Métodos Matemáticos em Finanças - 2006

Lista de Exercícios # 4

Entregar até às 19:30 do dia 24/04/2006.

Nesta lista vamos assumir as hipótese introduzidas em aula sobre os ativos do mercado. Conforme definido em aula, seja $H(t) = \gamma(t)Z(t)$ onde $\gamma(t) = \exp(-\int_0^t r(s)ds)$,

$$Z(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t ||\theta(s)||^2 ds - \int_0^t \theta(s)^T dW_s\right) ,$$

com $\theta(t) = \sigma^{-1}(t)(b(t) - r(t)\mathbf{1})$ onde $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)^T \in \mathbb{R}^{d\times 1}$.

1. Partindo da formula que obtivemos em aula para o preço justo de uma obrigação contingenciada, complete os detalhes que levam a fórmula do preço de uma opção do tipo *put europeia*. (deixando explícitas as passagens de mudanças de variáveis).

2. Seja $X_C(t)$ o preço de uma opção do tipo *call europeia*. Mostre que ela possui as seguintes propriedades (interpretando-as economicamente).
   - $X_C(t)$ decresce com t.
   - $X_C(t)$ cresce com r .
   - $X_C(t)$ cresce com $P_1(t)$.
   - $X_C(t)$ cresce com σ para $\sigma > 0$.

3. Mostre que os seguintes pares são contratos contingenciados.
   (a) Call Europeia com pagamento contínuo de dividendos: $(g(t) = \delta P_1(t), B = (P_1(T) - K)^+)$
   (b) Put Europeia com pagamento contínuo de dividendos: $(g(t) = \delta P_1(t), B = (K - P_1(T))^+)$

4. Demonstre a observação 3.6 da página 87 do livro texto Korn and Korn.