# Métodos Matemáticos em Finanças - 2006

Guia de Estudos # 3

Não Entregar.

Neste guia listaremos um conjunto de exercícios para o estudo para a prova. (Atenção usar a versão das listas atualizadas e corrigidas.)

1. TODAS AS LISTAS.

2. (a) Descreva de forma concisa o conceito de *preço justo de um contrato contingenciado do tipo americano.*
   (b) Descreva o conceito de *hedging* para opções americanas.
   (c) Descreva o conceito de medida martigal equivalente.
   (d) Descreva a relacao entre existência de medida martingal equivalente e ausencia de arbitragem.
   (e) Descreva para mercados não necessariamente completos o conceito de um contrato contingenciado alcançável (attainable).

3. Sob as mesmas hipóteses do modelo de Black-Scholes para um mercado composto de um ativo sem risco (bond) e um ativo com risco (ação) com $d = m = 1$, $\sigma > 0, b, r$ constantes (mesma notação usada em sala).

   Considere o contrato do tipo "Bull spread"om preços base $K_1 < K_2$:

$$B(T) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad P_1(T) < K_1 \\ (P_1(T) - K_1)^+ & \text{se} \quad K_1 \leq P_1(T) \leq K_2 \\ K_2 - K_1 & \text{se} \quad P_1(T) > K_2 \end{cases}$$

   (a) Mostre que $(B(T), g \equiv 0)$ é um contrato contingenciado.
   (b) Precifique em um instante $t \in [0, T]$ tal contrato.

4. Conforme definido em aula, seja $H(t) = \gamma(t)Z(t)$ onde $\gamma(t) = \exp(-\int_0^t r(s)ds)$,

$$Z(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t ||\theta(s)||^2 ds - \int_0^t \theta(s)^T dW_s\right) ,$$

   com $\theta(t) = \sigma^{-1}(t)(b(t) - r(t)\mathbf{1})$. Mostre que $1/H(t)$ é o processo de riqueza correspondente ao par $(\pi(t), c(t)) = (\sigma^{-1}(t)^T\theta(t), 0)$ com riqueza inicial $x = 1/H(0) = 1$.

5. Assuma o modelo de Black-Scholes para um ativo com risco e outro sem risco com taxa de juros $r$. Obtenha uma fórmula em termos da medida martingale equivalente para o preço justo de uma opção do tipo "call" asiática com strike $K$ e maturidade $T$, ou seja a função de payoff dada por:

$$C_T = \left(\frac{1}{T}\int_0^T P_1(t)dt - K\right)^+ .$$

   Não se esqueça de verificar as hipóteses para a validade da fórmula obtida.

6. Assuma o resultado que o preço justo de uma opção contingenciada americana $B$ é dado por

$$\widehat{p} = \sup_{\tau \in \Sigma_{0,T}} E(H(\tau)B(\tau))$$

e que existe um tempo de parada $\tau^*$ t.q. o sup acima é atingido para uma estratégia de hedging $(\pi^*, 0)$ correspondente a $\tau^*$ (Teo. 3.39 Korn & Korn). Mostre que tal preço $\widehat{p}$ é o único que não leva a oportunidades de arbitragem.