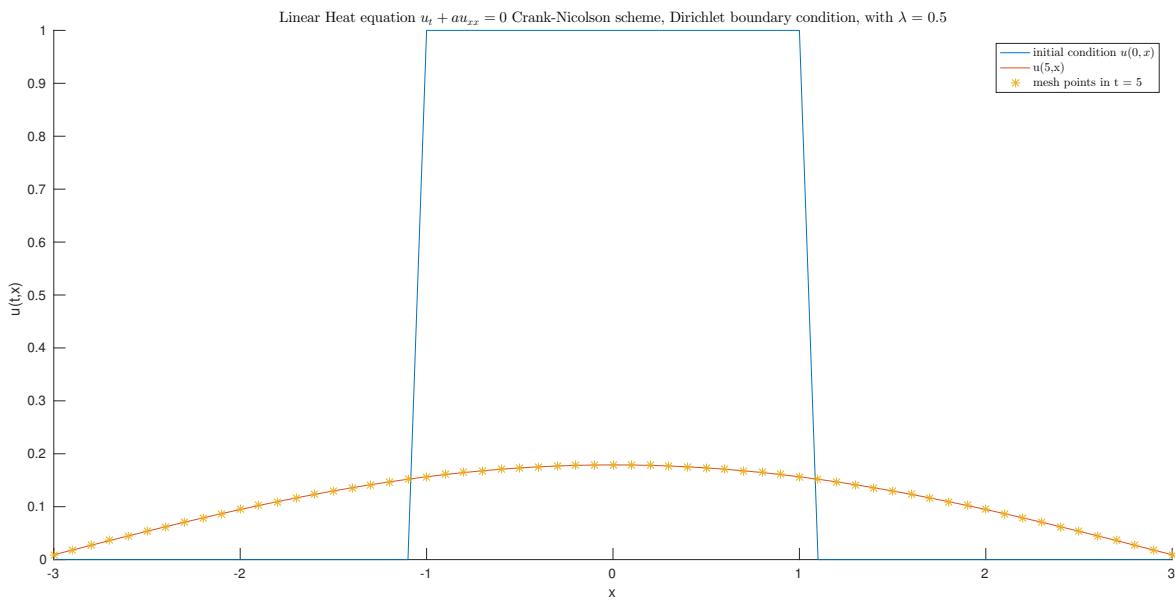


Figure 2- Equação do calor linear com solução inicial igual a 1 entre -1 e 1 e contorno de Dirichlet em $t = 5$.

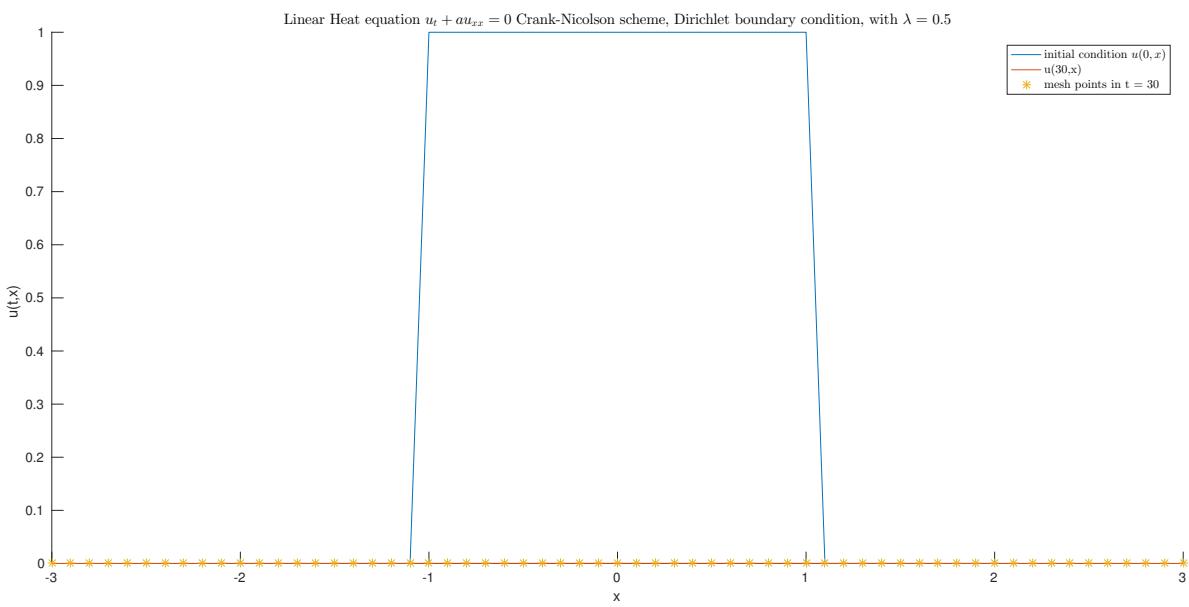


Figure 3- Equação do calor linear com solução inicial igual a 1 entre -1 e 1 e contorno de Dirichlet em $t = 30$.

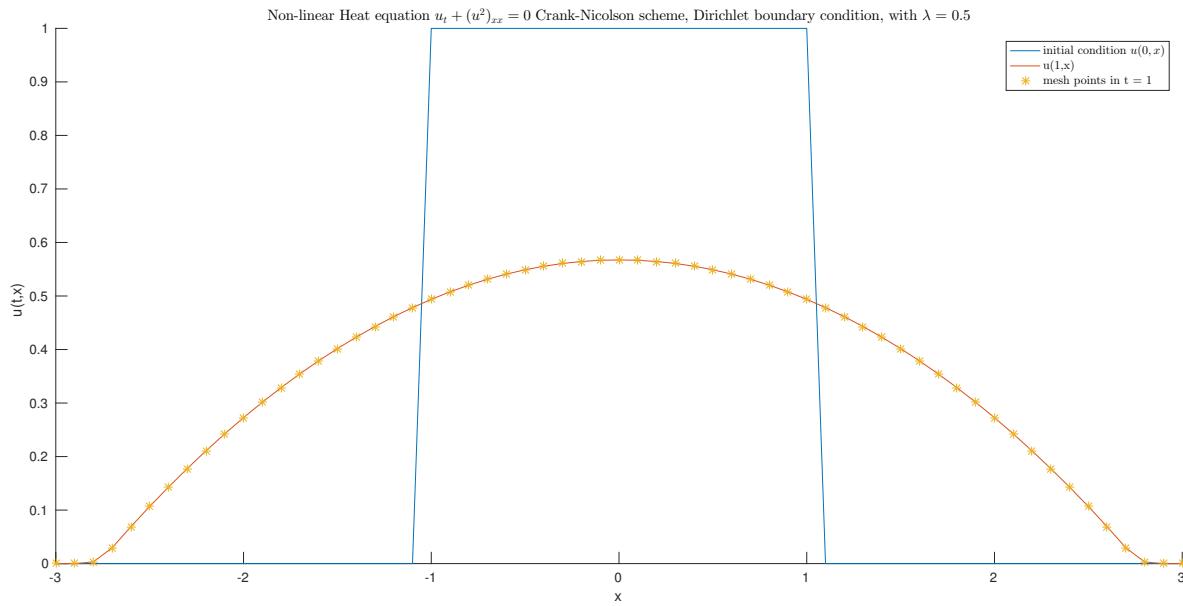


Figure 4- Equação do calor não linear com solução inicial igual a 1 entre -1 e 1 e contorno de Dirichlet em $t = 1$.

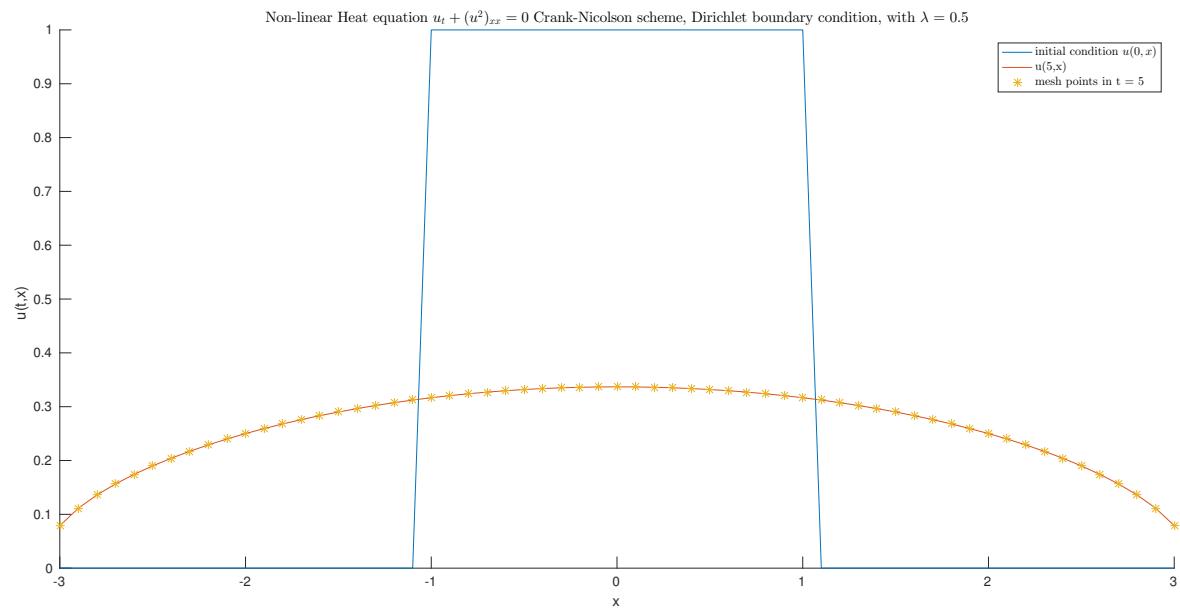


Figure 5- Equação do calor não linear com solução inicial igual a 1 entre -1 e 1 e contorno de Dirichlet em $t = 5$.

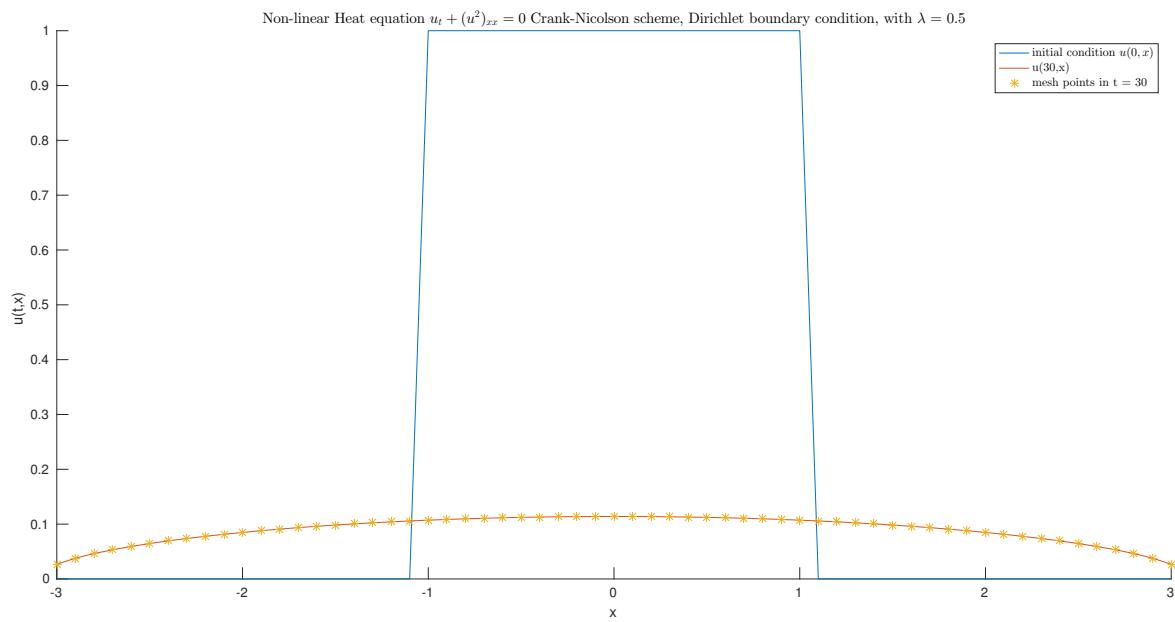


Figure 6- Equação do calor não linear com solução inicial igual a 1 entre -1 e 1 e contorno de Dirichlet em $t = 30$.

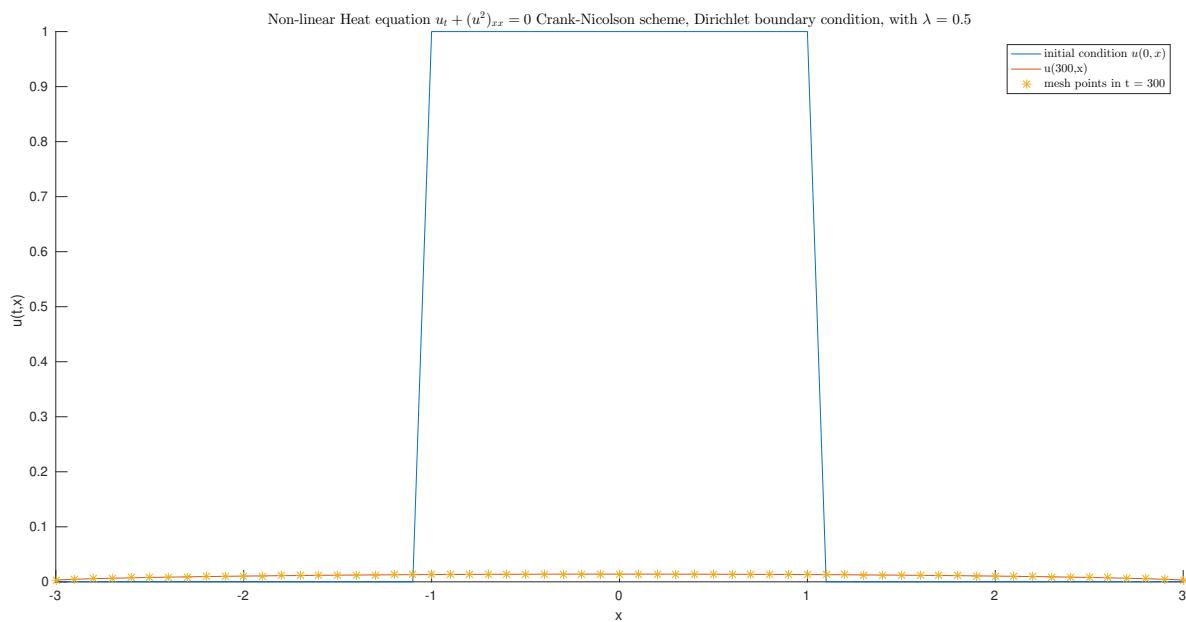


Figure 7- Equação do calor não linear com solução inicial igual a 1 entre -1 e 1 e contorno de Dirichlet em $t = 30$.

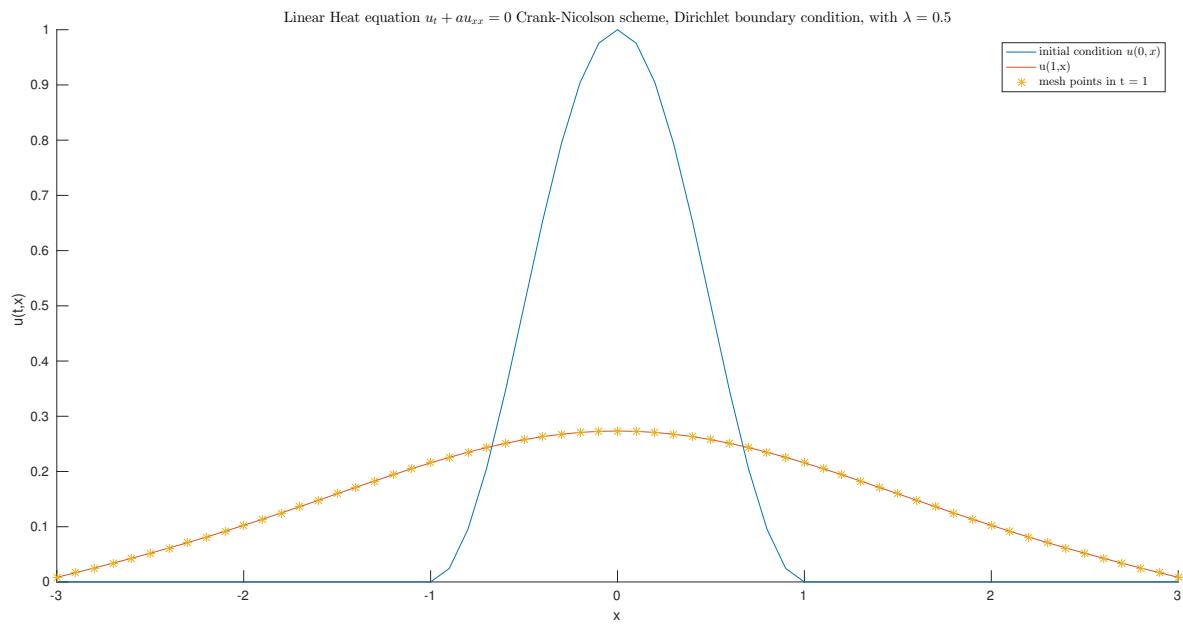


Figure 8- Equação do calor linear com solução inicial igual a $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ e contorno de Dirichlet em $t = 1$.

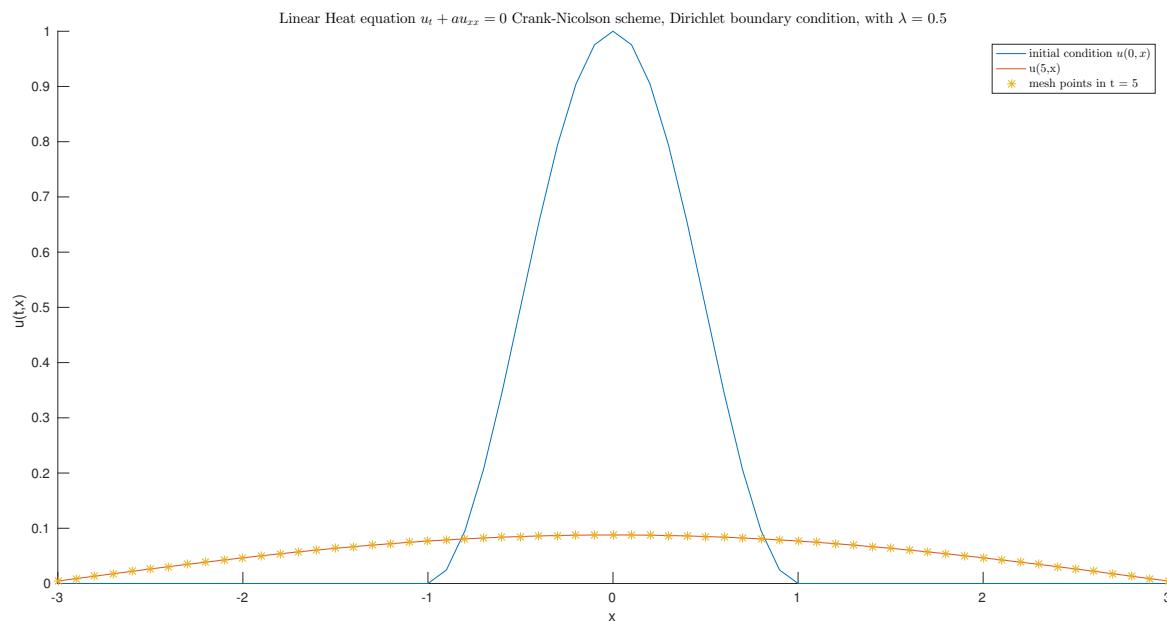


Figure 9- Equação do calor linear com solução inicial igual a $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ e contorno de Dirichlet em $t = 5$.

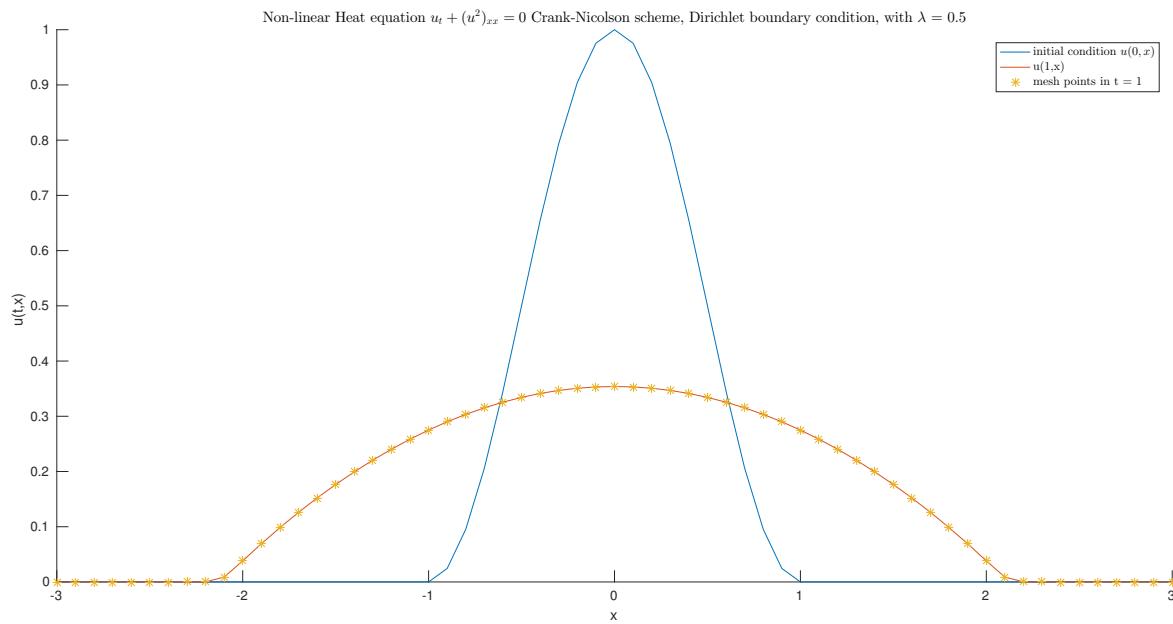


Figure 10- Equação do calor não linear com solução inicial igual a $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ e contorno de Dirichlet em $t = 1$.

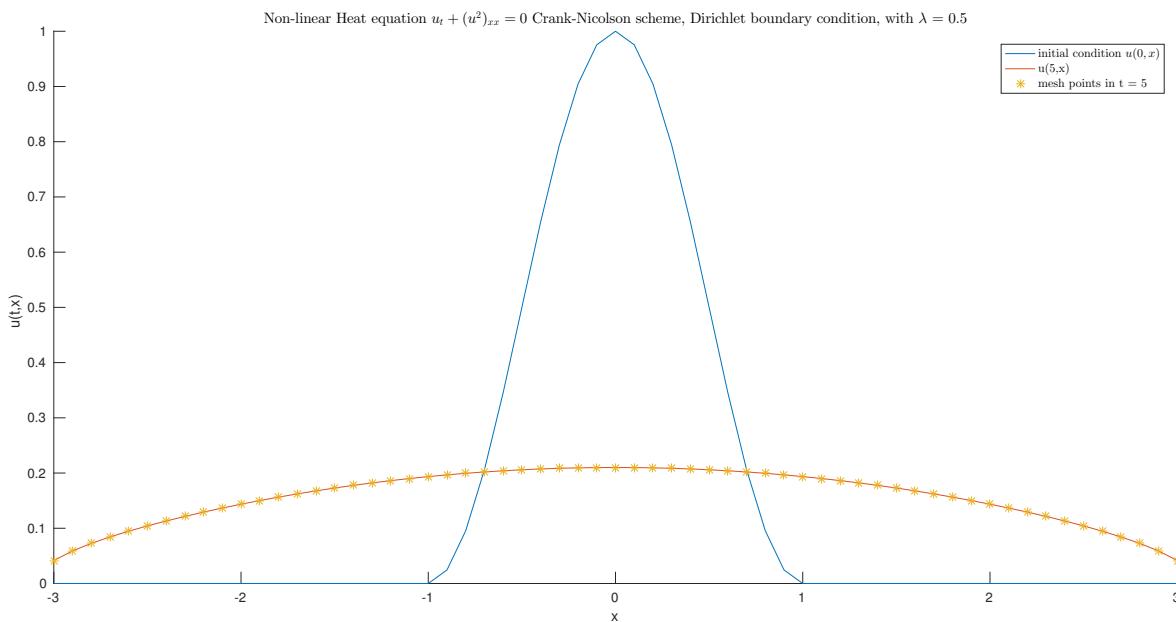


Figure 11- Equação do calor não linear com solução inicial igual a $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ e contorno de Dirichlet em $t = 5$.

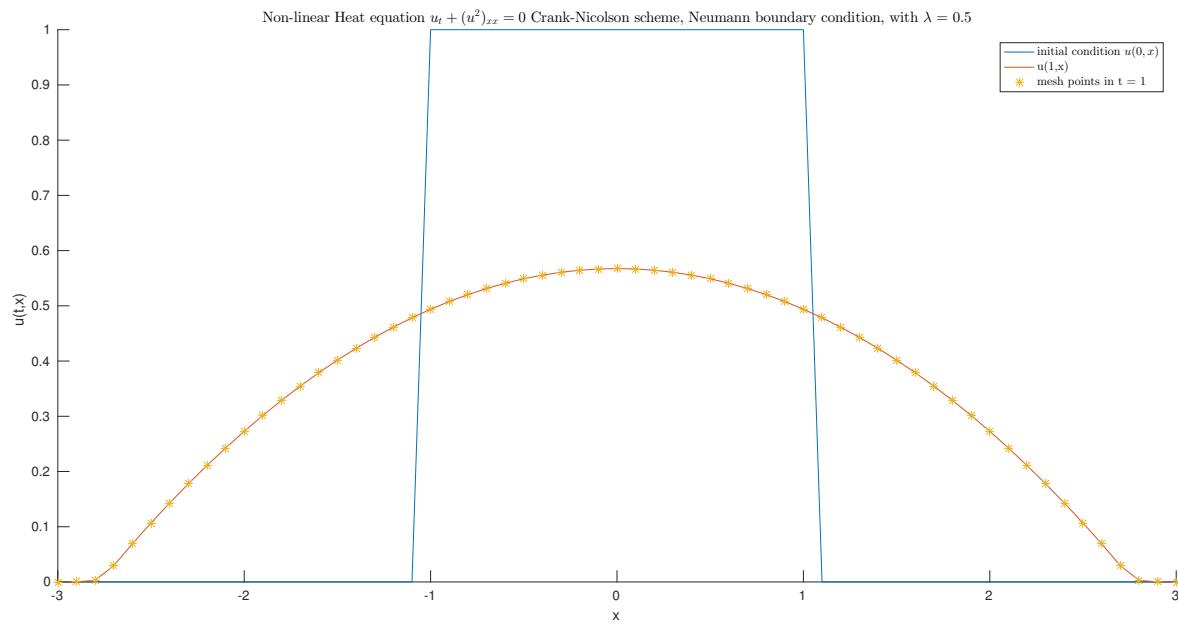


Figure 12- Equação do calor não linear com solução inicial igual a 1 entre -1 e 1 e contorno de Neumann em $t = 1$.

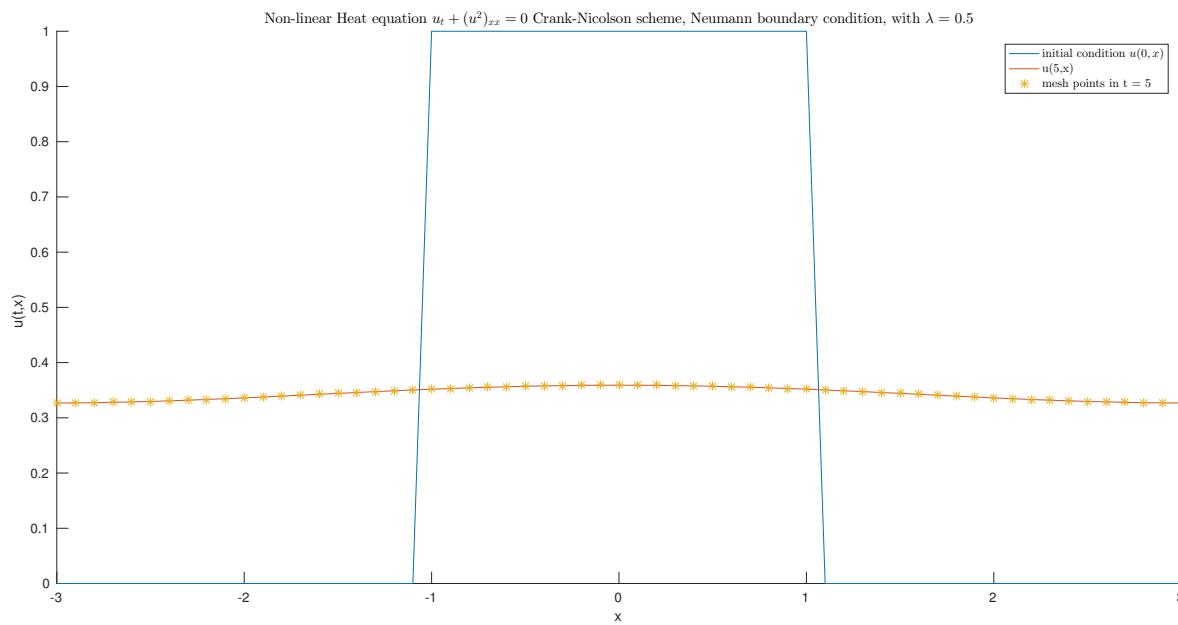


Figure 13- Equação do calor não linear com solução inicial igual a 1 entre -1 e 1 e contorno de Neumann em $t = 5$.

Agora, ao se usar a condição de contorno de Neumann, zerando as derivadas em ambas as fronteiras, verificamos que temos um sistema completamente isolado, que não deve perder energia (apesar de matematicamente viável, fisicamente não existe um material 100% isolante, e em uma situação real, alguma energia sempre será perdida, mesmo que muito devagar).

Note que, ao se observar a Figura 12, ela é exatamente igual a Figura 4, isto já era esperado, visto que as soluções iniciais ainda não tocaram a fronteira em $t = 1$. Ao se avançar no tempo para $t = 5$, é verificado que a energia da condição inicial com descontinuidades é maior (igual a 2, contra 1 da condição suave) e estabiliza mais rápido que a solução suave.

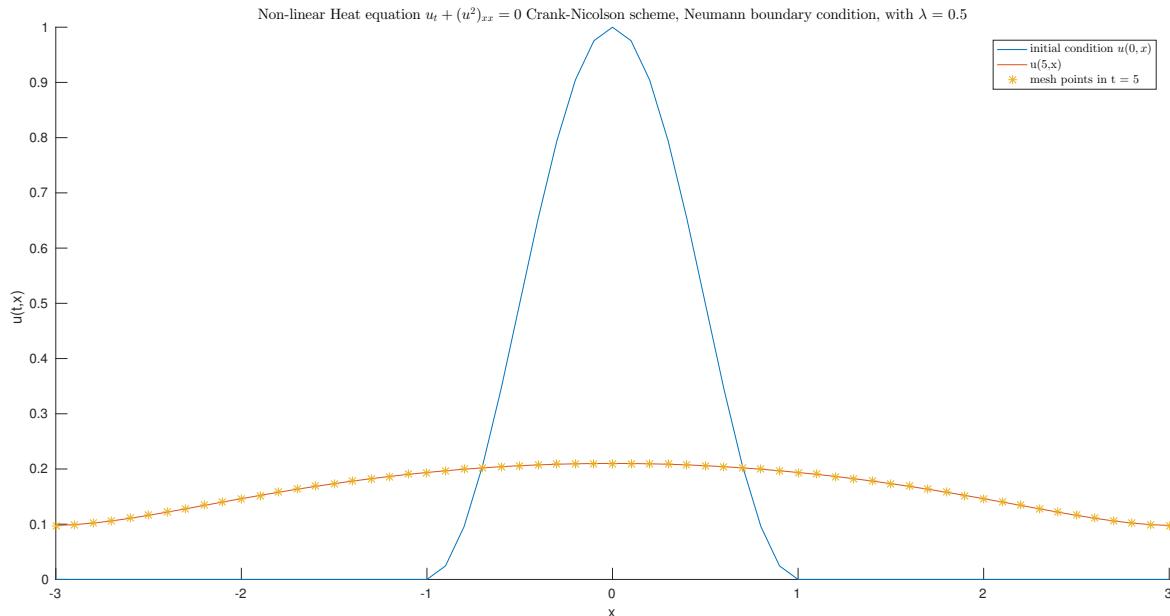


Figure 14- Equação do calor não linear com solução inicial igual a $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ e contorno de Neumann em $t = 5$.