

Relatório lista 3

José Eduardo de Almeida Ayres¹ - jeaayres@impa.br

¹IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - Rio de Janeiro, RJ, Brasil

INTRODUÇÃO

Os problemas práticos descritos a seguir tem como objetivo observar e estudar computacionalmente a EDP e sistemas de EDP's relacionados a equação da onda unidimensional.

Exercício 1 - Solução numérica da equação da onda unidimensional

O objetivo aqui é verificar e validar alguns esquemas para a solução da equação da onda unidimensional. Para todos os métodos serão usados valores de $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$. Para avaliar se um método é útil, será usado o supremo dos valores obtidos para a malha, logo se $\forall n, m \exists v_m^n$ tal que $|v_m^n| > 5$ então o esquema é considerado inútil, e útil caso contrário. A equação da onda a ser resolvida é dada por

$$u_t + u_x = 0$$

$$u(0, x) = \begin{cases} \cos^2(\pi x), & \text{se } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

A condição de contorno a esquerda é dada por $u(t, -1) = 0$, já pela direita é dada por $v_m^{n+1} = v_{m-1}^{n+1}$. O problema será resolvido para $x \in [-1, 3]$ e $t \in [0, 2.4]$.

Exercício 1.1 - Esquema avançado no tempo e recuado no espaço com Número de Courant $\lambda = 0.8$

O esquema discretizado é dado por

$$v_m^{n+1} = (1 - \lambda)v_m^n + \lambda v_{m-1}^n.$$

Observando-se as Figuras 1,2 e 3, é visível que o esquema empregado resolve o problema de forma aceitável, além disso não existe $|v_m^n| > 5$, logo esquema é útil. Pode-se ver também que ao se aumentar o número de passos no espaço, a solução melhora de forma considerável. A equação dada não envolve nenhum termo difusivo, logo o esquema empregado insere uma quantidade de difusão numérica na solução final. Com o refino de h , a difusão numérica melhora, porém ainda é visível.

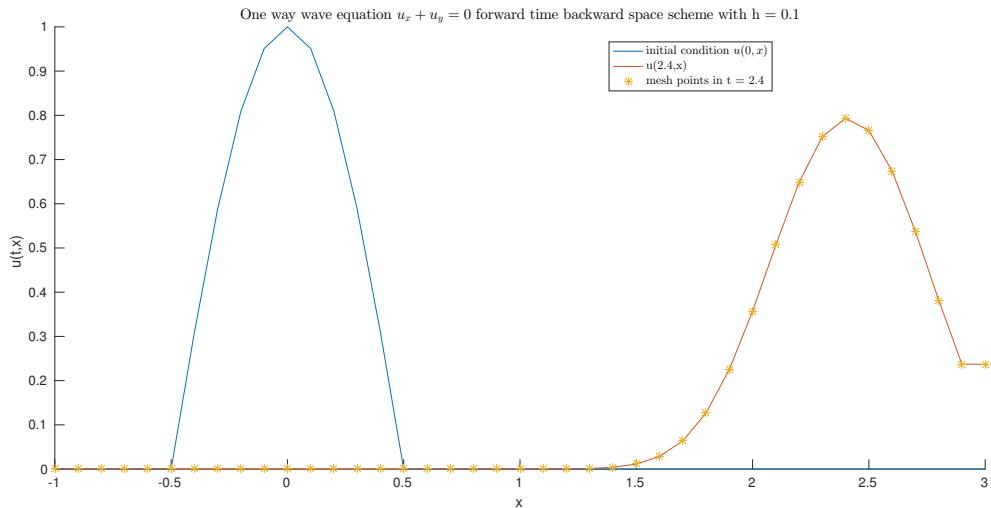


Figure 1- Equação da onda unidimensional com esquema avançado no tempo e recuado no espaço com Número de Courant $\lambda = 0.8$ e $h = \frac{1}{10}$.

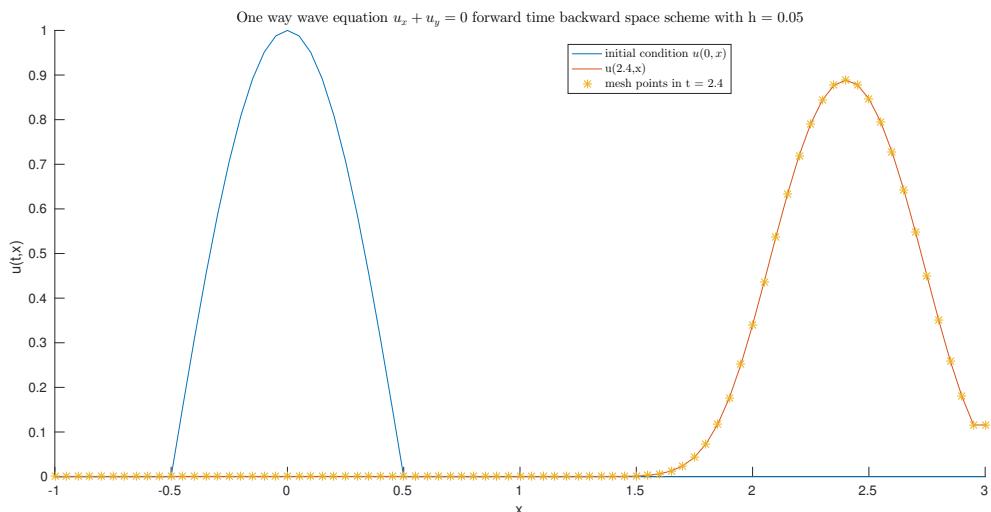


Figure 2- Equação da onda unidimensional com esquema avançado no tempo e recuado no espaço com Número de Courant $\lambda = 0.8$ e $h = \frac{1}{20}$.

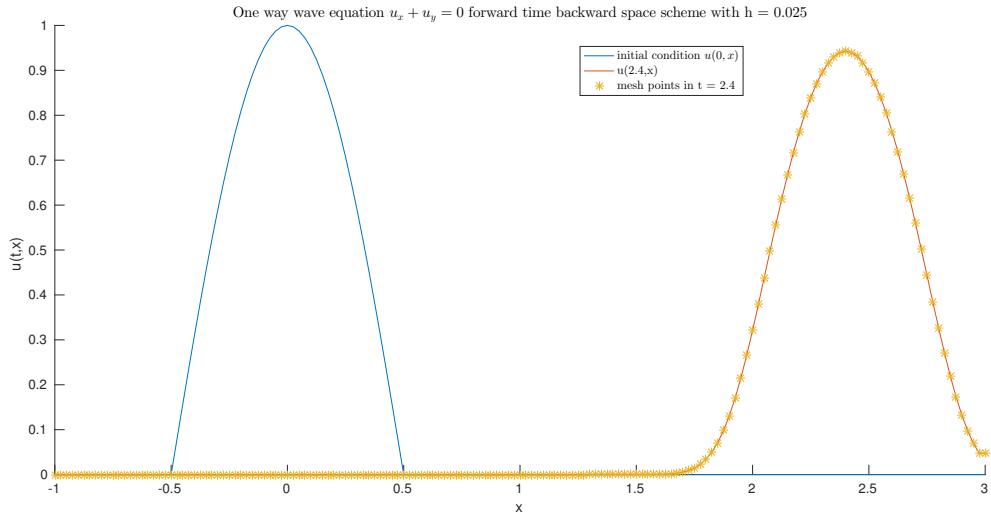


Figure 3- Equação da onda unidimensional com esquema avançado no tempo e recuado no espaço com Número de Courant $\lambda = 0.8$ e $h = \frac{1}{40}$.

Exercício 1.2 - Esquema avançado no tempo e centrado no espaço com Número de Courant $\lambda = 0.8$

O esquema discretizado é dado por

$$v_m^{n+1} = v_m^n - \frac{\lambda}{2}(v_{m+1}^n - v_{m-1}^n).$$

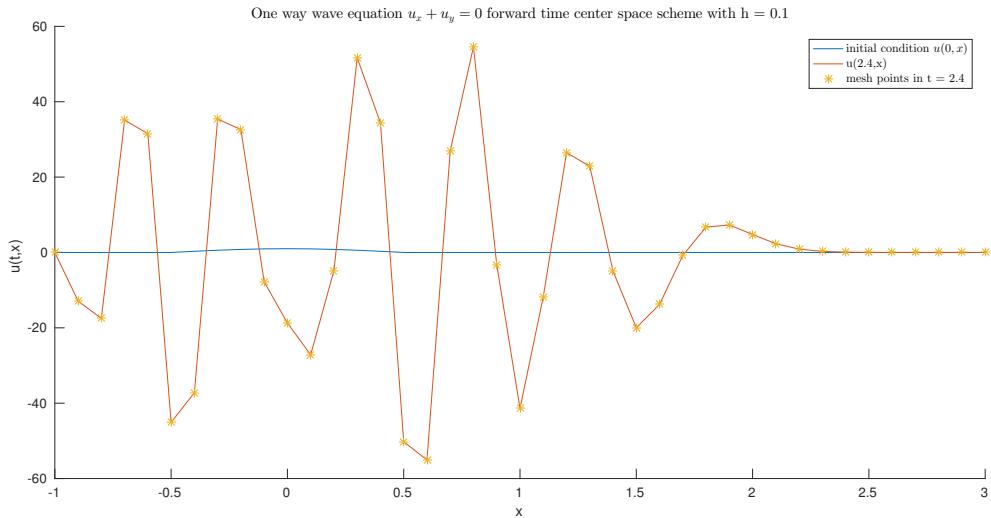


Figure 4- Equação da onda unidimensional com esquema avançado no tempo e centrado no espaço com Número de Courant $\lambda = 0.8$ e $h = \frac{1}{10}$.

Observando-se as Figuras 4, 5 e 6, é visivel que o esquema empregado gera oscilações na solução final, além disso existe $|v_m^n| > 5$, logo esquema é inútil. Se utilizado um valor muito

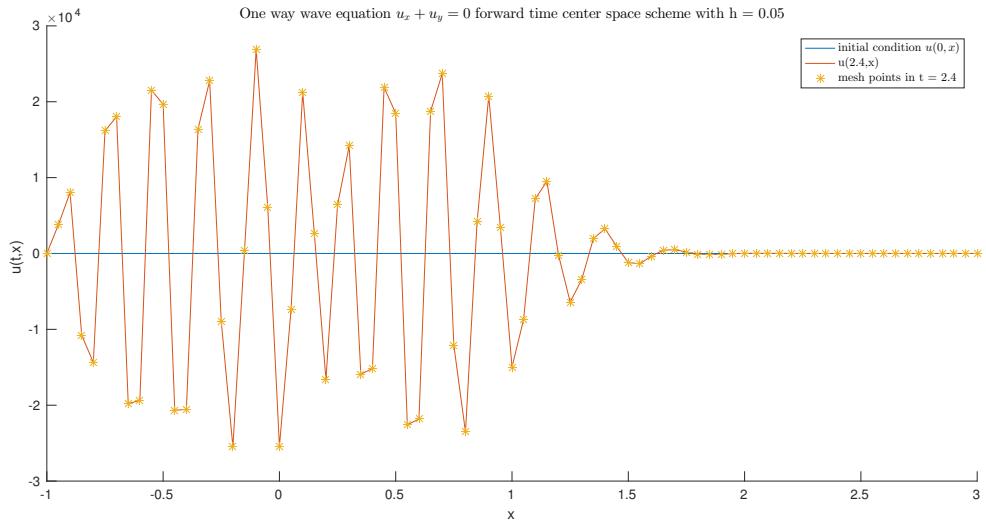


Figure 5- Equação da onda unidimensional com esquema avançado no tempo e centrado no espaço com Número de Courant $\lambda = 0.8$ e $h = \frac{1}{20}$.

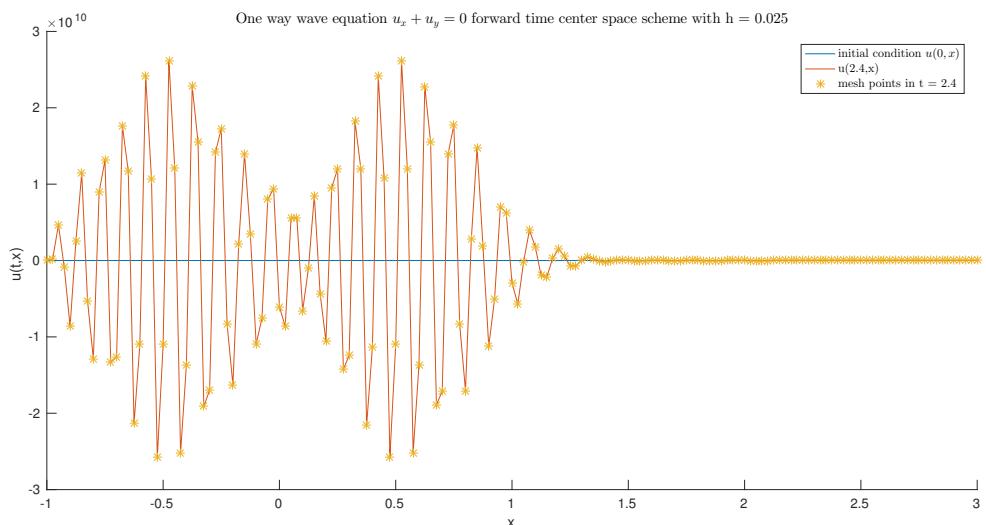


Figure 6- Equação da onda unidimensional com esquema avançado no tempo e centrado no espaço com Número de Courant $\lambda = 0.8$ e $h = \frac{1}{40}$.

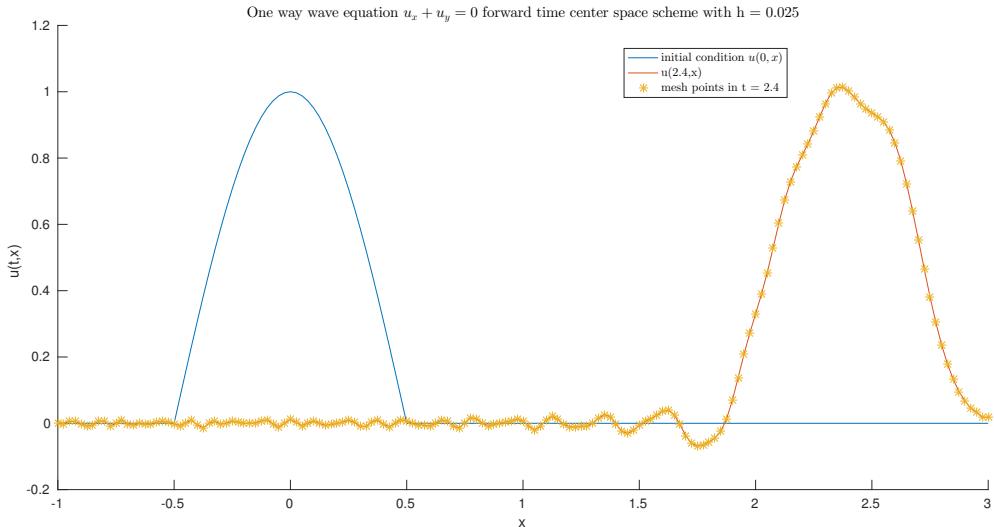


Figure 7- Equação da onda unidimensional com esquema avançado no tempo e centrado no espaço com Número de Courant $\lambda = 0.01$ e $h = \frac{1}{40}$.

pequeno para o Número de Courant, $\lambda = 0.01$, o resultado final melhora muito, como é visível na Figura 7. Porém ao se fazer isto estamos basicamente copiando o valor de v_m^n em v_m^{n+1} .

Exercício 1.3 - Esquema Lax-Fridrichs com Número de Courant $\lambda = 0.8, 1.6$

O esquema discretizado é dado por

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{2}(1 - \lambda)v_{m+1}^n + \frac{1}{2}(1 + \lambda)v_{m-1}^n.$$

Observando-se as Figuras 8, 9 e 10, é visivel que o esquema empregado resolve o problema de forma aceitável, além disso não existe $|v_m^n| > 5$, logo esquema é útil. Pode-se ver também que ao se aumentar o número de passos no espaço, a solução melhora de forma considerável. A equação dada não envolve nenhum termo difusivo, logo o esquema empregado insere uma boa quantidade de difusão numérica na solução final, a difusão inserida é ainda maior que o do esquema da Seção 1.1. Com o refino de h , a difusão numérica melhora, porém ainda é visível. O método pode ser problemático caso tenha que se realizar uma série temporal muito grande, a difusão numérica pode tornar a solução bem diferente da condição inicial, o que não é desejável.

Pode-se obervar nas Figuras 11, 12 e 13 que o Esquema de Lax com este Número de Courant grande é inútil, o aumento dele afeta diretamente a estabilidade do esquema.

Exercício 1.4 - Esquema Leap Frog com Número de Courant $\lambda = 0.8$

O esquema discretizado é dado por

$$v_m^{n+1} = v_m^{n-1} - \lambda(v_{m+1}^n - v_{m-1}^n).$$

Observando-se as Figuras 14, 15 e 16, é visivel que o esquema empregado resolve o problema de forma aceitável, além disso não existe $|v_m^n| > 5$, logo esquema é útil. Pode-se ver

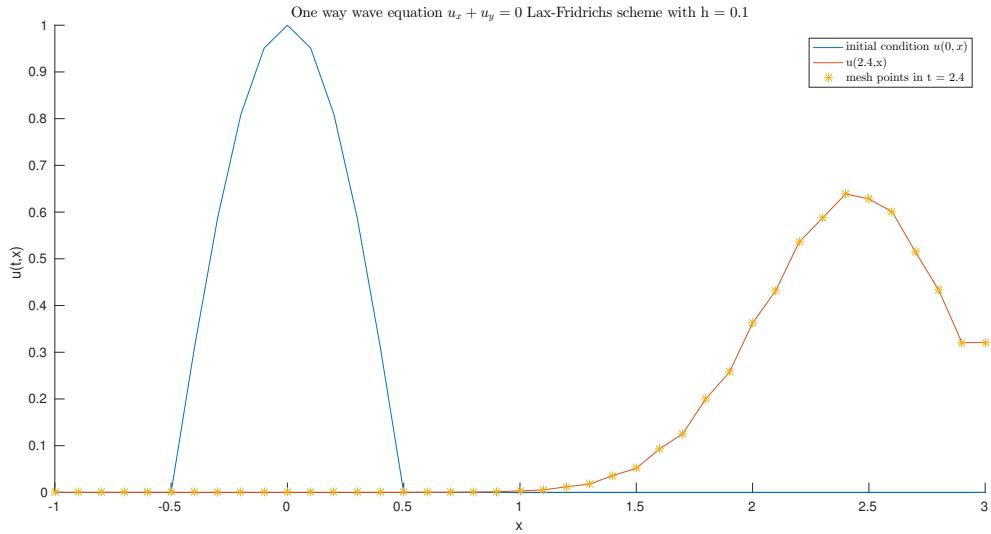


Figure 8- Equação da onda unidimensional com esquema Lax-Fridrichs com Número de Courant $\lambda = 0.8$ e $h = \frac{1}{10}$.

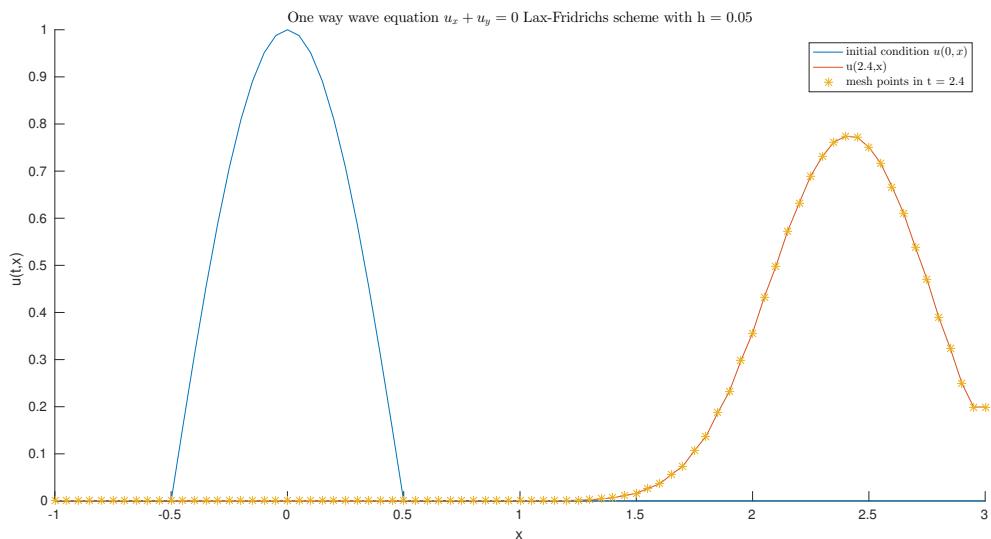


Figure 9- Equação da onda unidimensional com esquema Lax-Fridrichs com Número de Courant $\lambda = 0.8$ e $h = \frac{1}{20}$.

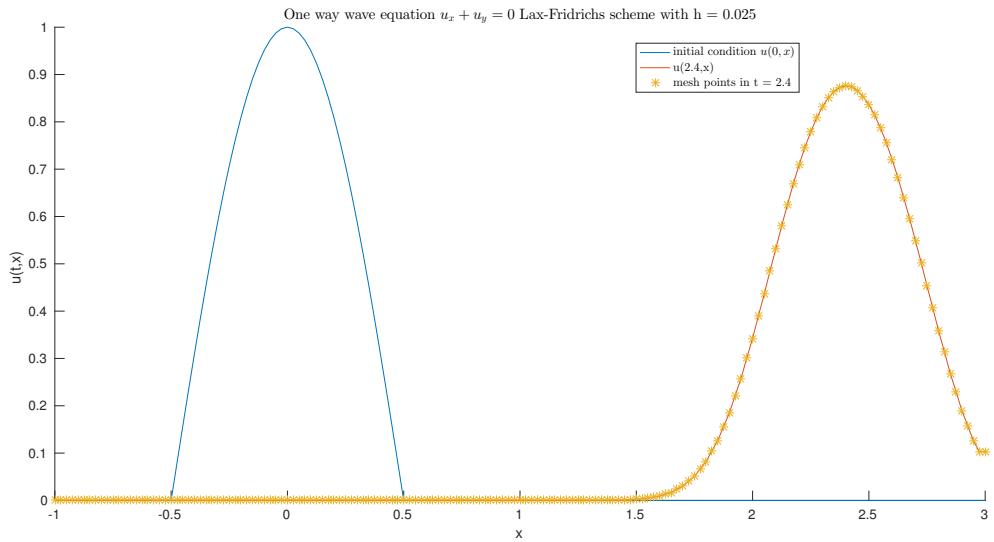


Figure 10- Equação da onda unidimensional com esquema Lax-Fridrichs com Número de Courant $\lambda = 0.8$ e $h = \frac{1}{40}$.

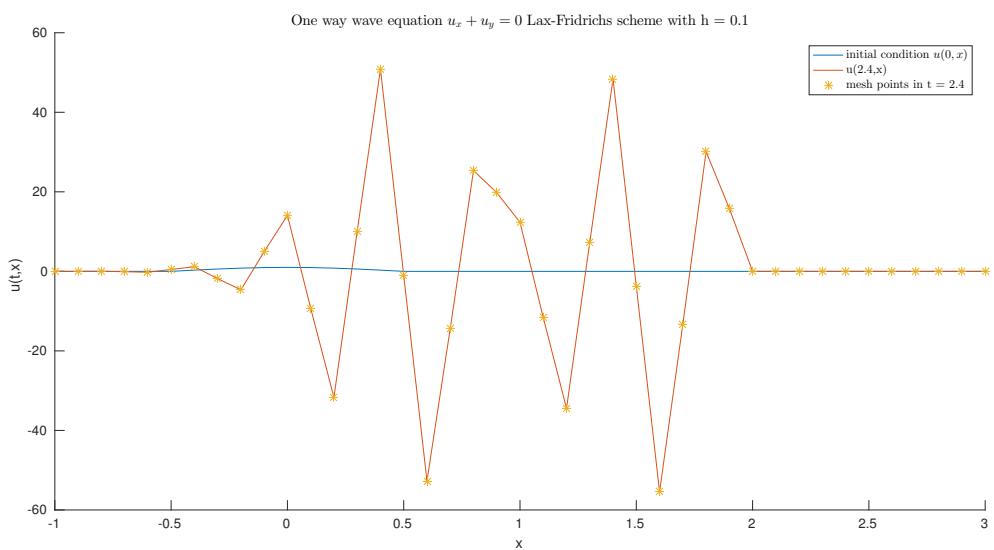


Figure 11- Equação da onda unidimensional com esquema Lax-Fridrichs com Número de Courant $\lambda = 1.6$ e $h = \frac{1}{10}$.

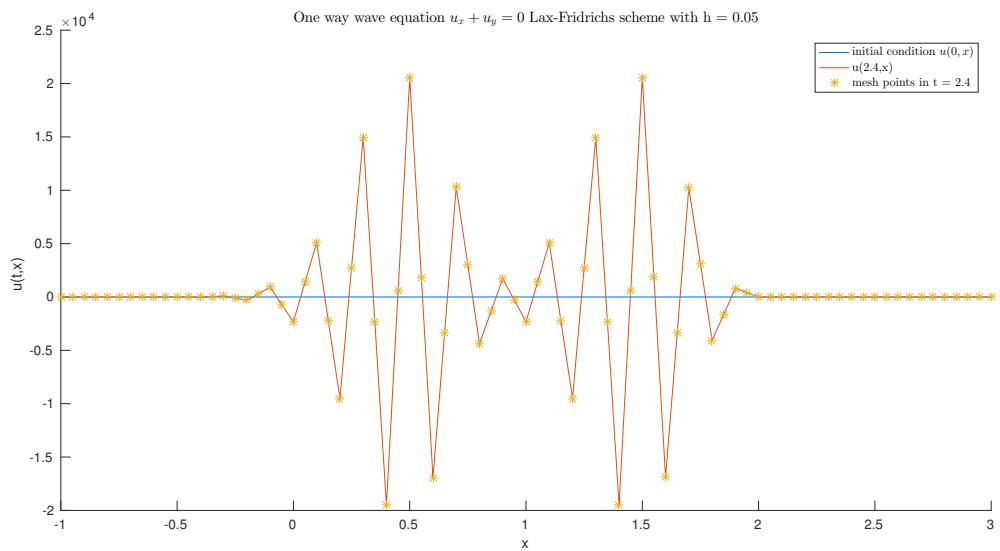


Figure 12- Equação da onda unidimensional com esquema Lax-Fridrichs com Número de Courant $\lambda = 1.6$ e $h = \frac{1}{20}$.

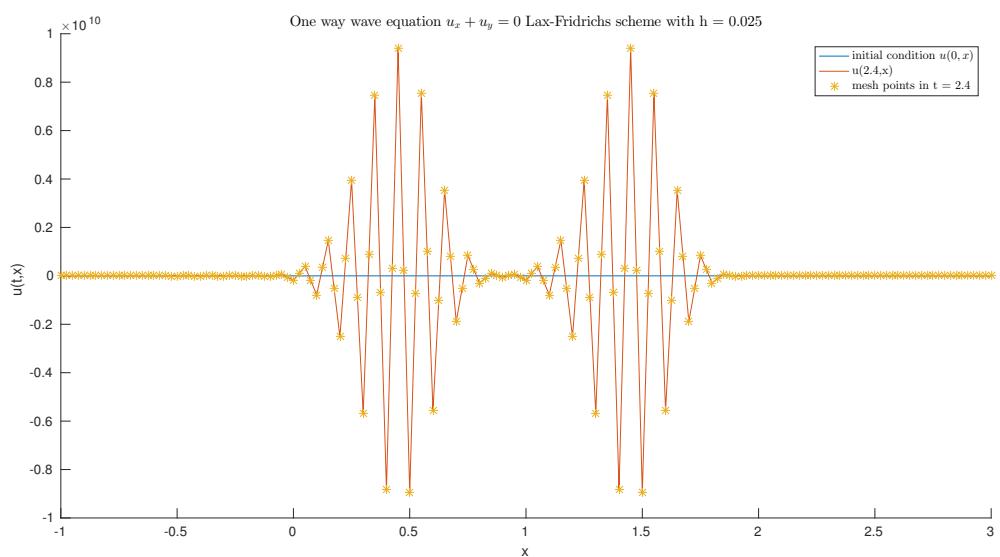


Figure 13- Equação da onda unidimensional com esquema Lax-Fridrichs com Número de Courant $\lambda = 1.6$ e $h = \frac{1}{40}$.

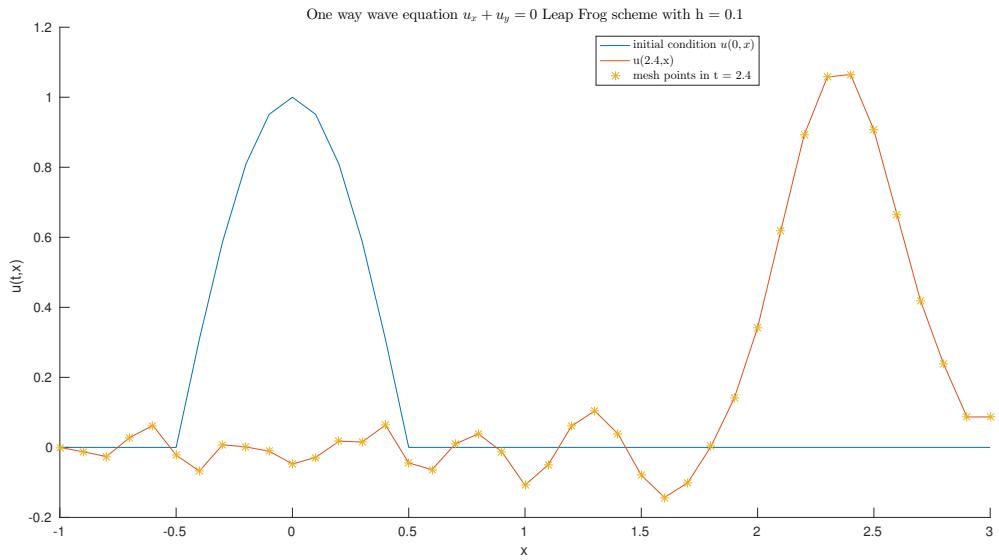


Figure 14- Equação da onda unidimensional com esquema Leap Frog com Número de Courant $\lambda = 0.8$ e $h = \frac{1}{10}$.

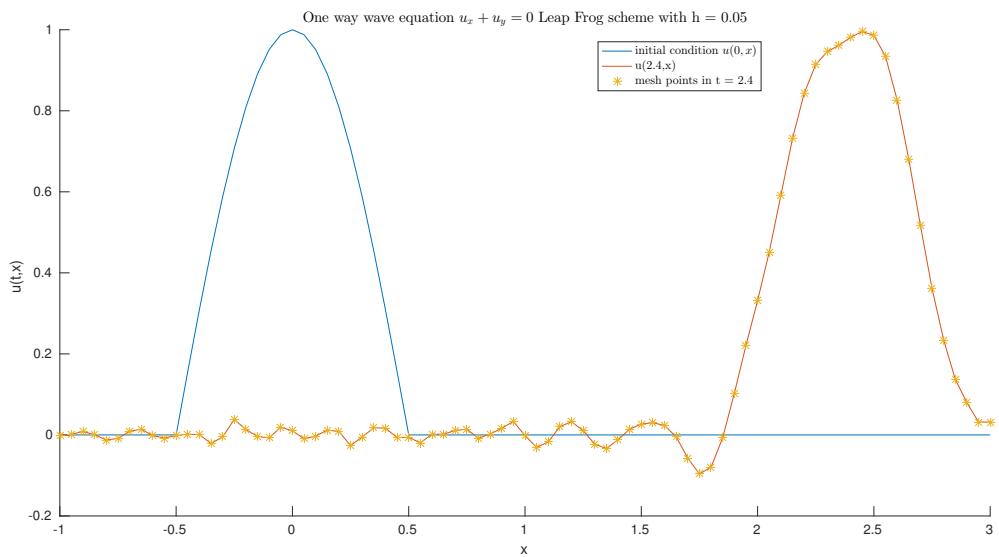


Figure 15- Equação da onda unidimensional com esquema Leap Frog com Número de Courant $\lambda = 0.8$ e $h = \frac{1}{20}$.

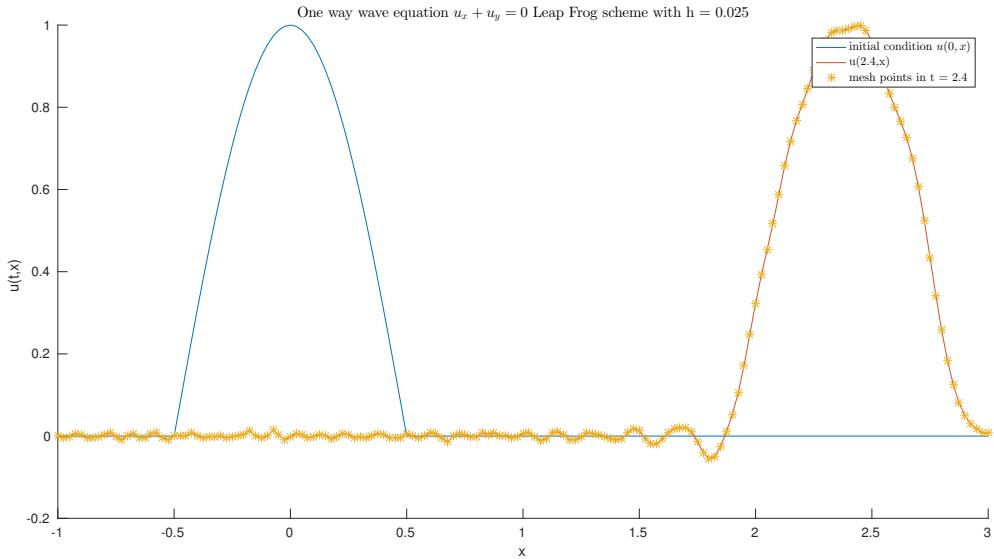


Figure 16- Equação da onda unidimensional com esquema Leap Frog com Número de Courant $\lambda = 0.8$ e $h = \frac{1}{40}$.

também que ao se aumentar o número de passos no espaço, a solução melhora de forma considerável. O método aqui não apresenta nenhum comportamento difusivo, o que é importante neste tipo de equação apenas advectiva. O problema neste esquema é que ele apresenta oscilações espúrias onde a EDP deveria ser igual a 0. Porém com o refino de h essas oscilações se tornam cada vez mais irrelevantes com menor amplitude, logo o método pode ser considerado bom para o problema resolvido.

Exercício 2 - Solução numérica do sistema de equações da onda unidimensional

O objetivo aqui é verificar a solução do sistema de equações da onda unidimensional. Será usado $h = \frac{1}{20}$ e $\lambda = \frac{1}{2}$. O sistema de equações é dado por

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{3}(t-2)u_x + \frac{2}{3}(t+1)w_x + \frac{1}{3}u = 0 \\ w_t + \frac{1}{3}(t+1)u_x + \frac{1}{3}(2t-1)w_x - \frac{1}{3}w = 0 \end{cases}.$$

$$u(0, x) = \max(0, 1 - |x|)$$

$$w(0, x) = \max(0, 1 - 2|x|)$$

As condições de contorno para a primeira variável são $u(t, -3) = 0$ e $u(t, 3) = 0$. Já para a segunda variável $w_m^{n+1} = w_{m-1}^{n+1}$ e $w_1^{n+1} = w_2^{n+1}$, ou seja, irá copiar os valores mais próximos calculados para o contorno. O problema será resolvido para $x \in [-3, 3]$ e $t \in [0, 2]$. O esquema empregado será o de Lax-Fridrichs.

As duas variáveis apresentam um comportamento geral muito parecido, realizando uma advecção da solução inicial na direção x positiva. Um dos problemas do esquema de Lax, já visto na Seção 1, é a difusão numérica, é visível que ele novamente apresenta esse mesmo comportamento. Apesar da difusão numérica, as soluções tendem a apresentar um crescimento a partir de $t = 1.5$ como pode ser visto nas Figuras 17 e 18, visto que ambas as taxas variação

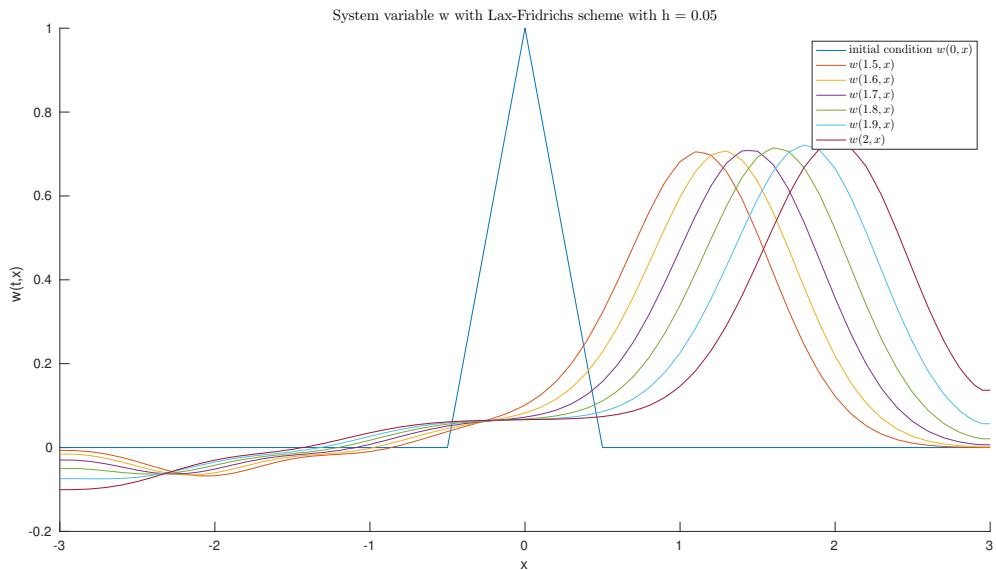


Figure 17- Equação da onda unidimensional com esquema Leap Frog com Número de Courant $\lambda = 0.8$ e $h = \frac{1}{40}$.

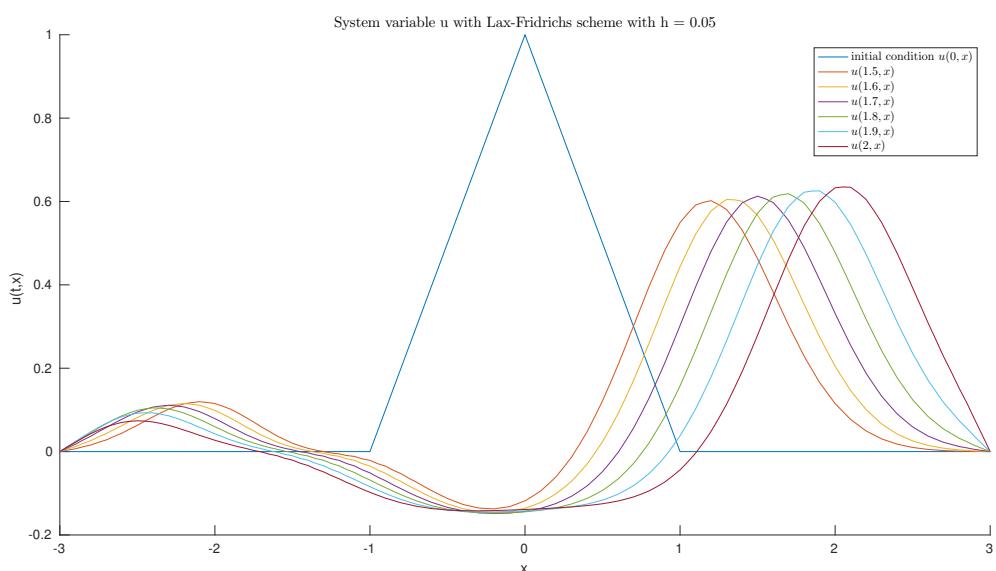


Figure 18- Equação da onda unidimensional com esquema Leap Frog com Número de Courant $\lambda = 0.8$ e $h = \frac{1}{40}$.

espacial são dependentes do tempo. A variável w apresenta um comportamento oscilatório maior que a variável u .