A seguir resumimos o que vamos aprender dos exercícios desta lista:

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função de quadrado integrável, quer dizer, em $L^2([a, b])$. A *série de Fourier de f em $[a, b]$* é definida pela expressão

$$S_\infty f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{2\pi}{b-a} \quad \text{frequência fundamental em } [a, b], \\ a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \, \cos(n\omega_0 x) \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \, \operatorname{sen}(n\omega_0 x) \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

1. Notar que a série de Fourier é na verdade um limite de polinômios trigonométricos. Em símbolos,
$$S_\infty f(x) = \lim_{N \to \infty} S_N f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$
onde
$$S_N f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x)$$
é o chamado *polinômio trigonométrico de grau N*.

2. A série de Fourier é uma função periódica de período $T = b - a$ (ver Exercício 4).

3. No exercício 1 mostraremos que a série de Fourier de f em $[a, b]$ é a melhor aproximação de f por polinômios trigonométricos. Por esse motivo escrevemos
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x), \quad x \in [a, b].$$

4. O exercício 3, mostra que os coeficientes da série de Fourier $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ devem ser sequências de números reais assim que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. De fato, da desigualdade de Bessel se segue que eles debem verificar que
$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 < \infty.$$
Isto quer dizer que não qualquer série trigométrica pode ser de Fourier (ver Exercício 5).

1. Seja $f \in L^2([a,b])$ e $\omega_0 = 2\pi/(b-a)$. Provar que para todo $N \in \mathbb{N}$, o mínimo do error

$$
\begin{aligned}
E(a_0, a_1, \ldots, a_N; b_1, \ldots, b_N) &= \|f(x) - (\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x))\|^2 \\
&\overset{\text{def}}{=} \int_a^b \Big(f(x) - (\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x))\Big)^2 \, dx
\end{aligned}
$$

é atingido quando

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos(n\omega_0 x) \, dx, \quad n = 0, 1, \ldots, N, \\
b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(n\omega_0 x) \, dx, \quad n = 1, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

Dica: Ver solução no pdf *Fourier Series*.

2. (*Desigualdade de Bessel*) Seja $f \in L^2([a,b])$. Mostrar que vale a seguinte desigualdade:

$$
\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{2}{b-a} \int_b^a f(x)^2 \, dx
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= \frac{2\pi}{b-a} \quad \text{frequência fundamental em } [a,b], \\
a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos(n\omega_0 x) \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\
b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(n\omega_0 x) \, dx, \quad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Dica: Ver solução no pdf *Fourier Series*.

3. Prova que para toda $f \in L^2([a,b])$ vale que

$$
\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cos(n\omega_0 x) \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(n\omega_0 x) \, dx = 0.
$$

Dica: Usar a desigualdade de Bessel.

4. Calcular o período fundamental de

   1. $\cos(\frac{\pi}{2}x)$,
   2. $\text{sen}(\pi x)$,
   3. $4 + \cos(\frac{2\pi}{3})$,
   4. $3\cos(\frac{\pi}{2}x) + 5\,\text{sen}(\pi x)$,
   5. $4 + \cos(\frac{2\pi}{3}) + 9\,\text{sen}(\pi x)$,
   6. $A + B\cos(n\omega_0 x) + C\,\text{sen}(m\omega_0 x)$, $\omega_0 = 2\pi/(b-a)$ e $A, B, C \in \mathbb{R}$,
   7. $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n\,\text{sen}(n\omega_0 x)$ onde $\omega_0 = 2\pi/(b-a)$ e $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots$

   Respostas:

   1. $T = 4$,
   2. $T = 2$.
   3. $T = 3$,
   4. $T = 4$,
   5. $T = 6$,
   6. $T =$ mínimo múltiplo comum de $(b-a)/n$ e $(b-a)/m$,
   7. $T = b - a$.

5. Determina se expressões trigonométricas podem ser ou não Séries de Fourier de f:

   (a) $f(x) \sim 3\,\text{sen}(2x) + 5\cos(4x), \quad x \in [-\pi, \pi]$,

   (b) $f(x) \sim 3\,\text{sen}(2x) + 5\cos(4x), \quad x \in [-2, 2]$,

   (c) $f(x) \sim \cos(5\pi x), \quad x \in [3, 3]$,

   (d) $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos(nx) + (2n-1)^2\,\text{sen}(nx), \quad x \in [-\pi, \pi]$,

   (e) $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\cos(nx), \quad x \in [-\pi, \pi]$.

   Dica:

   1) Analisa se a frequência fundamental é a correta em (a), (b), (c). Analisa o decaimento dos coeficientes em (d) e usa a desigualdade de Bessel em (e).