1. Determine a série de Fourier das funções a seguir nos intervalos indicados:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -L \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -k, & -L \leq x < 0, \\ k, & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Dica: Observe que $g(x) = -k + 2k \cdot f(x)$.

2. Calcula a série de Fourier de

   1. $f(x) = 2$ em $[-1, 1]$,
   2. $g(x) = \text{sen}^2(x)$ em $[-\pi, \pi]$,
   3. $F(x) = \text{sen}(x)$ em $[-\pi, \pi]$,
   4. $G(x) = \text{sen}(\pi x)$ em $[-\pi, \pi]$.

3. (a) Enunciar o teorema de convergencia pontual de séries de Fourier.

   (b) Seja

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0, \\ x^2 - 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Avaliar a série de Fourier de f em $[-1, 1]$ nos pontos, $x = 0$, $x = 1/2$, $x = -1/2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$, $x = -2$, $x = -3/2$ e $x = 5$.

4. A partir do desenvolvimento em série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

calcular o valor da séries numéricas a seguir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Dica: Usar o teorema de convergência pontual para avaliar a série de Fourier de f no ponto $x = 0$. Daí concluir que o valor da soma do inverso dos números impares ao quadrado é $I = \pi^2/8$. Finalmente mostrar que a o valor S da soma dos inversos dos números naturais verifica que $S = \frac{1}{4}S + I$. Daí obter o valor de $S = \pi^2/6$ e o valor da soma dos inversos dos números pares $P = \pi^2/24$.

5. Seja $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $-\pi \le x \le 0$ e $f(x) = \text{sen}(x)$ se $0 < x \le \pi$. O desenvolvimento em série de Fourier de f em $[-\pi, \pi]$ é

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(2nx) + \frac{1}{2} \text{sen}(x), \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

   (a) Calcular o valor de

   $$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots$$

   (b) A partir dos coeficientes do desenvolvimento em série de Fourier de f calcular o valor de

   $$\int_0^{\pi} \text{sen}^2(x)\, dx.$$

   (c) Usar a identidade de Parsevall para calcular o valor de

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}.$$

   (d) A partir do desenvolvimento em série de Fourier de f calcular a série de Fourier tipo cosseno de $h(x) = \text{sen}(x)$, $x \in [0, \pi]$.

6. Sejam

$$f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \le x \le 0, \\ \pi + x & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

   (a) Calcular a série de Fourier de f em $[-\pi, \pi]$.

   (b) Calcular o valor de

   $$\sum_{n=1} \frac{1}{n^2} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1} \frac{1}{n^4}.$$

   Dica: Observe que a série de Fourier de f pode ser calcular via o desenvolvimento das séries de Fourier em $[-\pi, \pi]$ das funções $F(x) = |x|$ e $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 0$ em $[-\pi, 0]$ e $g(x) = \pi$ em $(0, \pi]$. Finalmente, calcule os valores da séries numéricas acima usando usando o teorema da convergencia pontual aplicado para f e a identidade de Parcevall aplicado para F respectivamente. Observe que também podem ser calculadas aplicando a identidade de Parsevall para g e f respectivamente.