1. Sejam $f, g \in L^2([a,b])$. Prova que

$$f + g \in L^2([a,b]) \quad \text{e que} \quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx < \infty.$$

   Dicas:

   1) Provar que $(A+B)^2 \leq 4(A^2+B^2)$ para quaisquer par de numero reais A, B.

   2) Usar a desigualdade anterior para provar $f+g$ é de quadrado integrável.

   3) Provar que a função produto fg é integrável usando que $(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$.

2. Determina o período fundamental da funções $\operatorname{sen}(n\omega_0 x)$ e $\cos(n\omega_0 x)$ onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{b-a}$ e $n \geq 1$. Prova que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ vale,

$$\begin{aligned}
\langle 1, 1\rangle &= b - a \\
\langle 1, \cos(n\omega_0 x)\rangle &= \int_a^b \cos(n\omega_0 x)\,dx = 0 \\
\langle 1, \operatorname{sen}(n\omega_0 x)\rangle &= \int_a^b \operatorname{sen}(n\omega_0 x)\,dx = 0 \\
\langle \cos(n\omega_0 x), \operatorname{sen}(m\omega_0 x)\rangle &= \int_a^b \cos(n\omega_0 x)\operatorname{sen}(m\omega_0 x)\,dx = 0 \\
\langle \cos(n\omega_0 x), \cos(m\omega_0 x)\rangle &= \int_a^b \cos(n\omega_0 x)\cos(m\omega_0 x)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{b-a}{2} & n = m \end{cases} \\
\langle \operatorname{sen}(n\omega_0 x), \operatorname{sen}(m\omega_0 x)\rangle &= \int_a^b \operatorname{sen}(n\omega_0 x)\operatorname{sen}(m\omega_0 x)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{b-a}{2} & n = m. \end{cases}
\end{aligned}$$

   Dicas:

   1) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se periódica de período T se $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O menor valor de T possível diz-se período fundamental da função f. Observar que $L = b - a$ é um período de ambas funções $\cos(n\omega_0 x)$ e $\operatorname{sen}(m\omega_0 x)$.

2) Usar as identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\Big),$$
$$\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\Big),$$
$$\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\Big).$$

3. Seja $\{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ um sistema ortogonal de vetores. Prova que para todo N, a familia de vetores $\{u_i : i = 1, \ldots, N\}$ é linearmente independente. Usa este resultado para mostrar que o espaço vetorial $L^2([a,b])$ não pode ter dimensão finita.

   Dicas:

   1) Um sistemas de vetores $\{u_i : i = 1, \ldots N\}$ diz-se linearmente independente se nenhum vetor u_i pode-se escrever como combinação linear do resto. Em outras palavras, se

   $$a_1 u_1 + \cdots + a_N u_N = 0 \quad \Rightarrow \quad a_i = 0 \ \text{ para todo } \ i = 1, \ldots, N.$$

   2) Multiplica usando o produto escalar ambos lados da igualdade $a_1 u_1 + \cdots + a_N u_N = 0$ pelo vector u_i. Usa a linearidade do produto escalar e as relações de ortogonalidade entre vetores para concluir que $a_i = 0$.

   3) Usar o Exercício 2 para concluir que $L^2([a,b])$ não pode ter dimensão finita.

4. Seja

   $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x), \quad x \in [a,b] \tag{1}$$

   onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{b-a}$ e $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, \ldots, N$. Provar que

   $$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\ \cos(n\omega_0 x)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N$$
   $$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\ \operatorname{sen}(n\omega_0 x)\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

   Dicas:

   1) Repete o tipo de argumento do Exercício 3: Multiplica usando o produto escalar ambos lados da igualdade (1) pelas funções trigonométrica $\operatorname{sen}(n\omega_0 x)$ para $n = 1, \ldots, N$ e $\cos(n\omega x)$ para $n = 0, 1, \ldots, N$. Usa a linearidade do produto escalar e as relações de ortogonalidade que foram calculada no Exercício 2.

5. (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*) Prova a seguinte desigualdade:

$$\Big|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Big| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx}\,\sqrt{\int_a^b g(x)^2\,dx} \quad f,g \in L^2([a,b]).$$

Dicas:

1) Observe que a desigualdade anterior pode-se reescrever da forma $|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\cdot\|g\|$ onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto interno de $L^2([a,b])$ e $\|\cdot\|$ a norma induzida.

2) Prova que

$$0 \leq r^2\,\|f\|^2 + 2r\,\langle f,g\rangle + \|g\|^2 \quad \text{for all } r \in \mathbb{R}.$$

Usa o desenvolvimento do produto escalar $\langle rf+g, rf+g\rangle$.

3) Estuda o discriminate do polinômio acima na variável r. Primeiramente observa que o sinal do discriminante deve ser não positivo ($\Delta \leq 0$) para que a grafica deste polinômio (uma parábola) esteja no semiplano superior. Usa este fato para inferir então a desigualdade.