1. Sejam

$$f(x) = x, \quad g(x) = x - 2L \quad \text{e} \quad h(x) = |x| \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Determine a série de Fourier $S_\infty f$ e $S_\infty h$ de f e h em $[-L, L]$ respectivamente.

1. Compare os valores de $S_\infty f$ e $S_\infty h$ em $[0, L]$. Mais precisamente, para que valores $x \in [0, L]$ se tem que $S_\infty f(x) = S_\infty g(x)$?
(Dica: Recorde-se do teorema de convergência pontual.)
2. Use a fórmula de $S_\infty f$ obtida para encarar

$$S_\infty f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

e tal como na pergunta anterior compare os valores de $S_\infty f$ com os de g em $[L, 3L]$.

Dica: Observe a série de Fourier de f no intervalo $[a, b]$ é uma função periódica de período $T = b - a$. Lembrar que a série de Fourier de f em $[a, b]$ para valores de $x \in [a, b]$ aproxima a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, que dizer,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x), \quad x \in [a, b].$$

Portanto, a série de Fourier de f em $[a, b]$ na verdade aproxima a extenção T-periódica de f.

2. Considere a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ em $[0, \pi]$.
   (a) Determine a sua extenção a função par f_p em $[-L, L]$, como uma função definida por ramos.
   (b) Determine a série de Fourier de f_p.

3. Seja $f(x) = x - x^2$. Escreva uma série de senos para f em $[0, 1]$, e uma série de cossenos para f em $[0, 1]$.

4. (a) Enunciar o teorema de convergência em média quadrática de séries de Fourier.
   (b) Enunciar e provar a identidade de Parsevall para séries de Fourier.

   Dica: Para provar a identidade de Parsevall primeiramente mostrar que

$$\|f - S_N f\|^2 = \int_a^b f(x)^2\, dx - \frac{b-a}{2} \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + b_n^2 \right\}. \tag{1}$$

onde

$$S_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x), \qquad x \in [a, b].$$

Depois, deduze a identidade usando o teorema de convergência em média quadrática para tomar limite em (1).