1. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

   (a) Deduz a solução do problema abaixo usando o método de D'Alambert

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\, u_{xx} = 0 & (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\infty), \\ u(0,x) = f(x) & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

   (b) Achar a solução do problema (1) para $f(x) = 1$ e $g(x) = 0$.

   (c) Achar a solução do problema (1) para $c = 1$, $f(x) = 0$ e $g(x) = sen(x)$.

   (d) Achar a solução do problema (1) para $c = 1$, $f(x) = 1$ e $g(x) = sen(x)$.

2. Fazer a seguintes mudanças de variáveis:

   (a) Escrever a EDP $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ nas novas variáveis $\xi = 2x$, $\eta = 2ct$.

   (b) Escrever a EDP $u_{xx} + 5u_{yx} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0$ nas novas variáveis $\xi = 2y - 5x$, $\eta = -3x$.

   (c) Escrever a EDP $xu_{xx} + 2xu_{xy} + xu_{yy} + yu_y = 0$ nas novas variáveis $\xi = y - x$, $\eta = x$.

3. Seja $v = v(t,x)$ solução do problema

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2\, v_{xx} = 0 & (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\ell), \\ v(t,0) = v(t,\ell) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

   Considere

$$I(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell (c^2 v_x^2 + v_t^2) dx \quad \text{para } t \geq 0.$$

   (a) Mostrar que $I'(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

   (b) Mostrar que se $v = v(t,x)$ é solução de

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2\, v_{xx} = 0 & (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\ell), \\ v(0,x) = 0 & x \in [0,\ell], \\ v_t(0,x) = 0 & x \in [0,\ell], \\ v(t,0) = v(t,\ell) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

   então $I(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Daí deduzir que então $v = 0$.

(c) Mostrar que o problema a seguir tem uma única solução:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\ell), \\ u(0,x) = f(x) & x \in [0,\ell], \\ u_t(0,x) = g(x) & x \in [0,\ell], \\ u(t,0) = v(t,\ell) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

4. Sejam $c > 0$ e $b > 0$. Achar todas as possíveis soluções em variáveis separadas do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} + 2bu_t = 0 & (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\ell), \\ u(t,0) = u(t,\ell) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

5. Do livro do professor Reginaldo fazer os problemas da seção 4.1 números 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10.
   Atenção: O coeficiente a, corresponde ao que na aula chamamos de c, i.e. à velocidade de propagação da onda.