1. Usar o desenvolvimento em série de Fourier de $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ se $-\pi \leq x \leq 0$ e $f(x) = \text{sen}(x)$ se $0 < x \leq \pi$ para calcular a série de Fourier de $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 0$ se $-\pi \leq x \leq 0$ e $g(x) = \cos(x)$ se $0 < x \leq \pi$.

2. O desenvolvimento em série de Fourier da função $f(x) = x$ em $[-\pi, \pi]$ é

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}(nx), \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

   (a) Usando este desenvolvimento calcular a série de Fourier da $g(x) = x^2$ em $[-\pi, \pi]$.

   (b) A partir do desenvolvimento da função g mostrar que

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

   (c) Mostrar que

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

   (d) Calcular a série de Fourier de $h(x) = x^3$ em $[-\pi, \pi]$.

   Dica: Em (a) usar que $g'(x) = 2f(x)$ e o teorema de convergência uniforme para calcular a série de Fourier de $g(x)$. Em (b) usar o teorema de convergência pontual para avaliar a série de Fourier de g nos pontos $x = 0$ e $x = \pi$. Em (c.1) integrar g entre 0 e $\pi/2$ e usar a convergencia uniforme da série de Fourier (ver exercicio 4). Por ultimo, usar a identidade de Parseval para calcular (c.2). Em (d), integrar $g(t)$ entre 0 e x e usar que a série de Fourier de g converge uniformemente para calcular a série de Fourier de $H(x) = (x^3 - 4x)/3$ em $[-\pi, \pi]$. Por último usar que $h = 3H + 4f$.

3. Seja a função $f(x) = x - x^2$ no intervalo $0 \leq x \leq 1$.

   (a) Será que $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ou as suas extenções par $f_p : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ e impar $f_I : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ verificam as hipóteses teorema da convergência uniforme de séries de Fourier? Qual (ou quais) destas verificam essas hipóteses?

   (b) Escrever f como uma série de senos usando f_I'.

   (c) Escrever f como uma série de cossenos usando f_P'.

4. Determinar a série de Fourier de $h(x) = |x|$ em $[-\pi, \pi]$ usando a série de Fourier da função degrau $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$, $x \in [-\pi, 0]$ e $f(x) = 1$, $x \in [0, \pi]$.

   Dica: Checar que h verifica o teorema da convergência uniforme. Portanto, a sua série de Fourier pode ser obtida desde a serie de Fourier de h'.

5. Calcular a série de Fourier da função $h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = -1$ em $[-\pi, 0]$ e $h(x) = 1$ em $(0, \pi]$ usando o desenvolvimento da série de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x \leq 0, \\ \pi + x & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

   Dar explicitamete o desenvolvimiento de $f(x)$