

Suite des indices de Lefschetz des itérés pour un domaine de Jordan qui est un bloc isolant.

Patrice Le Calvez, Jean-Christophe Yoccoz

22 avril 1997

§0. Notations.

Le plan \mathbf{R}^2 est muni de son orientation usuelle.

On écrit respectivement \overline{X} et ∂X pour l'adhérence et la frontière d'une partie X de \mathbf{R}^2 ; on note $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes de X .

Une *courbe de Jordan* est une partie C de \mathbf{R}^2 homéomorphe au cercle

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} ;$$

un *domaine de Jordan* est la composante connexe bornée du complémentaire d'une courbe de Jordan. Toutes les courbes de Jordan seront orientées positivement et pour deux points distincts x et y de C , nous noterons $(x, y)_C$ l'arc ouvert issu de x et aboutissant en y .

Pour tout ensemble E , on note $\mathbf{Z}(E)$ le \mathbf{Z} -module libre engendré par E .

A tout morphisme $h : H \rightarrow H$ de rang fini défini sur un \mathbf{Z} -module libre H est associé canoniquement un élément \widehat{h} de $H^* \otimes H$, où H^* est le dual de H . En utilisant l'évaluation

$$e : H^* \otimes H \rightarrow \mathbf{Z}, \lambda \otimes x \rightarrow \lambda(x) ,$$

on définit la trace de h en posant $\text{Tr}(h) = e(\widehat{h})$.

§1. Rappels, énoncé des résultats.

Rappels sur les domaines de Jordan.

Un résultat de Kérékjarto nous dit que toute composante connexe de l'intersection de deux domaines de Jordan est un domaine de Jordan (voir [LY]). Le résultat est plus précis. Soient U et U' deux domaines de Jordan tels qu'aucune des relations $U \subset U'$, $U' \subset U$ et $U \cap U' = \emptyset$ ne soit vérifiée, et V une composante connexe de $U \cap U'$. Alors on a les propriétés suivantes, où $C = \partial U$, $C' = \partial U'$ et $C'' = \partial V$:

- les composantes connexes de $C'' - C$ déterminent une famille $((x_i, y_i)_{C'})_{i \in I}$ au plus dénombrable d'arcs de C' , où x_i et y_i sont des points distincts de $C \cap C' \cap C''$;
- on a $\pi_0(C - C'') = \{(x_i, y_i)_C, i \in I\}$;
- chaque ensemble $(x_i, y_i)_C \cup (x_i, y_i)_{C'} \cup \{x_i, y_i\}$ est une courbe de Jordan bordant un domaine de Jordan O_i ;
- on a $\pi_0(U - \overline{V}) = \{O_i, i \in I\}$;

- on peut construire une application continue $c : C \cup C'' \rightarrow C''$, égale à l'identité sur C'' et induisant un homéomorphisme préservant l'orientation entre C et C'' qui envoie chaque arc $(x_i, y_i)_C$ sur $(x_i, y_i)_{C''}$.

Remarquons également que si U et U' sont deux domaines de Jordan tels que $U' \cap (\mathbf{R}^2 - \bar{U}) \neq \emptyset$, alors toute composante connexe de $U \cap (\mathbf{R}^2 - \bar{U}')$ est un domaine de Jordan. Il suffit en effet d'appliquer le résultat de Kérékjarto au plan $(\mathbf{R}^2 \sqcup \{z_\infty\}) - \{z\}$, où z_∞ est le point à l'infini et z un point de $U' \cap (\mathbf{R}^2 - \bar{U})$.

Rappels sur l'indice de Lefschetz.

Soit $f : M \rightarrow M$ une application continue définie sur une variété M . Pour toute partie ouverte U telle que $Z = \text{Fix}(f) \cap U$ est compact, on peut définir l'indice de Lefschetz $i(f, U)$ (voir [?]). On sait alors que $i(f, \emptyset) = 0$ et, dans le cas où f est un homéomorphisme, que l'on a

$$i(f, U) = (-1)^d i(f^{-1}, f(U)) = (-1)^d i(f^{-1}, U),$$

où d est la dimension de M . Si U' est une autre partie ouverte telle que $\text{Fix}(f) \cap U' = Z$, alors on a

$$i(f, U) = i(f, U').$$

En posant

$$i(f, Z) = i(f, U),$$

on peut donc définir l'indice de Lefschetz $i(f, Z)$ d'une partie compacte ouverte de $\text{Fix}(f)$. Si Z se réduit à un point fixe isolé z de f , c'est l'indice de Lefschetz $i(f, z)$ de ce point.

Si U_1 et U_2 sont deux parties ouvertes disjointes telles que $Z_1 = \text{Fix}(f) \cap U_1$ et $Z_2 = \text{Fix}(f) \cap U_2$ sont compactes, on a

$$i(f, U_1 \cup U_2) = i(f, U_1) + i(f, U_2).$$

Pour deux parties compactes ouvertes disjointes Z_1 et Z_2 de $\text{Fix}(f)$, on a donc

$$i(f, Z_1 \cup Z_2) = i(f, Z_1) + i(f, Z_2) ;$$

en particulier, si Z est fini, on a

$$i(f, Z) = \sum_{z \in Z} i(f, z).$$

Si U est une partie ouverte et si $\text{Fix}(f) \cap U$ est compact, alors l'ensemble $\text{Fix}(f) \cap V$ est compact pour chaque composante connexe V de U , vide sauf pour un nombre fini d'entre-elles, et on a :

$$i(f, U) = \sum_{V \in \pi_0(U)} i(f, V).$$

Dans le cas où $M = \mathbf{R}^2$ et où U est un domaine de Jordan tel que $\partial U \cap \text{Fix}(f) = \emptyset$, l'ensemble $\text{Fix}(f) \cap U$ est compact et l'indice $i(f, U)$ est égal au degré de l'application

$$\begin{aligned} \mu : S^1 &\rightarrow S^1 \\ s &\mapsto \frac{f(\gamma(s)) - \gamma(s)}{\|f(\gamma(s)) - \gamma(s)\|} \end{aligned}$$

où γ est un paramétrage direct de ∂U par S^1 .

Rappels sur les ensembles isolants.

Soit $f : M \rightarrow M$ un homéomorphisme défini sur une variété M . Un ensemble compact invariant K qui s'écrit

$$K = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\bar{U}),$$

où U est un voisinage ouvert relativement compact de K , est un *ensemble compact invariant localement maximal*. La partie U est alors un *voisinage isolant* de K ou encore un *ensemble isolant*. Les propriétés suivantes sont évidentes :

- toute réunion de composantes connexes d'un ensemble isolant est un ensemble isolant ;
- l'intersection d'une famille finie d'ensembles isolants est un ensemble isolant ;
- l'image par f^k , $k \in \mathbf{Z}$, d'un voisinage isolant de K est un voisinage isolant de K ;
- si U est un voisinage isolant de K , alors $\bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(U)$ est un voisinage isolant, pour f^k , de K .

On va introduire une notion plus précise. On dira que $U \subset \mathbf{R}^2$ est un *ensemble fortement isolant* si U est ouvert, relativement compact, et s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que :

- i)** si $\{x, f(x), \dots, f^k(x)\}$ est un segment d'orbite maximal dans ∂U , alors l'un au moins des deux points $f^{-1}(x)$ et $f^{k+1}(x)$ n'appartient pas à \bar{U} ;
- ii)** si $\{x, f(x), \dots, f^n(x)\}$ est un segment d'orbite dans ∂U , alors les deux points $f^{-1}(x)$ et $f^{n+1}(x)$ n'appartiennent pas à \bar{U} .

Le plus petit entier $n \geq 0$ vérifiant ces conditions sera appelé *l'ordre* de U .

Les propriétés suivantes sont évidentes :

- un ensemble fortement isolant est isolant ;
- toute réunion de composantes connexes d'un ensemble isolant d'ordre $\leq n$ est un ensemble isolant d'ordre $\leq n$;
- un ensemble fortement isolant d'ordre 0 est une partie ouverte relativement compacte telle que

$$\bar{U} \cap f(\bar{U}) = \emptyset;$$

- un ensemble fortement isolant d'ordre ≤ 1 est une partie ouverte relativement compacte telle que

$$f^{-1}(\bar{U}) \cap \bar{U} \cap f(\bar{U}) \subset U.$$

On peut montrer que tout ensemble compact invariant localement maximal admet un voisinage isolant U tel que

$$f^{-1}(\bar{U}) \cap \bar{U} \cap f(\bar{U}) \subset U,$$

c'est-à-dire un voisinage fortement isolant d'ordre 1 (voir [?], [?]). Nous allons donner un résultat un peu plus précis dans le cas des domaines de Jordan.

PROPOSITION 1.1. Soit f un homéomorphisme de \mathbf{R}^2 et U un domaine de Jordan qui est un ensemble isolant. Il existe alors $V \subset U$ tel que

- i) la partie V est une réunion finie de domaines de Jordan dont les adhérences sont disjointes deux à deux ;
- ii) la partie V est un ensemble fortement isolant d'ordre ≤ 1 ;
- iii) on a

$$\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{V}) = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{U}).$$

Démonstration. Soit U un domaine de Jordan isolant. Soit $k_0 \geq 1$ tel que

$$\bigcap_{|k| \leq k_0} f^{-k}(\overline{U}) \subset U.$$

Grâce au théorème de Schoenflies, on peut se ramener au cas où $U = \mathbf{D}_1$, où l'on note \mathbf{D}_r le disque ouvert de centre 0 et de rayon r . Soit $r_0 < 1$ tel que

$$\bigcap_{|k| \leq k_0} f^{-k}(\overline{\mathbf{D}_1}) \subset \mathbf{D}_{r_0}.$$

Choisissons r_1, \dots, r_{k_0} avec

$$r_0 < r_1 < \dots < r_{k_0} \leq 1$$

et considérons

$$W = \bigcap_{|k| \leq k_0} f^{-k}(\overline{\mathbf{D}_{r_{|k|}}}).$$

On a

$$\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{W}) = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{\mathbf{D}_1}),$$

et les composantes connexes de W sont des domaines de Jordan.

Si $x, f(x), f^{-1}(x)$ appartiennent à \overline{W} , on a

- pour $0 < k \leq k_0$, $f^k(x) = f^{k-1}(f(x)) \in \overline{\mathbf{D}_{r_{k-1}}} \subset \mathbf{D}_{r_k}$,
- pour $0 > k \geq -k_0$, $f^k(x) = f^{k+1}(f^{-1}(x)) \in \overline{\mathbf{D}_{r_{|k|-1}}} \subset \mathbf{D}_{r_{|k|}}$,
- d'après le choix de r_0 , $\overline{W} \subset \mathbf{D}_{r_0}$, donc $x \in \mathbf{D}_{r_0}$,

et on conclut que $x \in W$. Ainsi W est un ensemble fortement isolant d'ordre ≤ 1 .

Il existe une famille finie $(W_i)_{i \in I}$ de composantes connexes de W telle que

$$\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{\mathbf{D}_1}) = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{W}) \subset \bigcup_{i \in I} W_i.$$

Pour tout $i \in I$, on a

$$\partial W_i \subset \partial W \subset f^{-1}(\mathbf{R}^2 - \overline{W}) \cup f(\mathbf{R}^2 - \overline{W}).$$

En rétrécissant un peu chaque W_i , on obtient pour tout $i \in I$ un domaine de Jordan V_i vérifiant $\overline{V_i} \subset W_i$, tel que

$$\partial V_i \subset f^{-1}(\mathbf{R}^2 - \overline{W}) \cup f(\mathbf{R}^2 - \overline{W}),$$

et on peut supposer de plus que

$$\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{\mathbf{D}_1}) \subset \bigcup_{i \in I} V_i.$$

L'ensemble $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ est un ensemble fortement isolant d'ordre ≤ 1 puisque

$$\begin{aligned} \partial V &= \bigcup_{i \in I} \partial V_i \subset f^{-1}(\mathbf{R}^2 - \overline{W}) \cup f(\mathbf{R}^2 - \overline{W}) \\ &\subset f^{-1}(\mathbf{R}^2 - \overline{V}) \cup f(\mathbf{R}^2 - \overline{V}), \end{aligned}$$

il vérifie également les assertions **i)** et **iii)** de la proposition 1.1. \square

Considérons un ensemble fortement isolant d'ordre ≤ 1 qui s'écrit $U = \bigcup_{1 \leq i \leq p} U_i$, où $(U_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille de domaines de Jordan d'adhérences deux à deux disjointes, et supposons que l'ensemble

$$K = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{U})$$

rencontre chaque composante U_i . Notons A l'ensemble des composantes U_i dont l'image est contenue dans U et $U_j = \phi(U_i)$ la composante connexe de U contenant $f(U_i)$. Si U_i appartient à A , alors on a $f(\partial U_i) \subset \overline{U}$ et donc $f^{-1}(\partial U_i) \cap \overline{U} = \emptyset$ puisque U est d'ordre ≤ 1 . Le domaine de Jordan U_i rencontrant K , il en est de même du domaine de Jordan $f^{-1}(U_i)$. Celui-ci contient donc une composante connexe de U , qui bien sûr appartient à A . Chaque élément de A ayant au moins un antécédent par ϕ dans A , on en déduit que ϕ est à valeurs dans A , plus précisément que c'est une permutation de A que l'on peut décomposer en cycles. On appellera *cycle attractif* tout ensemble $\bigcup_{1 \leq l \leq m} U_{i_l}$ vérifiant $f(U_{i_l}) \subset U_{i_{l+1}}$, pour $l \in \{1, \dots, m-1\}$ et $f(U_{i_m}) \subset U_{i_1}$. Un domaine U_i est contenu dans un cycle attractif si et seulement si $U_i \in A$, c'est-à-dire si et seulement si $f^{-1}(\partial U_i) \cap \overline{U} = \emptyset$. On définit de façon similaire la notion de *cycle répulsif* en remplaçant f par f^{-1} . On vient de démontrer le résultat de décomposition suivant :

PROPOSITION 1.2. *Soit f un homéomorphisme de \mathbf{R}^2 et U un ensemble fortement isolant d'ordre ≤ 1 qui s'écrit $U = \bigcup_{1 \leq i \leq p} U_i$, où $(U_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille finie de domaines de Jordan d'adhérences deux à deux disjointes, tel que l'ensemble*

$$K = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{U})$$

rencontre chaque composante U_i . Il existe alors une partition

$$U = \bigsqcup_{1 \leq j \leq r} U^j \bigsqcup_{r+1 \leq j \leq s} U^j \bigsqcup U^{s+1}$$

en réunion de composantes connexes de U , telle que :

- i)** *chaque U^j , $1 \leq j \leq r$, est un cycle attractif ;*
- ii)** *chaque U^j , $r+1 \leq j \leq s$, est un cycle répulsif ;*
- iii)** *on a $f(\overline{U^j}) \cap \overline{U^{j'}}$ si $j \neq j'$;*
- iv)** *si U_i et $U_{i'}$ sont des composantes connexes de U^{s+1} , aucune des inclusions $f(U_i) \subset U_{i'}$ ou $U_i \subset f(U_{i'})$ n'est vérifiée.*

Énoncé du problème.

Si U est un ensemble isolant de $f : M \rightarrow M$ et si K est l'ensemble invariant maximal contenu dans U , on peut définir l'indice $i(f, U)$ et on a

$$i(f, U) = i(f, \text{Fix}(f) \cap K).$$

Plus généralement, pour tout $k > 0$, on peut définir l'indice

$$i\left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(U)\right) = i\left(f^k, \text{Fix}(f^k) \cap K\right).$$

On va s'intéresser à la suite ainsi définie dans le cas où U est un domaine de Jordan. D'après la proposition 1.1, il suffit de s'intéresser au cas où U est un ensemble fortement isolant d'ordre ≤ 1 qui s'écrit $U = \bigcup_{1 \leq i \leq p} U_i$, la famille $(U_i)_{1 \leq i \leq p}$ étant formée de domaines de Jordan d'adhérences deux à deux disjointes et rencontrant K . Si on décompose U suivant la proposition 1.2, on sait, grâce à l'assertion **iii**), que l'on a

$$i\left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(U)\right) = \sum_{j=1}^{s+1} i\left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(U^j)\right).$$

La suite des indices

$$i\left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(U^j)\right)$$

est facile à calculer si U^j est un cycle attractif ou répulsif. On a

$$i\left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(U^j)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin q\mathbf{Z}, \\ q & \text{si } k \in q\mathbf{Z}, \end{cases}$$

où q est le nombre de composantes connexes du cycle. L'étude la plus intéressante est celle de la suite des indices

$$i\left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(U^{s+1})\right).$$

Nous allons nous intéresser à la suite des indices

$$i\left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(U)\right)$$

quand U est un ensemble fortement isolant d'ordre 1 qui s'écrit $U = \bigcup_{1 \leq i \leq p} U_i$, la famille $(U_i)_{1 \leq i \leq p}$ étant formée de domaines de Jordan d'adhérences deux à deux disjointes tels que :

- aucune des inclusions $f(U_i) \subset U_{i'}$ ou $U_i \subset f(U_{i'})$ n'est vérifiée ;
- l'ensemble $f^{-1}(U)$ rencontre chaque U_i .

On construira à partir d'une famille de graphes $(\Gamma_n(*))_{n \geq 0}$, réunion de p arbres disjoints, une famille de \mathbf{Z} -modules libres $(H_n(*))_{n \geq 0}$ et une famille de morphismes $h_n(f) : H_n(*) \rightarrow H_n(*)$ de rang fini, tels que pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et pour tout $n \geq 0$ on ait :

$$i\left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(U)\right) = -\text{Tr}\left(h_n(f)^k\right).$$

On verra que pour tout $n \geq 1$ et pour toute composante connexe V de $\bigcap_{0 \leq i \leq n} f^{-i}(U)$, la famille $(h_m(f))_{m \geq n}$ permet également de calculer la suite des indices

$$i \left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(V) \right),$$

et que cette suite vérifie la propriété de périodicité suivante dans la cas où f préserve l'orientation :

THÉORÈME 1.1. *Il existe $q, r \geq 1$ tels que, pour tout $k \geq 1$, on a*

$$i \left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(V) \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \notin q\mathbf{Z} , \\ 1 - rq & \text{si } k \in q\mathbf{Z} . \end{cases}$$

On en déduit alors le résultat suivant :

COROLLAIRE 1.1. *Soit f un homéomorphisme préservant l'orientation, et U un domaine de Jordan isolant tel que les seules orbites périodiques contenues dans U se réduisent à un point fixe z . Trois cas sont possibles :*

- i)** *il existe un domaine de Jordan $V \subset U$ contenant z tel que $f(\overline{V}) \subset V$, la suite $(i(f^k, z))_{k \geq 1}$ est alors égale à 1 ;*
- ii)** *il existe un domaine de Jordan $V \subset U$ contenant z tel que $f^{-1}(\overline{V}) \subset V$, la suite $(i(f^k, z))_{k \geq 1}$ est alors égale à 1 ;*
- iii)** *il existe $q, r \geq 1$ tels que, pour tout $k \geq 1$, on a*

$$i(f^k, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \notin q\mathbf{Z} , \\ 1 - rq & \text{si } k \in q\mathbf{Z} . \end{cases}$$

Démonstration. D'après la proposition 1.1. on peut supposer que U est un ensemble fortement isolant d'ordre ≤ 1 qui s'écrit $U = \bigcup_{1 \leq i \leq p} U_i$, la famille $(U_i)_{1 \leq i \leq p}$ étant formée de domaines de Jordan d'adhérences deux à deux disjointes et rencontrant K . On décompose alors U suivant la proposition 1.2.

S'il existe un cycle attractif ou répulsif, ce cycle contient z et se réduit à une composante connexe, on est dans l'un des deux premiers cas. Sinon, on peut appliquer le théorème 1.1, le point z est contenu dans une composante connexe V de $f^{-1}(U) \cap U$ et on a

$$i \left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(V) \right) = i(f^k, z) ,$$

pour tout $k \geq 1$. □

On verra dans un exemple que le résultat de périodicité n'est pas vrai pour $n = 0$, c'est-à-dire pour $V = U$. On verra que la connaissance de l'application f^{-1} sur ∂U permet de construire les arbres $\Gamma_0(*)$, $\Gamma_1(*)$; les modules $H_0(*)$, $H_1(*)$; ainsi que les morphismes $h_0(f)$ et $h_1(f)$; et qu'elle permet également de minorer l'entropie topologique de $f|_K$. On s'intéressera d'abord

au cas où U est connexe, le cas où U a plusieurs composantes ne contient pas de difficultés supplémentaires et sera étudié tout à la fin.

§2. Décomposition de U_0 .

On se donne un domaine de Jordan U_0 vérifiant les propriétés suivantes :

- i) aucune des inclusions $f(U_0) \subset U_0$ ou $U_0 \subset f(U_0)$ n'est vérifiée ;
- ii) l'intersection $f^{-1}(U_0) \cap U_0$ est non vide ;
- iii) on a

$$f^{-1}(\bar{U}_0) \cap \bar{U}_0 \cap f(\bar{U}_0) \subset U_0.$$

On note C_0 la frontière de U_0 et on pose $C_k = f^{-k}(C_0)$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

Pour tout $n \geq 0$, on définit

$$U_n = \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(U_0).$$

De la propriété **iii**), on déduit que l'on a

$$\bar{U}_n \subset \bigcap_{0 \leq i \leq n} f^{-i}(\bar{U}_0) \subset \bigcap_{0 < i < n} f^{-i}(U_0),$$

et

$$\partial U_n \subset C_0 \cup C_n,$$

en particulier toute composante connexe de U_n est une composante connexe de $U_0 \cap f^{-n}(U_0)$.

Les ensembles

$$S_{>0} = \pi_0(U_0)$$

et

$$S_0 = \pi_0(\mathbf{R}^2 - \bar{U}_0)$$

ont chacun un élément qu'on notera respectivement $*$ et ∞ . Pour tout $n \geq 1$, on définira

$$S_{>n} = \pi_0(U_n)$$

et

$$S_n = \pi_0(U_{n-1} \cap f^{-n}(\mathbf{R}^2 - \bar{U}_0)).$$

D'après les rappels du paragraphe 1, on sait que les ensembles $S_{>n}$ sont formés de domaines de Jordan ; il en est de même des ensembles S_n puisque l'on a $f^{-n}(U_0) \not\subset f^{-n+1}(U_0)$ et donc $f^{-n}(U_0) \not\subset U_{n-1}$. De plus, on sait que $S_{>1}$ est non vide.

On définit ensuite

$$A_0 = \pi_0(f(U_0) \cap C_0),$$

et pour tout $n \geq 1$,

$$A_n = \pi_0(U_{n-1} \cap C_n).$$

La propriété **i**) nous dit que les ensembles A_0 et A_1 sont non vides et formés d'arcs ouverts respectivement de C_0 et de C_1 dont les extrémités sont contenues respectivement dans $C_{-1} \cap C_0$ et dans $C_0 \cap C_1$. De même, si $n \geq 1$, la courbe C_n n'est pas contenue dans U_{n-1} puisqu'elle n'est

déjà pas contenue dans $f^{-n+1}(U_0)$: l'ensemble A_n est donc également formé d'arcs ouverts de C_n (mais peut être vide). Chaque arc $a \in A_n$ est contenu dans un élément s de $S_{>n-1}$ et sépare ce domaine de Jordan en deux parties. Les extrémités de a appartiennent à ∂U_{n-1} , donc soit à C_0 soit à C_{n-1} . Comme elles appartiennent à $\bigcap_{0 < i < n} f^{-i}(U_0)$, la deuxième éventualité est impossible : l'arc a sépare donc également le domaine de Jordan U_0 .

On peut être plus précis. Comme on a $f^n(a) \subset C_0$ et $f^{n-1}(a) \subset U_0$, on en déduit, d'après **iii)** que $f^{n+1}(a)$ est contenu dans $\mathbf{R}^2 - \bar{U}_0$. Par suite, il existe un voisinage ouvert connexe V de a tel que $V - a$ a exactement deux composantes connexes dont l'une est contenue dans un élément de S_n qu'on note $\Delta_0 a$ et l'autre contenue dans un élément de S_{n+1} qu'on note $\Delta_1 a$.

Pour $m > n \geq 0$, les inclusions canoniques induisent des applications

$$p_{>n} : S_m \rightarrow S_{>n} , A_m \rightarrow S_{>n} , S_{>m} \rightarrow S_{>n} .$$

Pour tout $s \in S_{>n}$, on notera $S_m(s)$ (resp. $A_m(s)$, resp. $S_{>m}(s)$) l'ensemble des antécédents de s dans chaque ensemble correspondant. On définira également l'application

$$\bar{\Delta}_1 = p_{>n} \circ \Delta_1 : A_n \rightarrow S_{>n} ,$$

et on notera $A_n(s)$ l'ensemble des antécédents de $s \in S_{>n}$ par cette application. Remarquons que pour $a \in A_m$, $m > n \geq 0$, on a les équivalences suivantes :

$$a \in A_m(s) \iff \Delta_0 a \in S_m(s) \iff \Delta_1 a \in S_{m+1}(s) \iff \bar{\Delta}_1 a \in S_{>m}(s) .$$

On notera également

$$S_{>n}(s) = \{s\}$$

si $s \in S_{>n}$.

§3. Construction d'arbres.

Soient $n \geq 0$, $s \in S_{>n}$ et $m > n$. On définit un graphe $\Gamma_m(s)$ comme suit :

- l'ensemble des sommets $\text{Som}(\Gamma_m(s))$ est la réunion disjointe de $S_{>m}(s)$ et des ensembles $S_l(s)$, $n < l \leq m$;
- l'ensemble des arêtes $\text{Ar}(\Gamma_m(s))$ est la réunion disjointe des ensembles $A_l(s)$, $n < l \leq m$;
- les extrémités d'une arête $a \in A_l(s)$, $n < l < m$ sont $\Delta_0 a$ et $\Delta_1 a$, les extrémités de $a \in A_m(s)$ sont $\Delta_0 a$ et $\bar{\Delta}_1 a$.

Les extrémités d'une arête sont bien des sommets de $\Gamma_m(s)$ d'après les remarques faites à la fin du dernier paragraphe.

PROPOSITION 3.1 Soient $m > n \geq 0$ et $s \in S_{>n}$. Alors $\Gamma_m(s)$ est un arbre (non vide).

Démonstration. Nous allons montrer que $\Gamma_m(s)$ est un graphe connexe et qu'il ne l'est plus lorsqu'on lui enlève l'une quelconque de ses arêtes.

Les éléments de $\Gamma_m(s)$ définissent une partition de s . Pour chaque composante connexe Γ du graphe $\Gamma_m(s)$, on note $s(\Gamma)$ la réunion des sommets et des arêtes de Γ . C'est une partie ouverte, car si une arête a est contenue dans Γ , ses extrémités le sont aussi, ainsi l'ensemble $\Delta_0 a \cup a \cup \Delta_1 a$ est contenu dans $s(\Gamma)$ et contient, on l'a vu au paragraphe précédent un voisinage V de a . Les

ouverts $s(\Gamma)$, Γ décrivant les composantes connexes de $\Gamma_m(s)$, définissent donc une partition de s . Comme s est connexe, cette partition est triviale. On en déduit que $\Gamma_m(s)$ est connexe.

Soit $a \in A_m(s)$. C'est un arc ouvert de C_m contenu dans s et qui sépare ce domaine de Jordan en deux composantes connexes puisque les extrémités de a (dans \mathbf{R}^2) sont dans C_0 . Or, si Γ est un sous-graphe de $\Gamma_m(s)$ qui est connexe, la partie $s(\Gamma)$ définie plus haut est connexe, puisque la réunion d'une arête $a' \in \Gamma$ et de chacune de ses deux extrémités (dans $\Gamma_m(s)$) est une partie connexe du plan. On en déduit que $\Gamma_m(s) - \{a\}$ n'est pas connexe. \square

§4. Définition de $H_m(s)$ et de $\rho_m(s)$.

Les applications Δ_0 , Δ_1 et $\bar{\Delta}_1$ définissent par linéarité des morphismes

$$\begin{aligned}\Delta_0 &: \mathbf{Z}(A_n) \rightarrow \mathbf{Z}(S_n), \\ \Delta_1 &: \mathbf{Z}(A_n) \rightarrow \mathbf{Z}(S_{n+1}), \\ \bar{\Delta}_1 &: \mathbf{Z}(A_n) \rightarrow \mathbf{Z}(S_{>n}).\end{aligned}$$

On définit alors, pour $n \geq 0$, $s \in S_{>n}$ et $m > n$, un morphisme

$$\Delta : \mathbf{Z}(\text{Ar}(\Gamma_m(s))) \rightarrow \mathbf{Z}(\text{Som}(\Gamma_m(s)))$$

en posant

$$\Delta(a) = \Delta_1(a) - \Delta_0(a)$$

pour toute arête $a \in A_l(s)$, $n < l < m$, et

$$\Delta(a) = \bar{\Delta}_1(a) - \Delta_0(a)$$

pour toute arête $a \in A_m(s)$. On définit également un morphisme

$$\eta : \mathbf{Z}(\text{Som}(\Gamma_m(s))) \rightarrow \mathbf{Z}$$

en posant $\eta(s') = 1$ pour tout sommet s' de $\Gamma_m(s)$.

LEMME 4.1 *La suite*

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}(\text{Ar}(\Gamma_m(s))) \xrightarrow{\Delta} \mathbf{Z}(\text{Som}(\Gamma_m(s))) \xrightarrow{\eta} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Le graphe $\Gamma_m(s)$ est un arbre. \square

Soient $n \geq 0$, $s \in S_{>n}$ et $m \geq n$. On note $H_m(s)$ le noyau de l'application

$$\bar{\Delta}_1 : \mathbf{Z}(A_m(s)) \rightarrow \mathbf{Z}(S_{>m}(s)).$$

De la partition

$$A_m(s) = \bigsqcup_{s' \in S_{>m}(s)} A_m(s')$$

on déduit la décomposition naturelle

$$\mathbf{Z}(A_m(s)) = \bigoplus_{s' \in S_{>m}(s)} \mathbf{Z}(A_m(s'))$$

et la décomposition

$$H_m(s) = \bigoplus_{s' \in S_{>m}(s)} H_m(s').$$

Pour tout $a \in H_m(s)$, l'élément $\Delta_1 a$ de $\mathbf{Z}(S_{m+1}(s))$ est dans le noyau de $\eta : \mathbf{Z}(\text{Som}(\Gamma_{m+1}(s))) \rightarrow \mathbf{Z}$. D'après le lemme précédent, il existe un unique élément b de $\mathbf{Z}(\text{Ar}(\Gamma_{m+1}(s)))$ tel que $\Delta b = -\Delta_1 a$. En posant $b = \rho_m(s)(a)$, on définit ainsi un morphisme

$$\rho_m(s) : H_m(s) \rightarrow \mathbf{Z}(\text{Ar}(\Gamma_{m+1}(s))).$$

PROPOSITION 4.1 *L'application $\rho_m(s)$ est un morphisme de $H_m(s)$ dans $H_{m+1}(s)$.*

Démonstration. Grâce à la décomposition écrite plus haut, il suffit de montrer que pour tout $s' \in S_{>m}(s)$ et pour tout $a \in H_m(s')$, l'élément $b = \rho_m(s)(a)$ de $\mathbf{Z}(\text{Ar}(\Gamma_{m+1}(s)))$ appartient à $H_{m+1}(s')$. Comme $-\Delta_1(a)$ est dans le noyau de $\eta : \mathbf{Z}(\text{Som}(\Gamma_{m+1}(s'))) \rightarrow \mathbf{Z}$, en appliquant le lemme 4.1 à $\Gamma_{m+1}(s')$ on en déduit que $b \in \mathbf{Z}(A_{m+1}(s'))$. Comme $\Delta b \in \mathbf{Z}(S_{m+1}(s'))$, on en déduit que l'on a $\Delta_0 b = \Delta_1 a$ et $\overline{\Delta}_1 b = 0$. \square

§5. L'action de f .

Soient $n \geq 1$ et $v \in S_{>n}$ (resp. S_n , resp. A_n) ; il existe un unique élément de $S_{>n-1}$ (resp. S_{n-1} , resp. A_{n-1}) qui contient la partie connexe $f(v)$. On notera cet élément $f_*(v)$. On définit ainsi des applications

$$f_* : \begin{cases} S_{>n} & \rightarrow & S_{>n-1}, \\ S_n & \rightarrow & S_{n-1}, \\ A_n & \rightarrow & A_{n-1} ; \end{cases}$$

qu'on étendra par linéarité en

$$f_* : \begin{cases} \mathbf{Z}(S_{>n}) & \rightarrow & \mathbf{Z}(S_{>n-1}), \\ \mathbf{Z}(S_n) & \rightarrow & \mathbf{Z}(S_{n-1}), \\ \mathbf{Z}(A_n) & \rightarrow & \mathbf{Z}(A_{n-1}). \end{cases}$$

Remarquons que $f_* : \mathbf{Z}(A_1) \rightarrow \mathbf{Z}(A_0)$ est un isomorphisme.

On a clairement

$$\begin{aligned} \Delta_0 \circ f_* &= f_* \circ \Delta_0, \\ \Delta_1 \circ f_* &= f_* \circ \Delta_1, \\ \overline{\Delta}_1 \circ f_* &= f_* \circ \overline{\Delta}_1. \end{aligned}$$

Par suite, on a pour $m \geq n > 0$ et $s \in S_{>n}$:

$$f_*(H_m(s)) \subset H_{m-1}(f_*s).$$

PROPOSITION 5.1 *Pour $m \geq n > 0$ et $s \in S_{>n}$, on a*

$$\rho_{m-1}(f_*s) \circ f_* = f_* \circ \rho_m(s) : H_m(s) \rightarrow H_m(f_*s).$$

Démonstration. Soit $a \in H_m(s)$ et $b = \rho_m(s)(a)$. On a donc

$$\Delta_0 b = \Delta_1 a,$$

d'où l'on déduit que

$$\Delta_1(f_*a) = f_*(\Delta_1 a) = f_*(\Delta_0 b) = \Delta_0(f_*b).$$

Comme d'autre part on a

$$\overline{\Delta}_1(f_*b) = f_*(\overline{\Delta}_1 b) = 0,$$

on en déduit que

$$f_*b = \rho_{m-1}(f_*s)(f_*a).$$

□

On va montrer les résultats de finitude suivants :

PROPOSITION 5.2 i) *Pour tout $n \geq 0$, l'ensemble des éléments $s \in S_{>n}$ tels que $S_{>n+1}(s) \neq \emptyset$ est fini.*

ii) *Pour tout $s \in S_{>n}$, $n \geq 0$, l'ensemble des $\Delta_1 a$, lorsque a décrit $A_n(s)$, est fini.*

iii) *Pour tout $n > 0$, l'application $f_* : A_{n+1} \rightarrow A_n$ est d'image finie.*

Démonstration. Commençons par montrer la première assertion. Soit $z \in \overline{U}_{n+1}$. D'après la propriété **iii)**, le point z appartient à $\bigcap_{1 \leq i \leq n} f^{-i}(U_0)$. Il appartient donc, soit à U_n , soit à $C_0 \cap$

$f^{-1}(U_{n-1})$. Dans chacun des cas, on peut trouver un voisinage ouvert V de z tel que $V \cap U_n$ soit connexe. On recouvre \overline{U}_{n+1} par un nombre fini de tels voisinages et ceci implique la première partie de la proposition.

Montrons maintenant la deuxième assertion dans le cas où $n > 0$. La frontière ∂s de s est une courbe de Jordan. Soit $z \in C_n \cap \partial s$. D'après la propriété **iii)**, on sait que z appartient à $f^{-(n+1)}(\mathbf{R}^2 - \overline{U}_0)$. On peut donc trouver un voisinage ouvert V de z tel que $V \cap s$ soit connexe et contenu dans $f^{-(n+1)}(\mathbf{R}^2 - \overline{U}_0)$. En recouvrant $C_n \cap \partial s$ par un nombre fini de tels voisinages, on obtient la deuxième affirmation de la proposition.

Montrons maintenant cette affirmation dans le cas où $n = 0$. Soit $z \in f(\overline{U}_0) \cap C$. D'après la propriété **iii)**, on sait que z appartient à $f^{-1}(\mathbf{R}^2 - \overline{U}_0)$, on peut donc trouver un voisinage ouvert V de z tel que $V \cap U_0$ soit connexe et contenu dans $f^{-1}(\mathbf{R}^2 - \overline{U}_0)$. On conclut comme précédemment.

Il reste à montrer la troisième assertion. Soit $z \in \overline{U}_{n+1} \cap C_{n+1}$, alors $z \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} f^{-i}(U_0)$, et $f^{n+1}(z) \in C_0$. On peut donc trouver un voisinage ouvert V de z tel que $f(V) \subset \overline{U}_{n-1}$, et tel que $f(V) \cap C_n$ soit connexe. On recouvre $\overline{U}_{n+1} \cap C_{n+1}$ par un nombre fini de tels voisinages, et on obtient la conclusion recherchée. □

On en déduit les deux résultats importants suivants :

COROLLAIRE 5.1: *Pour tout $n \geq 0$, l'ensemble des éléments $s \in S_{>n}$ tels que $H_{n+1}(s) \neq 0$ est fini.*

COROLLAIRE 5.2: Pour tout $n \geq 0$ et tout $s \in S_{>n}$, l'application $\rho_n(s) : H_n(s) \rightarrow H_{n+1}(s)$ est de rang fini.

On pourrait montrer de façon similaire que pour $n \geq 0$, les applications $f_* : S_{>n+1} \rightarrow S_{>n}$ et $f_* : S_{n+1} \rightarrow S_n$ sont d'image finie. Cela résulte aussi des considérations suivantes.

On a

$$\begin{aligned}\Delta_0 \circ f_* &= f_* \circ \Delta_0, \\ \Delta_1 \circ f_* &= f_* \circ \Delta_1, \\ \overline{\Delta}_1 \circ f_* &= f_* \circ \overline{\Delta}_1 ;\end{aligned}$$

donc, pour $n \geq 0$, lorsqu'une arête $a \in A_n$ est dans l'image de $f_* : A_{n+1} \rightarrow A_n$, son extrémité $\Delta_0 a$ est dans l'image de $f_* : S_{n+1} \rightarrow S_n$ et son extrémité $\Delta_1 a$ (resp. $\overline{\Delta}_1 a$) dans l'image de $f_* : S_{n+2} \rightarrow S_{n+1}$ (resp. $f_* : S_{>n+1} \rightarrow S_{>n}$).

Inversement, soient $n \geq 0$, $s' \in S_{>n+1}$, $s = f_*(s') \in S_{>n}$; il existe une arête $a' \in A_{n+1}$ telle que $\overline{\Delta}_1(a') = s'$, et on a $s = f_*(\overline{\Delta}_1(a')) = \overline{\Delta}_1(f_*(a'))$.

Soient $n > 0$, $s' \in S_{n+1}$, $s = f_*(s') \in S_n$; distinguons deux cas :

- si $S_{>n+1}(p_{>n}(s')) = \emptyset$, toute arête d'extrémité s' appartient à A_n , et son image par f_* est une arête dans A_{n-1} d'extrémité s ;

- sinon, s' est extrémité d'une arête dans A_{n+1} dont l'image est une arête dans A_n d'extrémité s .

§6. Indice algébrique.

Le diagramme suivant est commutatif, où on pose $H_n = H_n(*)$ et $\rho_n = \rho_n(*)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \longrightarrow & H_{n+2} & \xrightarrow{f_*} & H_{n+1} & \xrightarrow{f_*} & H_n & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & H_2 & \xrightarrow{f_*} & H_1 & \xrightarrow{f_*} & H_0 \\ & \uparrow \rho_{n+1} & & \uparrow \rho_n & & \uparrow \rho_{n-1} & & & & \uparrow \rho_1 & & \uparrow \rho_0 & & \\ \longrightarrow & H_{n+1} & \xrightarrow{f_*} & H_n & \xrightarrow{f_*} & H_{n-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & H_1 & \xrightarrow{f_*} & H_0 & & \\ & \uparrow \rho_n & & \uparrow \rho_{n-1} & & \uparrow \rho_{n-2} & & & & \uparrow \rho_0 & & & & \\ \longrightarrow & H_n & \xrightarrow{f_*} & H_{n-1} & \xrightarrow{f_*} & H_{n-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & H_0 & & & & \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & & & & & \end{array}$$

Pour tout $n \geq 0$, on définit :

$$h_n(f) = f_* \circ \rho_n : H_n \rightarrow H_n,$$

et on a, pour $n > 0$:

$$h_n(f) = \rho_{n-1} \circ f_*.$$

Pour $k > 0$, on pose

$$h_n(f^k) = [h_n(f)]^k : H_n \rightarrow H_n ;$$

on a

$$h_n(f^k) = f_*^k \circ \rho_{n+k-1} \circ \dots \circ \rho_n,$$

et pour tout $n \geq k$, on a

$$h_n(f^k) = \rho_{n-1} \circ \dots \circ \rho_{n-k} \circ f_*^k.$$

PROPOSITION 6.1. *Le morphisme $h_n(f)$ est de rang fini.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser la décomposition

$$H_n = \bigoplus_{s \in S_{>n}} H_n(s),$$

et d'utiliser les résultats suivants montrés à la fin du paragraphe 5 :

- on a $H_{n+1}(s) = 0$ (et donc $h_n(f)|_{H_n(s)} = h_n(f) \circ \rho_n(s) = 0$) sauf pour un nombre fini de $s \in S_{>n}$;
- pour tout $s \in S_{>n}$, l'application $\rho_n(s)$ est de rang fini. □

Dans la décomposition

$$H_m = \bigoplus_{s \in S_{>n}} H_m(s),$$

où $m \geq n \geq 0$, notons $p_m(s)$ la projection de H_m sur $H_m(s)$, puis pour $s, s' \in S_{>n}$ et $k > 0$, définissons :

$$[h_m(f^k)]_{s's} = p_m(s') \circ h_m(f^k)|_{H_m(s)} : H_m(s) \rightarrow H_m(s') .$$

PROPOSITION 6.2. *Soient $m \geq n \geq 0$, $s \in S_{>n}$ et $k > 0$. On a*

$$\mathrm{Tr} \left([h_n(f^k)]_{ss} \right) = \mathrm{Tr} \left([h_m(f^k)]_{ss} \right).$$

Démonstration. En effet, pour $l \geq n$, on a

$$\begin{aligned} [h_l(f^k)]_{ss} &= p_l(s) \circ [(f_* \circ \rho_l)^k]_{|H_l(s)} \\ &= p_l(s) \circ f_* \circ [(\rho_l \circ f_*)^{k-1}]_{|H_{l+1}(s)} \circ \rho_l|_{H_l(s)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [h_{l+1}(f^k)]_{ss} &= p_{l+1}(s) \circ [(\rho_l \circ f_*)^k]_{|H_{l+1}(s)} \\ &= p_{l+1}(s) \circ \rho_l \circ f_* \circ [(\rho_l \circ f_*)^{k-1}]_{|H_{l+1}(s)} \\ &= \rho_l|_{H_l(s)} \circ p_l(s) \circ f_* \circ [(\rho_l \circ f_*)^{k-1}]_{|H_{l+1}(s)}. \end{aligned}$$

□

On définit alors pour $n \geq 0$, $s \in S_{>n}$ et $k > 0$, l'indice algébrique :

$$I(f^k, s) = -\mathrm{Tr} \left([h_n(f^k)]_{ss} \right).$$

PROPOSITION 6.3. Soient $m \geq n \geq 0$, $s \in S_{>n}$ et $k > 0$. On a

$$I(f^k, s) = \sum_{s' \in S_{>m}(s)} I(f^k, s').$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 6.2 et de la décomposition par blocs de l'endomorphisme $[h_m(f^k)]_{ss}$ associée à la décomposition

$$H_m(s) = \bigoplus_{s' \in S_{>m}(s)} H_m(s').$$

□

On conclut ce paragraphe par le résultat suivant.

PROPOSITION 6.4. Soient $n \geq 0$, $k > 0$ et soient $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}, s_k = s_0$ des éléments de $S_{>n}$. Pour $l \geq n + k$, on désigne par $P_l(s_0, \dots, s_{k-1})$ l'ensemble des $s \in S_{>l}$ tels que

$$f_*^i(s) \in S_{>l-i}(s_i),$$

pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$. On a alors, pour tout $m \geq n$:

$$\sum_{s \in P_l(s_0, \dots, s_{k-1})} I(f^k, s) = -\text{Tr}[h_m(f^k)]_{s_k s_{k-1} \dots s_0},$$

où

$$[h_m(f^k)]_{s_k s_{k-1} \dots s_0} = [h_m(f)]_{s_k s_{k-1}} \circ [h_m(f)]_{s_{k-1} s_{k-2}} \circ \dots \circ [h_m(f)]_{s_1 s_0}.$$

§7. Indice de Lefschetz et indice algébrique, formule de Lefschetz.

Pour $n \geq k > 0$ et $s \in S_{>n}$, on a $\text{Fix}(f^k) \cap \partial s = \emptyset$, ainsi $\text{Fix}(f^k) \cap s$ est une partie compacte de \mathbf{R}^2 . D'autre part, pour $m > n \geq k$ et $s \in S_{>n}$ les ensembles

$$\text{Fix}(f^k) \cap s$$

et

$$\text{Fix}(f^k) \cap \left(\bigcup_{s' \in S_{>m}(s)} s' \right)$$

sont égaux, on a donc :

$$i(f^k, s) = i\left(f^k, \bigcup_{s' \in S_{>m}(s)} s'\right) = \sum_{s' \in S_{>m}(s)} i(f^k, s').$$

De même, si $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}, s_k = s_0$ sont des éléments de $S_{>n}$, $n \geq 0$, $k > 0$, on a

$$i\left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(s_i)\right) = i\left(f^k, \bigcup_{s \in P_l(s_0, \dots, s_{k-1})} s\right) = \sum_{s \in P_l(s_0, \dots, s_{k-1})} i(f^k, s).$$

Le résultat fondamental de ce paragraphe est le suivant :

PROPOSITION 7.1 Pour $n \geq k > 0$ et pour $s \in S_{>n}$, on a

$$I(f^k, s) = i(f^k, s).$$

Démonstration. Soient $n \geq k > 0$, $s \in S_{>n}$ et $a \in A_n(s)$. Alors s et $\Delta_1 f_*^k a \in S_{n-k+1}$ sont des sommets distincts de $\Gamma_n(*)$, tandis que a est une arête de $\Gamma_n(*)$. On note $F_k(s)$ l'ensemble des arêtes $a \in A_n(s)$ qui séparent s et $\Delta_1 f_*^k a$ dans $\Gamma_n(*)$.

LEMME 7.1. L'ensemble $F_k(s)$ est fini et contient un unique élément si $s \notin S_{>n}(f_*^k s)$.

Démonstration. Puisque $f_*^k s \in S_{>n-k}$ et puisque $f_*^k a \in A_{n-k}(f_*^k s)$ si $a \in A_n(s)$, on en déduit que l'ensemble des $\Delta_1 f_*^k a$ est fini quand a décrit $A_n(s)$, ceci grâce à la proposition 5.2. D'autre part, si s' est un sommet de $\Gamma_n(*)$ distinct de s , il existe une et une seule arête a' de $A_n(s)$ qui sépare s et s' . Donc $F_k(s)$ est fini.

Si $s \notin S_{>n}(f_*^k s)$, le sous-arbre $\Gamma_n(f_*^k s)$ ne contient pas s , mais contient tous les $\Delta_1 f_*^k a$, $a \in A_n(s)$. C'est donc la même arête $a_0 \in A_n(s)$ qui sépare s de tous les $\Delta_1 f_*^k a$ dans $\Gamma_n(*)$. On conclut que a_0 est l'unique élément de $F_k(s)$. \square .

LEMME 7.2. Soient $n \geq k > 0$ et $s \in S_{>n}$. On a

$$I(f^k, s) = 1 - \#F_k(s).$$

Démonstration. Pour $a \in A_n(s)$, notons $g(a)$ l'unique arête de $A_n(s)$ qui sépare s et $\Delta_1 f_*^k a$ dans $\Gamma_n(*)$. Etendons g linéairement en

$$g : \mathbf{Z}(A_n(s)) \rightarrow \mathbf{Z}(A_n(s)).$$

C'est une application de rang fini et on a

$$\text{Tr}g = \#F_k(s).$$

D'autre part, si on pose

$$\tilde{g} = [h_n(f^k)]_{ss} = p_n(s) \circ \rho_{n-1} \circ \dots \circ \rho_{n-k} \circ f_{*|H_n(s)}^k,$$

on a

$$\tilde{g}(a - a') = ga - ga',$$

pour $a, a' \in A_n(s)$. Le diagramme à ligne exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(s) & \hookrightarrow & \mathbf{Z}(A_n(s)) & \xrightarrow{\partial} & \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \tilde{g} & & \downarrow g & & \downarrow \text{Id}_{\mathbf{Z}} \\ 0 & \longrightarrow & H_n(s) & \hookrightarrow & \mathbf{Z}(A_n(s)) & \xrightarrow{\partial} & \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

est donc commutatif, où on pose $\partial = \eta \circ \overline{\Delta}_1$; ce qui donne

$$\text{Tr}(\tilde{g}) - \text{Tr}(g) + \text{Tr}(\text{Id}_{\mathbf{Z}}) = 0 ,$$

d'où le lemme. \square

Fin de la démonstration de la proposition. Les arguments qui suivent se trouvent de façon plus détaillée dans [LY]. On a vu au paragraphe 2 que tout élément $s \in S_{>n}$ était une composante connexe de $U_0 \cap f^{-n}(U_0)$. On a donc les propriétés suivantes rappelées au paragraphe 1 :

- toute arête $a \in A_n(s)$ s'écrit $a = (x_a, y_a)_{C_n}$ avec $x_a \neq y_a$;
- les arcs $(x_a, y_a)_C$, $a \in A_n(s)$, sont disjoints deux à deux ;
- pour chaque $a \in A_n(s)$ la courbe de Jordan

$$(x_a, y_a)_C \cup (x_a, y_a)_{C_n} \cup \{x_a, y_a\}$$

borde un domaine de Jordan U_a contenu dans U_0 ;

- les domaines U_a , $a \in A_n(s)$, sont les composantes connexes de $U_0 - \bar{s}$;
- on peut construire une application continue $c : C_0 \cup \partial s \rightarrow \partial s$, égale à l'identité sur ∂s et induisant un homéomorphisme préservant l'orientation entre C_0 et ∂s , qui envoie chaque arc $(x_a, y_a)_{C_0}$ sur $a = (x_a, y_a)_{C_n}$.

Étudions d'abord le cas où $k < n$. L'ensemble connexe $f^k(a)$ est contenu dans $U_0 - \bar{s}$, plus précisément dans une composante connexe de $U_0 - \bar{s}$, plus précisément encore dans le domaine $U_{g(a)}$. On définit alors

$$\varphi = f^k \circ c : C_0 \cup \partial s \rightarrow \mathbf{R}^2,$$

que l'on prolonge arbitrairement de façon continue sur \mathbf{R}^2 . Cette application n'a de point fixe ni sur ∂s , ni sur C_0 puisque pour tout $z \in C_0 \setminus \partial c$ le point $\varphi(z)$ appartient à U_0 . On a donc

$$i(\varphi, U_0) = i(\varphi, s) + \sum_{a \in A} i(\varphi, U_a),$$

où $i(\varphi, U_a) = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de a .

Puisque $\varphi(C_0)$ est contenu dans U_0 , on a $i(\varphi, U_0) = 1$; puisque $\varphi(\partial U_a)$ est contenu dans $U_{g(a)}$, on a $i(\varphi, U_a) = 1$ si $g(a) = a$ et $i(\varphi, U_a) = 0$ si $g(a) \neq a$; puisque φ et f^k coïncident sur ∂s , on a $i(\varphi, s) = i(f^k, s)$. On a donc démontré la proposition.

On peut traiter le cas $k = n$ en utilisant la proposition 6.3 et la propriété du même type vérifiée pour l'indice de Lefschetz et énoncée au début de ce paragraphe, on peut également faire le raisonnement direct suivant. On considère une application $d : f^n(\bar{s}) \rightarrow f^n(s)$ suffisamment proche de l'identité pour avoir $i(f^n, s) = i((d \circ f)^n, s)$ et pour avoir $d(f^k(\bar{a})) \subset U_{g(a)}$ pour tout $a \in A_n(s)$ (rappelons-nous que l'image de g est finie). On reprend alors la démonstration précédente avec $d \circ f$ au lieu de f . \square

On a le résultat plus général suivant :

PROPOSITION 7.2. *Pour $n \geq 0$, $s \in S_{>n}$ et $k > 0$, l'ensemble $\text{Fix}(f^k) \cap s \cap U_k$ est compact et on a :*

$$i(f^k, s \cap U_k) = I(f^k, s).$$

Démonstration. En effet, on a, si $n \leq k$,

$$s \cap U_k = \bigcup_{s' \in S_{>k}(s)} s'$$

et

$$i(f^k, s \cap U_k) = \sum_{s' \in S_{>k}(s)} i(f^k, s') = \sum_{s' \in S_{>k}(s)} I(f^k, s') = I(f^k, s).$$

En appliquant le résultat suivant à $n = 0$ et $s = *$, ainsi que la proposition 6.2, on obtient :

COROLLAIRE 7.1. *Pour $n \geq 0$, et $k > 0$, on a*

$$i\left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(U_0)\right) = -\text{Tr}[h_n(f)^k].$$

On peut être plus précis :

PROPOSITION 7.3. *Soient $m \geq n \geq 0$ et $s_0, \dots, s_{k-1}, s_k = s_0 \in S_{>n}$. Alors l'ensemble*

$$\text{Fix}(f^k) \cap \left(\bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(s_i) \right)$$

est compact et on a

$$i\left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(s_i)\right) = -\text{Tr}[h_m(f^k)]_{s_k s_{k-1} \dots s_0}.$$

Démonstration. On a

$$\bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(s_i) = \bigcup_{s \in P_{n+k}(s_0, \dots, s_{k-1})} s$$

et

$$\begin{aligned} i\left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(s_i)\right) &= \sum_{s \in P_{n+k}(s_0, \dots, s_{k-1})} i(f^k, s) \\ &= \sum_{s \in P_{n+k}(s_0, \dots, s_{k-1})} I(f^k, s) \\ &= -\text{Tr}[h_m(f^k)]_{s_k s_{k-1} \dots s_0}. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 7.2. *Soient $m \geq n \geq 0$ et $s \in S_{>n}$. Alors pour tout $k > 0$, l'ensemble*

$$\text{Fix}(f^k) \cap \left(\bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(s) \right)$$

est compact et on a

$$i \left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(s) \right) = -\text{Tr}[h_m(f)]_{ss}^k.$$

§8. Ordre cyclique, résultats de périodicité.

On va supposer dans ce paragraphe que f préserve l'orientation et on va s'intéresser aux propriétés liées à l'ordre cyclique, pour plus de détails voir [LY].

Fixons $n > 0$. Pour $s, s' \in S_{>n}$, définissons

$$g_{s's} : A_n(s) \rightarrow A_n(s')$$

en notant $g_{s's}(a)$ l'unique arête de $A_n(s')$ qui sépare s' et $\Delta_1 f_* a$ dans $\Gamma_n(*)$. Remarquons que toutes ces applications sont d'images finies et, sauf pour un nombre fini de $s' \in S_{>n}$, d'images réduites à un élément. Cet ensemble fini représente l'ensemble des éléments de $S_{>n}$ qui sont dans l'enveloppe connexe de $\Delta_1(f_*(A_n(s)))$ dans $\Gamma_n(*)$, c'est-à-dire dans le plus petit arbre inclus dans $\Gamma_n(*)$ contenant $\Delta_1(f_*(A_n(s)))$. Étendons $g_{s's}$ linéairement en

$$g_{s's} : \mathbf{Z}(A_n(s)) \rightarrow \mathbf{Z}(A_n(s')),$$

c'est une application de rang fini. Si on pose

$$\tilde{g}_{s's} = [h_n(f)]_{s's},$$

on a

$$\tilde{g}_{s's}(a - a') = g_{s's}a - g_{s's}a',$$

pour $a, a' \in A_n(s)$. Le diagramme à ligne exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(s) & \hookrightarrow & \mathbf{Z}(A_n(s)) & \xrightarrow{\partial} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \tilde{g}_{s's} & & \downarrow g_{s's} & & \downarrow \text{Id}_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \longrightarrow & H_n(s') & \hookrightarrow & \mathbf{Z}(A_n(s')) & \xrightarrow{\partial} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est donc commutatif.

Si $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}, s_k = s_0$ sont des éléments de $S_{>n}$, et si on pose

$$g_{s_k s_{k-1} \dots s_0} = g_{s_k s_{k-1}} \circ g_{s_{k-1} s_{k-2}} \circ \dots \circ g_{s_1 s_0}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{s_k s_{k-1} \dots s_0} &= \tilde{g}_{s_k s_{k-1}} \circ \tilde{g}_{s_{k-1} s_{k-2}} \circ \dots \circ \tilde{g}_{s_1 s_0} \\ &= [h_n(f^k)]_{s_k s_{k-1} \dots s_0}, \end{aligned}$$

le diagramme à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(s) & \hookrightarrow & \mathbf{Z}(A_n(s)) & \xrightarrow{\partial} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \tilde{g}_{s_k \dots s_0} & & \downarrow g_{s_k \dots s_0} & & \downarrow \text{Id}_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \longrightarrow & H_n(s) & \hookrightarrow & \mathbf{Z}(A_n(s)) & \xrightarrow{\partial} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est également commutatif, ce qui donne

$$\mathrm{Tr}(\tilde{g}_{s_k \dots s_0}) - \mathrm{Tr}(g_{s_k \dots s_0}) + 1 = 0,$$

et on a de plus

$$\mathrm{Tr}(g_{s_k \dots s_0}) = \#\mathrm{Fix}(g_{s_k \dots s_0}).$$

Chaque ensemble $A_n(s)$, formé d'intervalles disjoints de C_n , est muni d'un ordre cyclique naturel. Le fait que f préserve l'orientation nous dit que chaque application $g_{s, s'} : A_n(s) \rightarrow A_n(s')$ préserve l'ordre cyclique. Il en est de même de l'application $g = g_{s_k \dots s_0}$, si $s_0, \dots, s_{k-1}, s_k \in S_{>n}$.

On en déduit que la restriction de g à $A = \bigcap_{l \geq 0} g^l(A_n(s))$, qui est fini, induit une bijection

préservant l'ordre cyclique de A sur A . Il existe alors des entiers $q, r \geq 1$, un élément $p \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ premier à q , tel que $g|_A$ soit conjugué (par un isomorphisme d'ensembles cycliquement ordonnés) à l'application

$$\hat{g} : \mathbf{Z}/rq\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/rq\mathbf{Z}, \quad i \mapsto i + rp.$$

En particulier, on a

$$\#\mathrm{Fix}(g^l) = \begin{cases} 0 & \text{si } l \notin q\mathbf{Z}, \\ rq & \text{si } l \in q\mathbf{Z}. \end{cases}$$

On en déduit :

THÉORÈME 8.1. *Pour tout $n \geq 1$ et pour toute suite périodique $(s_i)_{i \geq 0}$ de période k de $S_{>n}$, il existe $q, r \geq 1$ tels que, pour tout $l \geq 1$, on a*

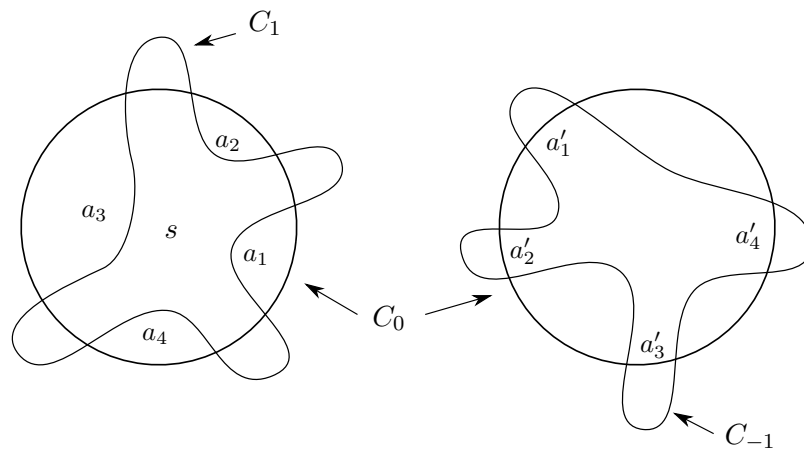
$$i \left(f^{kl}, \bigcap_{0 \leq i < kl} f^{-i}(s_i) \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } l \notin q\mathbf{Z}, \\ 1 - rq & \text{si } l \in q\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Comme cas particulier, où $k = 1$, on obtient le théorème 1.1.

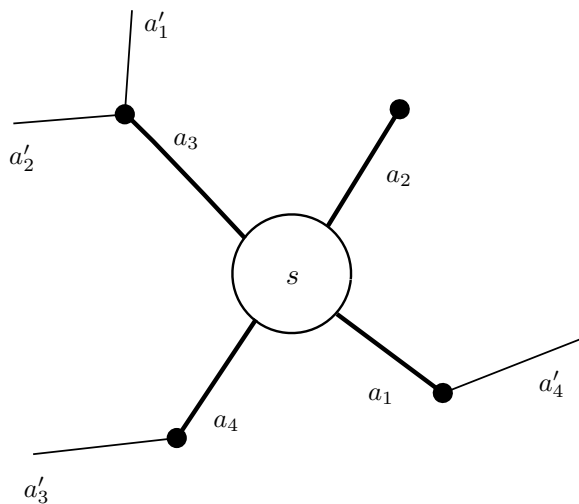
§9. Illustration sur des exemples.

On va donner plusieurs exemples de situations où U_0 vérifie les conditions **i)**, **ii)** et **iii)**. Dans chaque cas on commencera par tracer les courbes C_{-1} , C_0 et C_1 , on construira alors le graphe $\Gamma_1(*)$ et on étudiera les morphismes $h_0(f)$ et $h_1(f)$ ainsi que les autres objets rencontrés dans notre étude.

Exemple 1.



Dans l'exemple ci-dessus, $S_{>1}$ a un unique élément s tandis que S_1 et A_1 ont chacun quatre éléments. On note a_1, a_2, a_3, a_4 les éléments de A_1 et a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 leurs images par f (ou par f_*) qui forment l'ensemble A_0 . Le graphe $\Gamma_1(*)$ est dessiné ci-dessous.



L'application $\rho_0 : H_0 \rightarrow H_1$ vérifie

$$\rho_0 : \begin{cases} a'_1 - a'_2 \mapsto 0, \\ a'_1 - a'_3 \mapsto a_3 - a_4, \\ a'_1 - a'_4 \mapsto a_3 - a_1. \end{cases}$$

On en déduit que $h_0(f) : H_0 \rightarrow H_0$ vérifie

$$h_0(f) : \begin{cases} a'_1 - a'_2 \mapsto 0, \\ a'_1 - a'_3 \mapsto a'_3 - a'_1 + a'_1 - a'_4, \\ a'_1 - a'_4 \mapsto a'_3 - a'_1, \end{cases}$$

et que la matrice de $h_0(f)$ dans la base $(a'_1 - a'_2, a'_1 - a'_3, a'_1 - a'_4)$ s'écrit :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$M_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_0^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et on en déduit

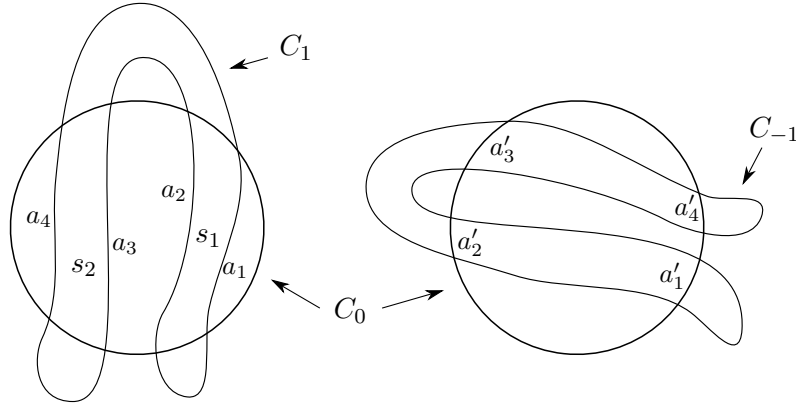
$$i \left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(U_0) \right) = -\text{Tr} (h_0(f)^k) = \begin{cases} +1 & \text{si } k \notin 3\mathbf{Z}, \\ -2 & \text{si } k \in 3\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Remarquons que la matrice M_1 de $h_1(f)$ dans la base $(a_1 - a_2, a_1 - a_3, a_1 - a_4)$ de $H_1(*)$ est égale à M_0 . On retrouverait donc la formule d'indice à l'aide de cette matrice. Remarquons également que l'application $g_{ss} : A_1(s) \rightarrow A_1(s)$ définie par la proposition 6.2 vérifie :

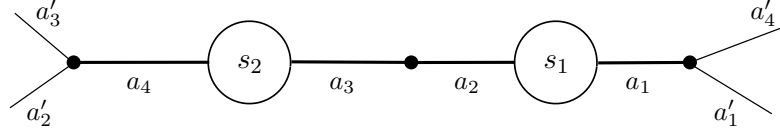
$$g_{ss} : \begin{cases} a_1 \mapsto a_3, \\ a_2 \mapsto a_3, \\ a_3 \mapsto a_4, \\ a_4 \mapsto a_1; \end{cases}$$

que l'ensemble $\bigcap_{k \geq 0} g_{ss}^k(A_1(s))$ est égal à $\{a_1, a_3, a_4\}$ et que la restriction de g_{ss} à cet ensemble est une permutation d'ordre 3. Ceci permet de réinterpréter la formule d'indice.

Exemple 2.



Dans l'exemple ci-dessus (représenté par exemple par le fer à cheval de Smale), $S_{>1}$ a deux éléments s_1 et s_2 , S_1 a trois éléments et A_1 quatre éléments. On note $a_1, a_2 \in A_1(s_1)$ et $a_3, a_4 \in A_1(s_2)$ les éléments de A_1 et a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 leurs images par f . Le graphe $\Gamma_1(*)$ est le suivant :



L'application $\rho_0 : H_0(*) \rightarrow H_1(*)$ vérifie :

$$\rho_0 : \begin{cases} a'_1 - a'_2 \mapsto a_1 - a_2 + a_3 - a_4, \\ a_1 - a_3 \mapsto a_1 - a_2 + a_3 - a_4, \\ a'_1 - a'_4 \mapsto 0. \end{cases}$$

On en déduit que la matrice de $h_0(f)$ dans la base $(a'_1 - a'_2, a'_1 - a'_3, a'_1 - a'_4)$ s'écrit :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et que la matrice de $h_1(f)$ dans la base $(a_1 - a_2, a_3 - a_4)$ de $H_1(*)$ s'écrit

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$M_0^2 = 0 \text{ et } M_1^2 = 0$$

et on retrouve bien l'égalité

$$\text{Tr}(M_1^k) = \text{Tr}(M_0^k) = 0.$$

On a donc, pour tout $k > 0$:

$$i \left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(U_0) \right) = 0.$$

Les matrices (1) et (-1), formées des coefficients diagonaux de M_1 représentent les matrices de $[h_1(f)]_{s_1 s_1}$ et de $[h_1(f)]_{s_2 s_2}$. On en déduit en particulier que pour tout $k > 0$, on a

$$i \left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(s_1) \right) = -\text{Tr}(1)^k = -1$$

et

$$i \left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(s_2) \right) = -\text{Tr}(-1)^k = (-1)^{k+1}.$$

Dans la cas du fer à cheval, l'ensemble invariant maximal contenu dans s_1 (resp. s_2) se réduit au point fixe du fer à cheval qui est une selle sans réflexion (resp. avec réflexion) et la quantité précédente est l'indice de Lefschetz de f^k en ce point fixe.

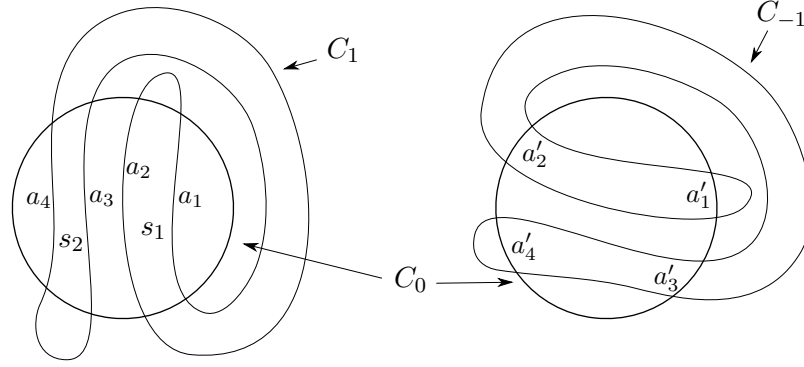
Pour toute application $\sigma : \{0, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2\}$ vérifiant $\sigma(k) = \sigma(0)$, le morphisme

$$[h_1(f^k)]_{s_{\sigma(k)} \dots s_{\sigma(0)}}$$

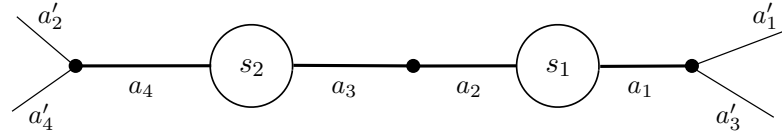
est une homothétie de rapport $(-1)^m$, où m est le nombre d'antécédents de 2 par σ . Ce nombre est égal à $-i \left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-k}(s_{\sigma_i}) \right)$. Comme il est non nul, on en déduit que l'ensemble $\bigcap_{0 \leq i < k} f^{-k}(s_{\sigma_i})$

contient au moins une orbite périodique de période k . Dans le cas du fer à cheval, l'ensemble maximal invariant par f^k contenu dans cet ensemble se réduit à une orbite périodique.

Exemple 3.



Dans l'exemple ci-dessus, représenté par un autre type de fer à cheval, les espaces sont de même dimension mais les applications changent. Le graphe $\Gamma_1(*)$ est dessiné ci-dessous.



L'application $\rho_0 : H_0(*) \rightarrow H_1(*)$ vérifie :

$$\rho_0 : \begin{cases} a'_1 - a'_2 \mapsto a_1 - a_2 + a_3 - a_4, \\ a'_1 - a'_3 \mapsto 0, \\ a'_1 - a'_4 \mapsto a_1 - a_2 + a_3 - a_4 ; \end{cases}$$

la matrice de $h_0(f)$ dans la base $(a'_1 - a'_2, a'_1 - a'_3, a'_1 - a'_4)$ s'écrit :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

la matrice de $h_1(f)$ dans la base $(a_1 - a_2, a_3 - a_4)$ de $H_1(*)$ s'écrit

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$M_0^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ -2^k & 0 & -2^k \\ 2^k & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

et

$$M_1^k = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix}.$$

On a donc, pour tout $k > 0$:

$$i \left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(U_0) \right) = -2^{k+1}.$$

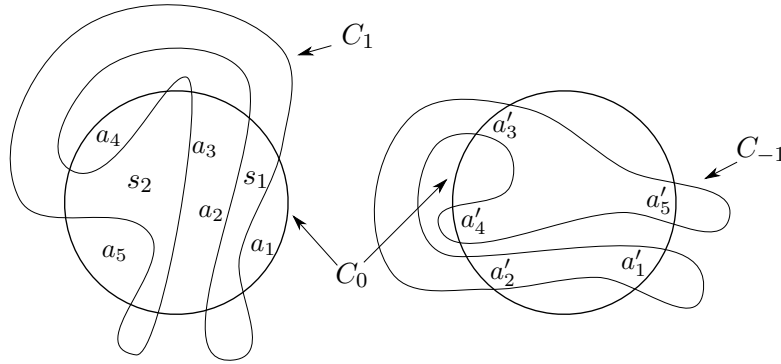
Les coefficients diagonaux de M_1 sont égaux à 1 et on en déduit que

$$i \left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(s_0) \right) = i \left(f^k, \bigcap_{0 \leq i < k} f^{-i}(s_0) \right) = -1,$$

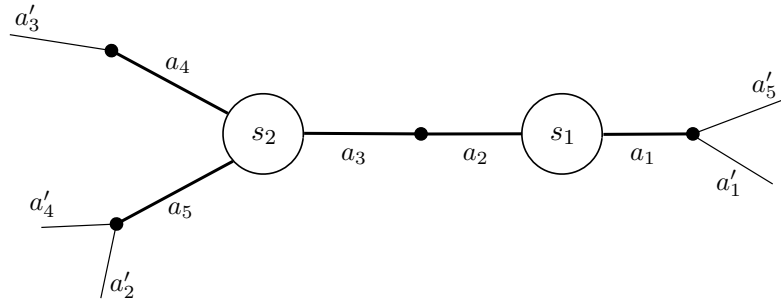
pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Dans la cas du fer à cheval, les deux points fixes sont des points selles sans reflexion. De même que toute orbite périodique. On peut illustrer ce fait en remarquant que pour toute application $\sigma : \{0, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2\}$ vérifiant $\sigma(k) = \sigma(0)$, l'application $[h_1(f^k)]_{s_{\sigma(k)} \dots s_{\sigma(0)}}$ est une homothétie de rapport 1.

Grâce à cet exemple, nous constatons que le théorème 8.1 de périodicité n'est pas valable pour $n = 0$.

Exemple 4.



Dans l'exemple ci-dessus, $S_{>1}$ a deux éléments s_1 et s_2 , S_1 a quatre éléments et A_1 cinq éléments. On note $a_1, a_2 \in A_1(s_1)$ et $a_3, a_4, a_5 \in A_1(s_2)$ les éléments de A_1 et $a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, a'_5$ leurs images par f . Le graphe $\Gamma_1(*)$ est dessiné ci-dessous.



L'application $\rho_0 : H_0(*) \rightarrow H_1(*)$ vérifie :

$$\rho_0 : \begin{cases} a'_1 - a'_2 \mapsto a_1 - a_2 + a_3 - a_5, \\ a'_1 - a'_3 \mapsto a_1 - a_2 + a_3 - a_4, \\ a'_1 - a'_4 \mapsto a_1 - a_2 + a_3 - a_5, \\ a'_1 - a'_5 \mapsto 0 ; \end{cases}$$

la matrice de $h_0(f)$ dans la base $(a'_1 - a'_2, a'_1 - a'_3, a'_1 - a'_4, a'_1 - a'_5)$ s'écrit :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la matrice de $h_1(f)$ dans la base $(a_1 - a_2, a_3 - a_4, a_3 - a_5)$ de $H_1(*)$ s'écrit

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice (1) formée du premier coefficient diagonal de M_1 représente la matrice de $[h(f)]_{s_1 s_1}$ et la matrice carrée

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice de $[h(f)]_{s_2 s_2}$ dans la base $(a_3 - a_4, a_3 - a_5)$ de $H_1(s_2)$. On a

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Remarquons que l'application $g_{s_2 s_2} : A_1(s_2) \rightarrow A_1(s_2)$, qui s'écrit

$$g_{s_2 s_2} : \begin{cases} a_3 \mapsto a_4, \\ a_4 \mapsto a_5, \\ a_5 \mapsto a_3, \end{cases}$$

est une permutation d'ordre 3. Ceci permet d'interpréter le fait que

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{cases} -1 & \text{si } k \notin 3\mathbf{Z}, \\ 2 & \text{si } k \in 3\mathbf{Z}. \end{cases}$$

La trace commune -1 des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)$$

est la valeur commune de

$$-i \left(f^2, s_1 \cap f^{-1}(s_2) \right) = -i \left(f^2, s_2 \cap f^{-1}(s_1) \right).$$

En particulier il existe une orbite périodique de période 2 ayant un point dans s_1 et un point dans s_2 .

On voit dans nos exemples que la matrice de $h_1(f)$ est généralement d'ordre inférieur à celui de $h_0(f)$ et nous donne plus d'informations.

§10. Minoration de l'entropie.

L'ensemble $K^+ = \bigcap_{k \geq 0} f^{-k}(\overline{U}_0)$ est une partie compacte positivement invariante et on a

$$f(K^+) \subset \bigcap_{k \geq 0} f^{-k}(U_0),$$

d'après la propriété **iii)** vérifiée par U_0 . Soit $z \in K^+$; pour tout $i \geq 0$, il existe un unique $s_i \in S_{>n}$ tel que $f^i(z) \in \overline{s}_i$ et on a $f^i(z) \in s_i$ si $i > 0$. On définit ainsi une application

$$r : K^+ \rightarrow (S_{>n})^{\mathbf{N}} .$$

Cette application est en fait à valeurs dans $(S'_{>n})^{\mathbf{N}}$, où $S'_{>n}$ est l'ensemble fini formé des $s \in S_{>n}$ tels que $S_{>n+1}(s) \neq \emptyset$. C'est une application continue dont l'image est une partie compacte $\mathcal{S}_{>n}$ de $(S_{>n})^{\mathbf{N}}$, positivement invariante par le décalage

$$\sigma : (S_{>n})^{\mathbf{N}} \rightarrow (S_{>n})^{\mathbf{N}}, (s_i)_{i \geq 0} \mapsto (s_{i+1})_{i \geq 0} ;$$

qui définit une semi-conjugaison entre $f|_K$ et $\sigma|_{\mathcal{S}}$. Elle définit même une semi-conjugaison entre l'application $f_* : \pi_0(K^+) \rightarrow \pi_0(K^+)$ induite par f sur les composantes connexes de K^+ et $\sigma|_{\mathcal{S}}$.

Pour $n \geq 1$, on note

$$P_n = \left\{ p = (a, a') \in A_n^2 \mid a \neq a' \text{ et } \overline{\Delta}_1(a) = \overline{\Delta}_1(a') \right\},$$

et on définit

$$\overline{\Delta}_1(p) = \overline{\Delta}_1(a) = \overline{\Delta}_1(a').$$

Pour $p_1 = (a_1, a'_1) \in P_n$, on considère l'enveloppe connexe Γ de $\Delta_1(f_*(\{a_1, a'_1\}))$ dans $\Gamma_n(*)$. Le sommet $s_2 \in S_{>n}$ appartient à Γ si et seulement si $g_{s_2 s_1}(a_1) \neq g_{s_2 s_1}(a'_1)$: on dira que la paire $p_2 = (a_2, a'_2)$ est liée à p_1 , où $a_2 = g_{s_2 s_1}(a_1)$ et $a'_2 = g_{s_2 s_1}(a'_1)$. On a alors

$$A_n(s_2) \cap \Gamma = \{a'_1, a'_2\}.$$

Puisque l'ensemble $\Delta_1(f_*(A_n))$ est fini, il n'y a qu'un nombre fini de paires p_2 qui sont liées à une paire p_1 , on note P'_n l'ensemble de ces paires.

L'ensemble

$$\mathcal{P}_n = \left\{ (p_i)_{i \geq 0} \in (P_n)^{\mathbf{N}} \mid p_{i+1} \text{ est liée à } p_i \right\},$$

est stable par le décalage

$$\sigma : (P_n)^{\mathbf{N}} \rightarrow (P_n)^{\mathbf{N}}, (p_i)_{i \geq 0} \mapsto (p_{i+1})_{i \geq 0} ;$$

c'est presque un sous-décalage de type fini puisque on a $\sigma(\mathcal{P}_n) \subset (P'_n)^{\mathbf{N}}$.

PROPOSITION 10.1 *L'image de \mathcal{P}_n par l'application*

$$\overline{\Delta}_1 : (P_n)^{\mathbf{N}} \rightarrow (S_{>n})^{\mathbf{N}}, (p_i)_{i \geq 0} \mapsto (\overline{\Delta}_1(p_i))_{i \geq 0},$$

est contenue dans $\mathcal{S}_{>n}$.

Démonstration. Donnons nous une suite $\mathbf{p} = (p_i)_{i \geq 0} \in \mathcal{P}_n$ et posons $p_i = (a_i, a'_i)$ et $s_i = \overline{\Delta}_1(p_i)$. Nous allons construire deux suites $(\tilde{a}_i)_{i \geq 0}$ et $(\tilde{a}'_i)_{i \geq 0}$, où $\tilde{a}_i, \tilde{a}'_i \in A_{n+i}$, telles que

- les arêtes \tilde{a}_{i+1} et \tilde{a}'_{i+1} sont dans l'enveloppe connexe de $\{\tilde{a}_i, \tilde{a}'_i\}$ dans Γ_{n+i+1} ;
- on a $f_*^i(\tilde{a}_i) = a_i$ et $f_*^i(\tilde{a}'_i) = a'_i$;
- les arêtes $f_*^j(\tilde{a}_i)$ et $f_*^j(\tilde{a}'_i)$ appartiennent à $A_{n+i-j}(s_j)$ pour $j \in \{0, \dots, i\}$.

Chaque ensemble $\bigcap_{0 \leq j \leq i} f^{-j}(\bar{s}_j)$ contenant \tilde{a}_i et \tilde{a}'_i , on saura que l'ensemble $\bigcap_{j \geq 0} f^{-j}(\bar{s}_j)$ est non vide et d'image par r égale à $\overline{\Delta}_1(\mathbf{p})$.

On va construire une telle suite par récurrence sur i . On pose $\tilde{a}_0 = a_0$ et $\tilde{a}'_0 = a'_0$. On suppose la suite construite jusqu'au rang i . Pour $j \in \{0, \dots, i+1\}$, on note Γ^j l'enveloppe connexe de $\{\Delta_1(f_*^j(\tilde{a}_i)), \Delta_1(f_*^j(\tilde{a}'_i))\}$ dans $\Gamma_{n+i+1-j}(*)$. Elle est contenue dans $\Gamma_{n+i+1-j}(s_j)$ si $j \leq i$. L'image par f_* de Γ^j contient Γ^{j+1} . Il existe donc un antécédent \tilde{a}_{i+1} (resp. \tilde{a}'_{i+1}) de a_{i+1} (resp. a'_{i+1}) par f_*^{i+1} dont l'image par f^j est dans Γ^j pour tout $j \in \{0, \dots, i+1\}$. \square

COROLLAIRE 10.1 : *L'entropie topologique de f est minorée par l'entropie topologique de $\sigma|_{\mathcal{P}}$.*

Démonstration Étant donné $\mathbf{s} = (s_i)_{i \geq 0} \in (S_{>n})^{\mathbf{N}}$ et $p \in P_n$, il existe au plus un antécédent $\mathbf{p} = (p_i)_{i \geq 0}$ de \mathbf{s} par $\overline{\Delta}_1$ tel que $p_0 = p$. Posant $\mathcal{S}'_{>n} = \overline{\Delta}_1(\sigma(\mathcal{P}_n))$, on sait que la restriction de σ à $\sigma(\mathcal{P}_n)$ est conjuguée par

$$t : \mathbf{p} \mapsto (\overline{\Delta}_1(\mathbf{p}), p_0)$$

à une application $\Sigma : X \rightarrow X$ de la forme

$$\Sigma(s, p) = (\sigma(s), w(s, p)),$$

où X est une partie de $\mathcal{S}'_{>n} \times P'_n$. Comme P'_n est fini, on a

$$h(\sigma|_{\mathcal{P}_n}) = h(\sigma|_{\sigma(\mathcal{P}_n)}) = h(\sigma|_{\mathcal{S}'_{>n}}) \leq h(\sigma|_{S_{>n}}) \leq h(f|_{K^+}) \leq h(f).$$

\square

Ainsi pour minorer l'entropie, il suffit d'étudier la matrice de transition définie sur l'ensemble fini P'_n .

Remarques : **i)** Si $\mathbf{p} = (p_i)_{i \geq 0} \in \mathcal{P}_n$ est une suite périodique de période $q \geq 0$, et si $p_0 = (a_0, a'_0)$, alors a_0 et a'_0 sont fixes par $g_{s_q \dots s_0}$. Comme cette application a au moins deux points fixes, la trace de $[h_n(f)]_{s_q \dots s_0}$ est strictement négative et il existe un point de période q dans l'ensemble $\bigcap_{0 \leq i < q} f^{-i}(s_i)$.

ii) Tous les raisonnements de ce paragraphe (à l'exception de la remarque **i**) à modifier légèrement) seront encore vrais si P_n représente l'ensemble des paires non orientées (une paire est cette fois-ci une partie de A_n formée de deux éléments ayant même image par $\overline{\Delta}_1$ et on peut définir naturellement la notion de paire liée). La matrice de transition est définie sur un espace de dimension moitié et l'entropie du décalage est la même que sur les paires orientées.

iii) La matrice de transition définie sur l'ensemble des paires orientées P_n permet de définir un endomorphisme naturel $u : \mathbf{Z}(P_n) \rightarrow \mathbf{Z}(P_n)$. L'endomorphisme u laisse invariant le sous-module E engendré par les vecteurs $(a, a') + (a', a)$, $(a, a') \in P_n$: la restriction de u à E

qui a même rayon spectral que u , n'est rien d'autre que l'endomorphisme naturellement défini par la matrice de transition sur les paires non orientées. L'endomorphisme u laisse également invariant le sous-module E' engendré par les vecteurs $(a, a') + (a', a)$, $(a, a') \in P_n$, et par les vecteurs $(a, a') + (a', a'') + (a'', a)$, $(a, a') \in P_n$, $(a', a'') \in P_n$, $(a'', a) \in P_n$, puisque $\Gamma_n(*)$ est un arbre, et l'endomorphisme défini sur l'espace quotient $\mathbf{Z}(P_n)/E'$ n'est rien d'autre que $h_n(f)$. En effet, l'endomorphisme $v : \mathbf{Z}(P_n) \rightarrow H_n$ qui envoie $p = (a, a') \in P_n$ sur $a - a'$ est surjectif et son noyau est engendré par les vecteurs $(a, a') + (a', a)$, $(a, a') \in P_n$, et par les vecteurs $(a, a') + (a', a'') + (a'', a)$, $(a, a') \in P_n$, $(a', a'') \in P_n$, $(a'', a) \in P_n$; de plus

$$h_n(f)(v(p)) = \sum_{p' \text{ liée à } p} v(p').$$

Examinons nos exemples du paragraphe 9 (en considérant les paires non orientées).

Exemple 1 : L'ensemble P'_1 est formé de $p_1 = \{a_1, a_3\}$, $p_2 = \{a_1, a_4\}$, $p_3 = \{a_3, a_4\}$; la matrice de transition est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui vérifie $M^3 = I_3$.

Exemples 2 et 3 : L'ensemble P'_1 est égal à P_1 et formé de $p_1 = \{a_1, a_2\}$ et $p_2 = \{a_3, a_4\}$; la matrice de transition est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

l'entropie est minorée par $\log 2$.

Exemple 4 : L'ensemble P'_1 est égal à P_1 et formé de $p_1 = \{a_1, a_2\}$, $p_2 = \{a_3, a_4\}$, $p_3 = \{a_3, a_5\}$ et $p_4 = \{a_4, a_5\}$; la matrice de transition est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'entropie est minorée par le logarithme de la plus grande racine de $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ qui est comprise strictement entre 1 et 2.

§11. Une suite de graphes modèles.

Nous allons construire, à partir de la donnée du graphe $\Gamma_{n_0}(*)$, $n_0 > 0$, une suite de graphes $(\widehat{\Gamma}_n(*))_{n \geq 0}$, avec $\widehat{\Gamma}_n(*) = \Gamma_n(*)$ si $n \leq n_0$, construite à l'aide d'ensembles \widehat{A}_n , \widehat{S}_n et $\widehat{S}_{>n}$ de la même façon que la suite $(\Gamma_n(*))_{n \geq 0}$, et représentant en quelque sorte le modèle le plus simple possible pour cette suite.

Pour $0 \leq n \leq n_0$, on pose

$$\widehat{S}_n = S_n, \widehat{S}_{>n} = \widehat{S}_{>n} \text{ et } \widehat{A}_n = A_n.$$

Pour $n = n_0 + 1$, on définit

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{>n_0+1} &= \{(s_1, s_2) \in (S_{>n_0})^2 \mid s_2 \in \Gamma(s_1)\}, \\ \widehat{S}_{n_0+1} &= \{(s_1, s_2) \in S_{>n_0} \times S_{n_0} \mid s_2 \in \Gamma(s_1)\}, \\ \widehat{A}_{n_0+1} &= \{(s_1, a) \in S_{>n_0} \times A_{n_0} \mid a \in \Gamma(s_1)\},\end{aligned}$$

où $\Gamma(s)$, $s \in S_{>n_0}$, est l'enveloppe connexe de $f_*(A_{n_0}(s))$ dans $\Gamma_{n_0}(\ast)$.

Pour $n \geq n_0 + 2$, on définit $\widehat{S}_{>n}$, \widehat{S}_n , \widehat{A}_n , parties respectives de $(S_{>n_0})^{n-n_0+1}$, $(S_{>n_0})^{n-n_0} \times S_{n_0}$, $(S_{>n_0+1})^{n-n_0} \times A_{n_0}$, par la relation de récurrence suivante :

$(s_1, \dots, s_{n-n_0}, s_{n-n_0+1}) \in \widehat{S}_{>n}$ (resp. $(s_1, \dots, s_{n-n_0}, s_{n-n_0+1}) \in \widehat{S}_n$, resp. $(s_1, \dots, s_{n-n_0}, a) \in \widehat{A}_n$) si et seulement si s_{n-n_0+1} (resp. s_{n-n_0+1} , resp. a) appartient à l'enveloppe connexe dans $\Gamma_{n_0}(\ast)$ de l'ensemble

$$\{f_*a' \mid a' \in A_{n_0}(s_{n-n_0}) \text{ et } (s_1, \dots, s_{n-n_0-1}, a') \in \widehat{A}_{n-1}\}.$$

Remarquons que

$$\widehat{S}_{>n} = \{(s_1, \dots, s_{n-n_0+1}) \in (S_{>n_0})^{n-n_0+1} \mid [h_{n_0}(f^n)]_{s_{n-n_0+1}s_{n-n_0}\dots s_1} \neq 0\},$$

que c'est aussi l'ensemble des $(s_1, \dots, s_{n-n_0+1})$ tels que l'application $g_{s_{n-n_0+1}\dots s_1}$ définie plus haut n'est pas constante, ou encore l'ensemble des n -uplets de la forme $(\overline{\Delta}_1(p_1), \dots, \overline{\Delta}_1(p_{n-n_0+1}))$, où chaque paire p_i de P_{n_0} est liée à p_{i-1} si $i \geq 2$.

De même, pour $n \geq n_0 + 1$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{A}_n &= \{(s_1, \dots, s_{n-n_0}, a) \in (S_{>n_0})^{n-n_0} \times A_{n_0} \mid (s_1, \dots, s_{n-n_0}, \overline{\Delta}_1(a)) \in \widehat{S}_{>n} \\ &\quad \text{et } a \in g_{\overline{\Delta}_1(a)s_{n-n_0}\dots s_1}(A_{n_0}(s_1))\}.\end{aligned}$$

Les applications $\Delta_0 : \widehat{A}_n \rightarrow \widehat{S}_n$ et $\overline{\Delta}_1 : \widehat{A}_n \rightarrow \widehat{S}_{>n}$ sont déjà définies pour $0 \leq n \leq n_0$; on pose pour $n \geq n_0 + 1$:

$$\Delta_0(s_1, \dots, s_{n-n_0}, a) = (s_1, \dots, s_{n-n_0}, \Delta_0 a),$$

et

$$\overline{\Delta}_1(s_1, \dots, s_{n-n_0}, a) = (s_1, \dots, s_{n-n_0}, \overline{\Delta}_1 a).$$

L'application $\Delta_1 : \widehat{A}_n \rightarrow \widehat{S}_{n+1}$ est déjà définie pour $0 \leq n < n_0$; on pose pour $n = n_0$:

$$\Delta_1 a = (\overline{\Delta}_1 a, \Delta_1(f_*a)) ;$$

et pour $n \geq n_0 + 1$:

$$\Delta_1(s_1, \dots, s_{n-n_0}, a) = (s_1, \dots, s_{n-n_0}, \overline{\Delta}_1 a, \Delta_1(f_*a)).$$

Les applications

$$p_{>n} : \widehat{S}_m \rightarrow \widehat{S}_{>n}, \widehat{A}_m \rightarrow \widehat{S}_{>n}, \widehat{S}_{>m} \rightarrow \widehat{S}_{>n},$$

sont définies de façon usuelle pour $n_0 \geq m > n \geq 0$. Pour $m > n \geq n_0$, on pose

$$p_{>n}(s_1, \dots, s_{m-n_0+1}) = (s_1, \dots, s_{n-n_0+1})$$

et

$$p_{>n}(s_1, \dots, s_{m-n_0}, a) = (s_1, \dots, s_{n-n_0+1}) ;$$

pour $m > n_0 > n \geq 0$, on pose

$$p_{>n}(s_1, \dots, s_{m-n_0+1}) = p_{>n}(s_1)$$

et

$$p_{>n}(s_1, \dots, s_{m-n_0}, a) = p_{>n}(s_1).$$

On peut alors définir, comme dans le paragraphe 1, pour $m > n \geq 0$ et $s \in S_{>n}$ les ensembles $\widehat{S}_m(s)$, $\widehat{A}_m(s)$ et $\widehat{S}_{>m}(s)$ ainsi que $\widehat{A}_n(s)$.

La construction faite au paragraphe 4 nous permet de construire pour $m > n \geq 0$ et $s \in S_{>n}$ un graphe $\widehat{\Gamma}_m(s)$. Si $n \geq 1$ ce graphe est fini. Il n'est pas difficile de montrer par récurrence sur $m - n$ que chacun de ces graphes est un arbre.

On peut construire comme au paragraphe 3 un \mathbf{Z} -module $\widehat{H}_m(s)$ et un morphisme $\rho_m(s) : \widehat{H}_m(s) \rightarrow \widehat{H}_{m+1}(s)$ pour $m \geq n \geq 0$ et $s \in S_{>n}$.

Les applications

$$f_* : \begin{cases} \widehat{S}_{>n} & \rightarrow & \widehat{S}_{>n-1}, \\ \widehat{S}_n & \rightarrow & \widehat{S}_{n-1}, \\ \widehat{A}_n & \rightarrow & \widehat{A}_{n-1}, \end{cases}$$

sont déjà définies pour $0 < n \leq n_0$; on pose pour $n \geq n_0 + 1$:

$$f_*(s_1, \dots, s_{n-n_0+1}) = (s_2, \dots, s_{n-n_0+1}) \quad \text{et} \quad f_*(s_1, \dots, s_{n-n_0}, a) = (s_2, \dots, s_{n-n_0}, a) .$$

Ces applications commutent avec Δ_0 , Δ_1 et $\overline{\Delta}_1$ et tous les résultats du paragraphe 4, qui sont purement algébriques sont encore valables.

La famille d'applications $f_* : \widehat{S}_{>n+1} \rightarrow \widehat{S}_{>n}$ nous permet de définir une application $f_* : \widehat{S}_{\leftarrow} \rightarrow \widehat{S}_{\leftarrow}$, où \widehat{S}_{\leftarrow} est la limite projective définie par les $p_{>n} : \widehat{S}_{>m} \rightarrow \widehat{S}_{>n} : c'est le décalage $\sigma_{|\overline{\Delta}_1(\mathcal{P}_n)}$ défini au paragraphe précédent.$

La famille d'applications $f_* : S_{>n+1} \rightarrow S_{>n}$ nous permet de définir une application $f_* : S_{\leftarrow} \rightarrow S_{\leftarrow}$, où S_{\leftarrow} est la limite projective définie par les $p_{>n} : S_{>m} \rightarrow S_{>n} : c'est l'application $f_* : \pi_0(K^+) \rightarrow \pi_0(K^+)$ induite par f sur les composantes connexes de K^+ .$

Étant donné f et $n_0 \geq 1$, on peut considérer l'ensemble des homéomorphismes \tilde{f} tels que

$$\tilde{f}|_{\bigcup_{0 \leq m \leq n_0} C_m} = f|_{\bigcup_{0 \leq m \leq n_0} C_m}.$$

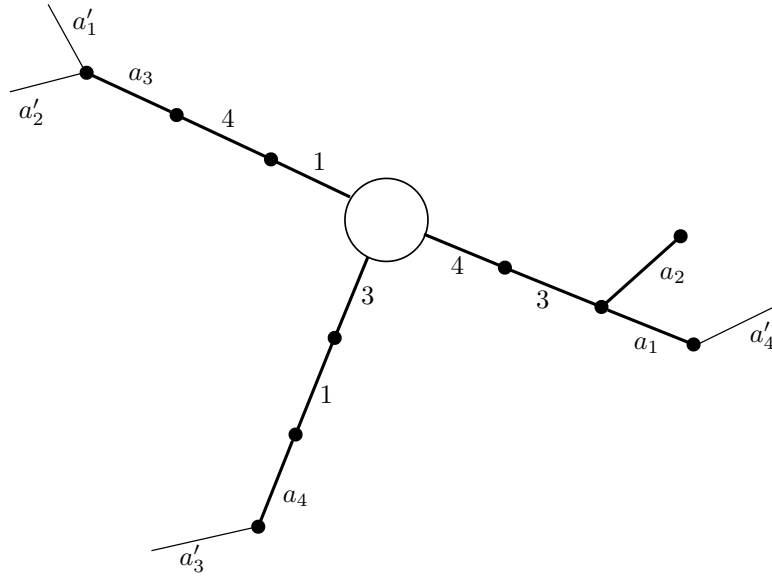
Pour un tel \tilde{f} , on a encore

$$\overline{U_0} \cap \tilde{f}(\overline{U_0}) \cap \tilde{f}^{-1}(\overline{U_0}) \subset U_0,$$

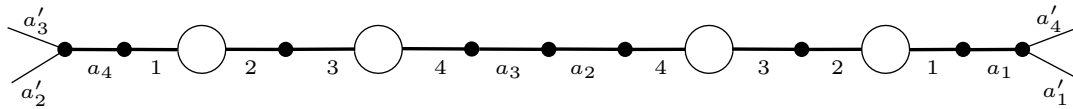
donc on peut définir les arbres Γ_n pour \tilde{f} (notés $\Gamma_n(\tilde{f})$) : ce sont les mêmes que ceux de f pour $n \leq n_0$.

Question : Existe-t-il un tel \tilde{f} avec $\Gamma_n(\tilde{f}) = \hat{\Gamma}_n$ (graphe modèle à partir du rang n_0) ? De plus peut-on construire \tilde{f} en supposant également que $K(\tilde{f}) = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{f}^{-k}(\overline{U_0})$ est totalement discontinu. L'entropie de $\tilde{f}|_{K(\tilde{f})}$ devrait alors être égale à l'entropie du décalage défini par sur les paires liées.

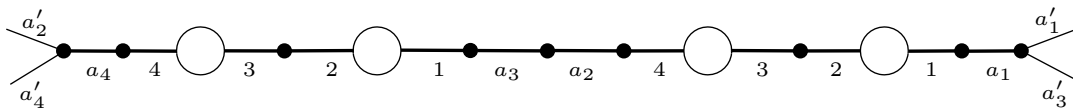
Construction de $\hat{\Gamma}_3(*)$ pour l'exemple 1 :



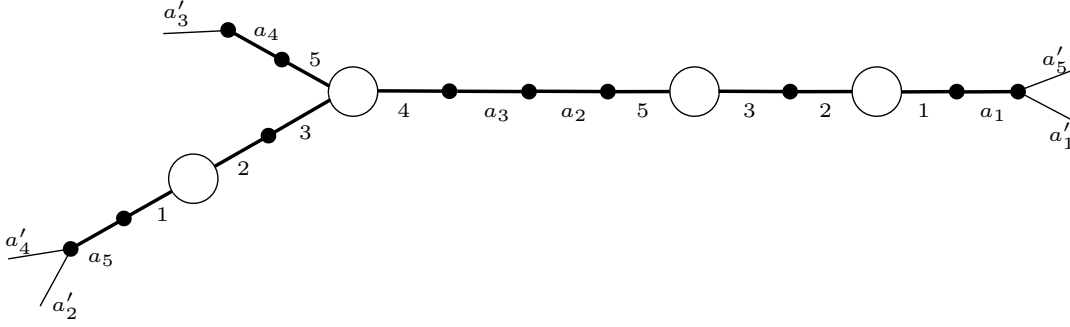
Construction de $\hat{\Gamma}_2(*)$ pour l'exemple 2 :



Construction de $\hat{\Gamma}_2(*)$ pour l'exemple 3 :



Construction de $\widehat{\Gamma}_2(*)$ pour l'exemple 4 :



§12. Cas d'un ouvert U_0 qui est union d'un nombre fini de domaines de Jordan d'adhérences disjointes

On définit $S_n, A_n, S_{>n}$ comme dans le texte, mais $S_{>0}$ a maintenant plusieurs éléments.

Pour $n \geq 0, s \in S_{>n}$, on définit $A_m(s), S_{>m}(s) (m \geq n), \Gamma_m(s), S_m(s) (m > n)$, puis $H_m(s), \rho_m(s) (m \geq n)$ comme dans le texte. Les propositions 3.1, 4.1 et le lemme 4.1 sont inchangés. Le paragraphe 5 est également inchangé.

Au début du paragraphe 6, on pose

$$H_n = \bigoplus_{s \in S_{>0}} H_n(s)$$

et

$$\rho_n = \bigoplus_{s \in S_{>0}} \rho_n(s).$$

Pour $n \geq 0$, on a

$$H_n = \bigoplus_{s \in S_{>1}} H_n(s)$$

avec

$$f_* : H_n(s) \rightarrow H_{n-1}(f_*(s))$$

pour $s \in S_{>1}$, et on définit ainsi

$$f_* : H_n \rightarrow H_{n-1}.$$

Le reste du paragraphe 6 est inchangé.

Dans la démonstration de la proposition 7.1, on distingue deux cas :

- si $p_{>0}(s) \neq p_{>0}(f_*^k s)$, alors $\text{Fix}(f^k) \cap s$ est vide et $[h_n(f^k)]_{ss} = 0$, donc $I(f^k, s) = i(f^k, s) = 0$ dans ce cas ;
- si $p_{>0}(s) = p_{>0}(f_*^k s)$, on procède comme dans le texte : on définit $F_k(s), g$, etc.

La proposition 7.2 reste valable, ainsi que la proposition 7.3 et le corollaire 7.1. Mais il faut changer la ligne qui précède le corollaire 7.1. Le corollaire 7.2 reste valable.

Dans le paragraphe 8 :

- on ne définit $g_{s's}$ que lorsque $p_{>0}(f_*s) = p_{>0}(s')$; lorsque ce n'est pas le cas, on a $[h_n(f)]_{s's} = 0$;
- de même, les suites $s_0, \dots, s_n = s_0$ à considérer ne sont dignes d'intérêt que si $p_{>0}(f_*s_i) = p_{>0}(s_{i+1})$.

Le paragraphe 10 est inchangé.

§13. Compléments : graphes “essentiels”

LEMME 13.1 : Soient $n \geq 0$, $a \in A_n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) a rencontre $K^- = \bigcap_{i \geq 0} f^i(\bar{U}_0)$;
- ii) il existe une suite $(a_m)_{m \geq n}$ avec $a_n = a$, $a_m \in A_m$ et $f_*(a_{m+1}) = a_m$ pour tout $m \geq n$;
- iii) pour tout $m \geq n$, il existe $\tilde{a}_m \in A_m$ tel que $(f_*)^{m-n}(\tilde{a}_m) = a$.

Démonstration : Commençons par montrer **i**) \Rightarrow **ii**). Soit $x \in a \cap K^-$. On a $f^{-i}(x) \in U_0$ pour tout $i \geq 0$; soit a_{n+i} l'élément de A_{n+i} qui contient $f^{-i}(x)$, la suite $(a_{n+i})_{i \geq 0}$ vérifie les conclusions de **ii**).

L'implication **ii**) \Rightarrow **iii**) étant triviale, il reste à prouver **iii**) \Rightarrow **i**). Si **iii**) est vérifiée, a rencontre $\bigcap_{0 \leq i \leq m} f^i(\bar{U}_0)$ pour tout $m \geq 0$, donc \bar{a} rencontre K^- . Mais les extrémités de \bar{a} appartiennent à $C_0 \cap \bar{U}_n$ si $n > 0$, à $C_{-1} \cap \bar{U}_0$ si $n = 0$, donc ne peuvent appartenir à K^- . \square

On notera A_n^∞ l'ensemble des arêtes $a \in A_n$ qui vérifient les propriétés équivalentes du lemme. C'est une partie finie, non vide, de A_n . L'application f_* envoie A_{n+1}^∞ sur A_n^∞ (c'est une bijection de A_1^∞ sur A_0^∞).

Pour $n \geq 0$, on notera S_n^∞ (resp. $S_{>n}^\infty$) l'ensemble des éléments $s \in S_n$ (resp. $S_{>n}$) tels qu'il existe une suite $(s_m)_{m \geq n}$ vérifiant $s_n = s$ et pour tout $m \geq n$, $s_m \in S_m$ (resp. $S_{>m}$), $f_*(s_{m+1}) = s_m$. Il revient au même de demander que pour tout $m \geq n$, il existe $\tilde{s}_m \in S_m$ (resp. $S_{>m}$) tel que $f_*^{m-n}(\tilde{s}_m) = s$: cela résulte de ce que $f_* : S_{m+1} \rightarrow S_m$ (resp. $S_{>m+1} \rightarrow S_{>m}$) est d'image finie.

Si $a \in A_n^\infty$, alors $\Delta_0 a \in S_n^\infty$, $\Delta_1 a \in S_{n+1}^\infty$ et $\bar{\Delta}_1 a \in S_{>n}^\infty$. Inversement, si $s \in S_{>n}^\infty$ ($n \geq 0$), il existe $a \in A_n^\infty$ tel que $\bar{\Delta}_1 a = s$ (c'est encore une conséquence des assertions de finitude). Si $s \in S_n^\infty$ ($n > 0$), s est extrémité d'une arête dans A_n^∞ ou A_{n-1}^∞ .

Les parties S_n^∞ , $S_{>n}^\infty$ sont finies, non vides ; les applications f_* envoient S_{n+1}^∞ (resp. $S_{>n+1}^\infty$) sur S_n^∞ (resp. $S_{>n}^\infty$) pour tout $n \geq 0$. Comme on suppose que toute composante connexe de U_0 rencontre K , on a $S_{>0}^\infty = S_{>0}$.

Notons Γ_m^∞ (pour $m > 0$) le graphe (contenu dans $\bigsqcup_{s \in S_{>0}} \Gamma_m(s)$) dont les sommets sont les éléments de $\bigsqcup_{0 < l \leq m} S_l^\infty \bigsqcup S_{>m}^\infty$ et les arêtes sont les éléments de $\bigsqcup_{0 < l \leq m} A_l^\infty$. Définissons aussi, pour $n \geq 0$, $s \in S_{>n}^\infty$, le graphe $\Gamma_m^\infty(s)$, pour $m > n$, de la façon évidente (i.e. $\Gamma_m^\infty(s) = \Gamma_m(s) \cap \Gamma_m^\infty$).

PROPOSITION 13.1 : Pour tout $m > 0$, toute composante connexe de Γ_m^∞ contient un sommet dans S_1^∞ .

Démonstration : Soit s un sommet de Γ_m^∞ ; on peut supposer que s n'appartient pas à S_1^∞ . Pour tout $i > 0$, choisissons un sommet s_i de $\Gamma_{m+i} = \bigsqcup_{\tilde{s} \in S_{>0}} \Gamma_{m+i}(\tilde{s})$ tel que $f_*^i(s_i) = s$. Notons

$\tilde{s}_i = p_{>0}(s_i)$. Comme $\Gamma_{m+i}(\tilde{s}_i)$ est un arbre, et contient comme sommets des éléments de S_1 , on peut trouver dans $\Gamma_{m+i}(\tilde{s}_i)$ un chemin γ_i tel que

- les arêtes formant γ_i appartiennent à $\bigsqcup_{i < l \leq m+i} A_l$,
- les extrémités de γ_i sont s_i et un sommet $s'_i \in S_{i+1}$.

En considérant l'image par f_*^i de γ_i , on obtient un chemin dont les arêtes appartiennent à $\bigsqcup_{i < l \leq m+i} f_*^i(A_l) \subset \bigsqcup_{0 < l \leq m} A_l$ et les extrémités sont s et $f_*^i(s'_i) \in f_*^i(S_{i+1}) \subset S_1$. Comme $f_*(S_2)$ est une partie finie de S_1 , on peut lorsque i tend vers $+\infty$ extraire des sous-suites et conclure. \square

Définissons sur S_1^∞ la relation d'équivalence suivante : $s \sim s'$ si et seulement si pour tout $m > 0$, s et s' appartiennent à la même composante connexe de Γ_m^∞ . Notons $\pi_0(\Gamma^\infty)$ l'ensemble des classes d'équivalence. Comme S_1^∞ est fini, il existe $M > 0$ tel que $s \sim s'$ si et seulement si s et s' appartiennent à la même composante connexe de Γ_M^∞ .

Pour $m \geq n > 0$, l'application $p_{>n}$ induit une application $\pi_0(\Gamma_m^\infty) \rightarrow \pi_0(\Gamma_n^\infty)$ et cette application est une surjection d'après la proposition. Pour $m \geq M$, on peut identifier $\pi_0(\Gamma_M^\infty)$ à $\pi_0(\Gamma^\infty)$.

PROPOSITION 13.2 : *Soit $(s_n)_{n \geq 0}$, $s_n \in S_{>n}$, une suite décroissante. Alors $\bigcap_{n \geq 0} \overline{s_n}$ est une composante connexe de K^+ et on réalise ainsi une bijection entre l'ensemble de telles suites décroissantes et $\pi_0(K^+)$. L'ensemble des suites décroissantes $(s_n)_{n \geq 0}$ telles que $s_n \in S_{>n}^\infty$ pour tout n s'identifie alors à l'ensemble des composantes connexes de K^+ qui rencontrent K .*

Démonstration : Soit $(s_n)_{n \geq 0}$, $s_n \in S_{>n}$, une suite décroissante. Alors $\bigcap_{n \geq 0} \overline{s_n}$ est une partie compacte connexe de K^+ . De plus, pour tout $n \geq 0$, $K^+ \cap \overline{s_n}$ est une partie ouverte (et bien sûr fermée) de K^+ : si $x \in K^+ \cap \overline{s_n}$, alors $x \in \partial s_n - C_n \subset C_0$, et il existe un voisinage V de x tel que $K^+ \cap V \subset \overline{U_0} \cap V \subset \overline{s_n}$. Donc $\bigcap_{n \geq 0} \overline{s_n}$ est une composante connexe de K^+ .

Considérons une composante connexe L de K^+ . On a $L \subset K^+ \subset \overline{U_0} \cap_{i > 0} f^{-i}(U_0)$. Soient $x \in L$, $n > 0$; il existe un voisinage ouvert V de x , contenu dans $\bigcap_{0 < i \leq n} f^{-i}(U_0)$, tel que $V \cap U_0$ est connexe ; soit alors $s_n \in S_{>n}$ la composante connexe de U_n qui contient $V \cap U_0$; on a $V \cap L \subset \overline{s_n}$. Comme L est connexe, et $K^+ \cap \overline{s_n}$ est ouverte et fermée dans K^+ , on a $L \subset \overline{s_n}$. On construit ainsi une suite décroissante $(s_n)_{n \geq 0}$, $s_n \in S_{>n}$, telle que $L \subset \overline{s_n}$, et on doit avoir $L = \bigcap_{n \geq 0} \overline{s_n}$, puisque $\bigcap_{n \geq 0} \overline{s_n}$ est une composante connexe de K^+ .

Pour montrer la première assertion de la proposition, il reste à remarquer que si s_n et s'_n sont deux éléments distincts de $S_{>n}$, un point de $\overline{s_n} \cap \overline{s'_n}$ appartient nécessairement à $C_0 \cap C_n$, donc ne peut (pour $n > 1$) appartenir à K^+ .

Montrons maintenant la seconde assertion. Soit $x \in K$; il est clair que la composante connexe s_n de U_n qui contient x appartient à $S_{>n}^\infty$. Inversement, soit $s_n \in S_{>n}^\infty$; alors $\overline{s_n}$ rencontre K^- ; comme $K^+ \cap K^- = K$, cela termine la démonstration de la proposition. \square

Bibliographie

[LY] P. LE CALVEZ, J.-C. YOCOZ : Un théorème d'indice pour les homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe, à paraître dans *Ann. of Maths.*