

Notas para um curso de Cálculo 1
Duilio T. da Conceição

Sumário

1	WOLFRAM ALPHA	5
1.1	Digitando Fórmulas e Expressões Matemáticas	6
1.1.1	Expoentes	6
1.1.2	Multiplicação	6
1.1.3	Divisão	7
1.1.4	Chaves e colchetes	7
1.1.5	Raiz Quadrada	7
1.1.6	Raiz Cúbica e Raiz n-ésima	7
1.1.7	Funções Trigonométricas	7
1.1.8	Exponencial Natural	8
1.1.9	Logaritmo	8
1.2	Gráfico de uma função	8
1.2.1	Especificando o Domínio do Gráfico	9
1.2.2	Plotando mais de uma Função	9
1.2.3	Gráfico de Curvas Parametrizadas	10
1.2.4	Gráficos de Equações Implícitas	10
1.3	Limites	10
1.3.1	Limite Lateral	11
1.4	Derivadas	12
1.4.1	Derivadas Parciais	12
1.5	Integrais	13
1.5.1	Integrais Indefinidas	13
1.5.2	Integrais Definidas	13
1.5.3	Integrais Múltiplas	14
1.5.4	Integração Numérica	14
2	WINPLOT	17

4

SUMÁRIO

3 MAXIMA

19

Capítulo 1

WOLFRAM ALPHA

O *Wolfram Alpha* é um software que funciona online, isto é, em um endereço da internet:

www.wolframalpha.com

que possibilita fazer o gráfico de funções, calcular limites, derivadas e integrais de funções, bem como muitos outros tipos de calculos (veja os exemplos no conteúdo da página da internet).

Ele é baseado no software *Mathematica* da empresa Wolfram. A versão online, Wolfram Alpha, como é uma versão livre, não possui todas as funcionalidades, mas já é uma boa ferramenta para o curso de cálculo.

Existem outros software que realizam estas tarefas:

- Maple
- Maxima (uso livre)

Cada um tem a sua própria forma de uso. Tais softwares são conhecidos pela sigla **CAS** (*Computer Algebra System*, que significa Sistema de Computação Algébrica).

Usando o Wolfram Alpha:

A tela inicial é mostrado na Figura 1.1.

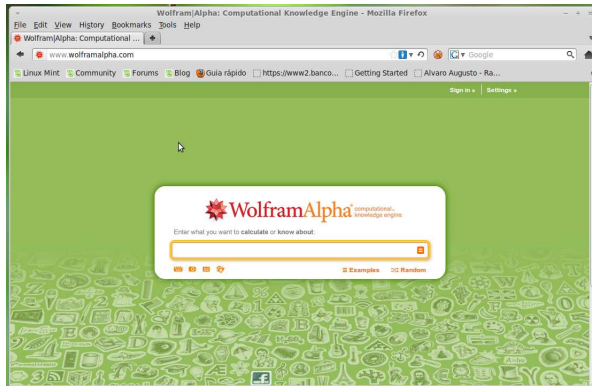


Figura 1.1:

1.1 Digitando Fórmulas e Expressões Matemáticas

Para a digitação de algumas fórmulas e equações matemáticas é necessário saber algumas coisas:

1.1.1 Expoentes

O expoente é colocado com o caractere \wedge , o mesmo do acento circunflexo.

Por exemplo: Para digitar a expressão x^3 devemos digitar

$$x \wedge 3$$

Note que em alguns computadores para digitar o caractere \wedge devemos digitar a sequência:

$$\wedge \quad \text{ESPAÇO}$$

E portanto, para digitar x^3 deve-se digitar:

$$x \wedge \text{ESPAÇO } 3$$

1.1.2 Multiplicação

A multiplicação é feita com o caractere $*$. Por exemplo, escrever $2x^3 - 7x + 1$ é feito como

$$2*x\wedge 3-7*x+1$$

1.1.3 Divisão

A divisão é feita com o caractere /. Por exemplo, para digitar $\frac{x+1}{x-3}$:

$$(x+1)/(x-3)$$

Note que é necessário usar parêntes pois existe uma ordem para a realização das operações matemáticas, que apresentamos na subseção

1.1.4 Chaves e colchetes

Não são usados para separar fórmulas. Usamos apenas parênteses para isso.

1.1.5 Raiz Quadrada

A raiz quadrada é obtida com o comando `sqrt`. Por exemplo, para digitar $\sqrt{3x+1}$ fazemos

$$\text{sqrt}(3*x+1)$$

1.1.6 Raiz Cúbica e Raiz n-ésima

A raiz cúbica é obtida usando-se o expoente 1/3. Isto implica que para digitar $\sqrt[3]{x-3}$ fazemos

$$(x-3)^(1/3)$$

De modo análogo, para digitar $\sqrt[4]{4x-1}$ fazemos:

$$(4*x-1)^(1/4)$$

1.1.7 Funções Trigonômicas

Como o programa é em inglês algumas funções tem seus nomes diferentes das em português. A seguir temos os nomes delas:

- *sin* : função seno (note que é sin, e não sen).
- *cos* : função cosseno.
- *tan* : função tangente.

- *cot* : função cotangente.
- *sec* : função secante.
- *csc* : função cossecante.

1.1.8 Exponencial Natural

A função exponencial com base e é dada pela expressão *exp*. Desse modo, a função e^x é escrita no software como *exp(x)*.

1.1.9 Logaritmo

O logaritmo usual é o logaritmo natural, isto é, com base e .

1.2 Gráfico de uma função

O gráfico de uma função é pode ser feita com o comando:

```
plot <FUNCAO>
```

onde <FUNCAO> é a função que você quer desenhar.

Por exemplo, para desenhar a função $f(x) = \text{sen}(x)$, basta digitar o seguinte comando:

```
plot sin x
```

com espaço entre `plot`, `sin`, e o `x`. Ou podemos também digitar nesta outra forma: `plot sin(x)`.

EXERCÍCIO: Trace o gráfico das seguintes funções através do comando acima descrito

a) $f(x) = x^2 - x + 1$

b) $g(x) = \frac{4x - 3}{7x - 1}$

c) $f(x) = \cos(x)$

d) $f(x) = \operatorname{sen}(x + 1)$

e) $f(x) = \cos(x + \pi)$

1.2.1 Especificando o Domínio do Gráfico

Note que o intervalo no eixo x para o qual o programa faz o gráfico da função é decidido pelo programa, mas o usuário pode também especificar qual o intervalo em x que será feito o gráfico da função. Para isso usamos mais um parâmetro de entrada na linha de comando, da seguinte forma:

```
plot <FUNCAO> , x=a..b
```

onde x é a variável da função, a e b são os extremos do intervalo de definição do domínio.

Por exemplo, para plotar a função $f(x) = x^2$, com $x \in [-2, 2]$, devemos fazer

```
plot x^2 , x=-2..2
```

Note que no eixo x vai de -2 a 2. Podemos agora mudar o intervalo que desejamos plotar o gráfico fazendo, por exemplo,

```
plot x^2 , x=-4..10
```

e perceber que o gráfico agora parece diferente. O que mudou foi que plotamos em um intervalo em x maior.

EXERCÍCIO: Plote o gráfico de $f(x) = \cos(x)$ quando $x \in [-3, 3]$, e quando $x \in [-6, 6]$.

1.2.2 Plotando mais de uma Função

Podemos também plotar mais de uma função em um mesmo gráfico e assim comparar o comportamento de duas funções utilizando seu gráfico.

Para plotar duas funções $f(x)$ e $g(x)$ cujos domínios para desenhar é $[a, b]$ fazemos uso do seguinte:

```
plot f(x) , g(x) , x=a..b
```

Por exemplo:

a) Desenhe o gráfico das seguintes funções no intervalo $[-3, 3]$:

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = x^3$$

Para fazer isso fazemos o comando:

```
plot x^2 , x^3 , x=-3..3
```

1.2.3 Gráfico de Curvas Parametrizadas

1.2.4 Gráficos de Equações Implícitas

1.3 Limites

Para calcular limites usamos o comando `limit`. Ele é usado na forma:

```
limit <EXPRESSÃO> as <VARIÁVEL>-> <PONTO>
```

onde

- <EXPRESSÃO>
- <VARIÁVEL>
- <PONTO>

Para calcular limites quando $x \rightarrow \infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, usamos as palavras `infinity` ou `-infinity`, respectivamente.

Por exemplo: Calculemos os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

Para calcular esse limite fazemos:

```
limit (x^2 -x - 2)/(x-2) as x->2
```

É importante notar que o próprio software também faz um gráfico da função em torno do ponto $x = 2$, e é importante que o leitor note que em $x = 2$ há um "buraco" no gráfico com um pequeno círculo.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

Comando:

limit (x^2 - x - 2)/(x-2) as x->0

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$

Comando:

limit 1/x as x->infinity

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Comando: limit (1+1/n)^n as n->infinity

Note que o limite não precisa ser sempre na variável x , você pode usar outra letra para a variável do problema.

1.3.1 Limite Lateral

Para o cálculo de limite lateral usamos o mesmo comando, mas dizendo apenas para qual lado tomamos o limite usando o sinal de + ou - logo após o valor para o qual estamos tomando o limite, o que é bem natural.

Por exemplo:

a) Para calcular o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$$

Fazemos:

limit (1/x) as x- >0+

b) Para calcular o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$$

Fazemos:

limit (1/x) as x- >0-

1.4 Derivadas

A forma mais básica para calcular a derivada de uma função é a seguinte:

derivative of <FUNÇÃO>

onde <FUNÇÃO> é a função que queremos calcular a derivada. Alternativamente, podemos usar em lugar de **derivative of** a expressão **d/dx**.

Vejamos como calcular a derivada da função $f(x) = x^3 + 7x$:

Forma 1:

derivative of $x^3 + 7x$

Forma 2:

d/dx $x^3 + 7x$

A segunda forma é mais curta e também especifica qual é a variável que estamos realizando a derivada. Em um curso mais avançado de cálculo isso será importante (caso de funções de mais de uma variável).

1.4.1 Derivadas Parciais

O cálculo de derivadas parciais é feito em cursos de cálculos mais avançados. A derivada parcial com respeito a variável x é calculada com o comando:

d/dx <FUNÇÃO>

onde <FUNÇÃO> é a função que queremos calcular a derivada parcial com respeito a variável x . De modo análogo, o cálculo da derivada parcial com respeito a variável y é

d/dy <FUNÇÃO>

Por exemplo, para calcular a derivada parcial com respeito a x de $f(x, y) = x^3 - y * \cos(x + 1) + 4y^5$ é feito com

d/dx $x^3 - y \cos(x + 1) + 4y^5$

1.5 Integrais

O Wolfram Alpha também pode calcular integrais definidas e indefinidas como veremos a seguir.

1.5.1 Integrais Indefinidas

A forma de se calcular uma integral indefinida é:

`int <FUNÇÃO> dx`

ou pode também ser:

`integrate <FUNÇÃO> dx`

onde <FUNÇÃO> é a função que você quer calcular a integral.

Por exemplo:

`int x^8 dx`

1.5.2 Integrais Definidas

Integrais definidas são calculadas com o comando:

`int <FUNÇÃO> dx from a to b`

onde

- <FUNÇÃO> é a função a ser integrada
- a é o limite inferior da integral definida
- b é o limite superior da integral definida

Por exemplo, para calcular a integral

$$\int_{-2}^5 x^2 dx$$

usamos o comando:

`int x^2 dx from -2 to 5`

Uma outra forma de especificar os limites de integração é em lugar de **from a to b** utilizar: **, x=a..b** .

Desse modo, o exemplo acima ficaria:

`int x^2 dx , x=-2..5`

Vejamos outro exemplo, como calcular a integral $\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$

Neste caso fazemos:

`int sin^2 (x) dx from 0 to pi`

Um outro tópico importante são as integrais com limites infinitos, como por exemplo

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Para calcular tal integral usamos a palavra **infinity** como a seguir:

`int e^(-x^2) dx from 0 to infinity`

1.5.3 Integrais Múltiplas

As integrais em domínios do \mathbb{R}^2 podem ser calculados de forma analoga ao acima.

Digamos que queremos calcular a integral dupla

$$\int_0^1 \int_0^{\pi} x^2 \sin y \, dx dy$$

Neste caso usariamos o comando:

`int x^2 sen y dx dy , x=0..1, y=0..pi`

1.5.4 Integração Numérica

Para este tópico recomendamos o link:

<http://www.wolframalpha.com/examples/NumericalIntegration.html>

onde são apresentados diversas formas de uso deste recurso.

Vejamos aqui alguns exemplos básicos. Para calcular a integral:

$$\int_{-2}^2 e^{-x^2} dx$$

Ponto Médio

Usamos:

integrate $e^{(-x^2)}$ on $[-2,2]$ using midpoint rule

Trapézio

Usamos:

integrate $e^{(-x^2)}$ on $[-2,2]$ using trapezoidal rule

Simpson

Usamos:

integrate $e^{(-x^2)}$ on $[-2,2]$ using simpson's rule

Capítulo 2

WINPLOT

O Winplot é um software gratuito que pode ser usado para fazer gráficos

Capítulo 3

MAXIMA

O Maxima é um sistema semelhante ao Maple, mas de uso livre que tem melhorado com últimos anos. Há também um forma online : <http://maxima-online.org>