Introdução à Teoria dos Jogos

FABIO A. C. C. CHALUB

Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais
Universidade de Lisboa

O que é um Jogo?

Vários agentes tomam suas decisões e o resultado depende do conjunto de decisões tomadas.

O que é um Jogo?

Vários agentes tomam suas decisões e o resultado depende do conjunto de decisões tomadas.

O que é um Jogo?

Vários agentes tomam suas decisões e o resultado depende do conjunto de decisões tomadas.

O que é um Jogo?

Vários agentes tomam suas decisões e o resultado depende do conjunto de decisões tomadas.

O que é um Jogo?

Vários agentes tomam suas decisões e o resultado depende do conjunto de decisões tomadas.

O que é um Jogo?

Vários agentes tomam suas decisões e o resultado depende do conjunto de decisões tomadas.

Objetivos

Objetivos

- O Dilema do Prisioneiro

Objetivos

- O Dilema do Prisioneiro
- As Pombas e os Falcões

Objetivos

- O Dilema do Prisioneiro
- As Pombas e os Falcões
- Jogos Assimétricos

Objetivos

- O Dilema do Prisioneiro
- As Pombas e os Falcões
- Jogos Assimétricos
- Dinâmica

O Dilema do Prisioneiro

1 \ 2	Coopera	Trai
Coopera	(3,3)	(6,1)
Trai	(1,6)	(5,5)

O Dilema do Prisioneiro

1 \ 2	Coopera	Trai
Coopera	3	6
Trai	1	5

O Dilema do Prisioneiro

1 \ 2	Coopera	Trai
Coopera	-3	-6
Trai	-1	-5

O Dilema do Prisioneiro

2 / 1	Coopera	Trai
Coopera	3	0
Trai	5	1

O Dilema do Prisioneiro

2 / 1	Coopera	Trai
Coopera	3	0
Trai	5	1

O Dilema do Prisioneiro

1 \ 2	Coopera	Trai
Coopera	3	0
Trai	5	1

Equilibrio de Nash

O Dilema do Prisioneiro

O Dilema do Prisioneiro

- 2 Jogadores

O Dilema do Prisioneiro

- 2 Jogadores
- 2 Estratégias: Cooperar e Trair

O Dilema do Prisioneiro

- 2 Jogadores
- 2 Estratégias: Cooperar e Trair
- Uma matrix de ganho (*pay-off*) para cada jogador:

$$\begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix}$$

$T > R > P > S$ e $2R > T + S$.

O Dilema do Prisioneiro

- 2 Jogadores
- 2 Estratégias: Cooperar e Trair
- Uma matrix de ganho (*pay-off*) para cada jogador:

$$\begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix}$$

$T > R > P > S$ e $2R > T + S$.

- O equilíbrio de Nash se dá com ambos os *prisioneiros* jogando Trair e cada um recebendo P

O Dilema do Prisioneiro

- 2 Jogadores
- 2 Estratégias: Cooperar e Trair
- Uma matrix de ganho (*pay-off*) para cada jogador:

$$\begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix}$$

  $T > R > P > S$ e $2R > T + S$.
- O equilíbrio de Nash se dá com ambos os *prisioneiros* jogando Trair e cada um recebendo P $<$ R que seria o ganho *se ambos cooperassem*.

O Dilema do Prisioneiro

O equilíbrio de Nash não dá necessariamente uma resposta satisfatória já que altruismo existe na natureza.

O Dilema do Prisioneiro

O equilíbrio de Nash não dá necessariamente uma resposta satisfatória já que altruismo existe na natureza.

Altruismo ocorre quando um indivíduo *diminui* sua chance de sobrevivência (ou de deixar descendentes) para aumentar a de outros indivíduos.

O Dilema do Prisioneiro

O equilíbrio de Nash não dá necessariamente uma resposta satisfatória já que altruismo existe na natureza.

Altruismo ocorre quando um indivíduo *diminui* sua chance de sobrevivência (ou de deixar descendentes) para aumentar a de outros indivíduos.

No dilema do Prisioneiro Altruismo corresponde a jogar Cooperar.

O Dilema do Prisioneiro

Exemplos de cooperação:

O Dilema do Prisioneiro

Exemplos de cooperação:

- Formigas vivendo em sociedade.

O Dilema do Prisioneiro

Exemplos de cooperação:

- Formigas vivendo em sociedade.
- Canto do pássaro avisando de um predador.

O Dilema do Prisioneiro

Exemplos de cooperação:

- Formigas vivendo em sociedade.
- Canto do pássaro avisando de um predador.
- Vôo de pássaros em forma de **V**.

O Dilema do Prisioneiro

Exemplos de cooperação:

- Formigas vivendo em sociedade.
- Canto do pássaro avisando de um predador.
- Vôo de pássaros em forma de **V**.
- Simbiontes: líquens (fungo + alga), vespas e figueiros, formigas e acácias, ...

O Dilema do Prisioneiro

Exemplos de cooperação:

- Formigas vivendo em sociedade.
- Canto do pássaro avisando de um predador.
- Vôo de pássaros em forma de **V**.
- Simbiontes: líquens (fungo + alga), vespas e figueiros, formigas e acácias, ...
- Padrões de luta entre grandes batalhas na I Guerra Mundial (sobretudo entre ingleses e alemães nas trincheiras da França e da Bélgica).

O Dilema do Prisioneiro

Exemplos de cooperação:

- Formigas vivendo em sociedade.
- Canto do pássaro avisando de um predador.
- Vôo de pássaros em forma de **V**.
- Simbiontes: líquens (fungo + alga), vespas e figueiros, formigas e acácias, ...
- Padrões de luta entre grandes batalhas na I Guerra Mundial (sobretudo entre ingleses e alemães nas trincheiras da França e da Bélgica).
- Doações: caridade, doação de sangue, gorjeta (?).

O Dilema do Prisioneiro

Exemplos de altruismo:

- Formigas vivendo em sociedade.
- Canto do pássaro avisando de um predador.
- Vôo de pássaros em forma de **V**.
- Simbiontes: líquens (fungo + alga), vespas e figueiros, formigas e acácias, ...
- Padrões de luta entre grandes batalhas na I Guerra Mundial (sobretudo entre ingleses e alemães nas trincheiras da França e da Bélgica).
- Doações: caridade, doação de sangue, gorjeta (?).

O Dilema do Prisioneiro

O Dilema do Prisioneiro

Possível saída: O Dilema do Prisioneiro Iterado.

O Dilema do Prisioneiro

Possível saída: O Dilema do Prisioneiro Iterado.

Cada *jogo* consiste em um certo número de partidas, ou *iterações*, de forma que o *pay-off* final seja a soma dos *pay-offs* de cada iteração.

O Dilema do Prisioneiro

Possível saída: O Dilema do Prisioneiro Iterado.

Cada *jogo* consiste em um certo número de partidas, ou *iterações*, de forma que o *pay-off* final seja a soma dos *pay-offs* de cada iteração.

Isto permite estratégias mais complexas, levando em consideração as jogadas anteriores do oponente.

O Dilema do Prisioneiro

R. Axelrod pediu a especialistas de diversas áreas em Teoria dos Jogos que enviassem estratégias para o DPI. Além disto incluiu como controle uma estratégia que jogava aleatoriamente, com probabilidade 1/2 Cooperar ou Trair.

O Dilema do Prisioneiro

R. Axelrod pediu a especialistas de diversas áreas em Teoria dos Jogos que enviassem estratégias para o DPI. Além disto incluiu como controle uma estratégia que jogava aleatoriamente, com probabilidade 1/2 Cooperar ou Trair.

Cada estratégia jogava contra as outras, no sistema *todos-contra-todos*. Cada jogo consistia de 200 iteracões do Dilema do Prisioneiro, mas isto não era do conhecimento dos estrategistas.

O Dilema do Prisioneiro

R. Axelrod pediu a especialistas de diversas áreas em Teoria dos Jogos que enviassem estratégias para o DPI. Além disto incluiu como controle uma estratégia que jogava aleatoriamente, com probabilidade 1/2 Cooperar ou Trair.

Cada estratégia jogava contra as outras, no sistema *todos-contra-todos*. Cada jogo consistia de 200 iteracões do Dilema do Prisioneiro, mas isto não era do conhecimento dos estrategistas.

O ganho final é a soma dos ganhos após as duzentas rodadas.

O Dilema do Prisioneiro

Exemples de estratégias enviadas:

O Dilema do Prisioneiro

Exemples de estratégias enviadas:

- TIT-FOR-TAT: Coopera na primeira rodade e depois repete a jogada do oponente.

O Dilema do Prisioneiro

Exemples de estratégias enviadas:

- TIT-FOR-TAT: Coopera na primeira rodade e depois repete a jogada do oponente.
- DOWNING: Usa inferência Bayesiana para compreender o comportamento do oponente e a partir daí tenta maximizar seu próprio ganho.

O Dilema do Prisioneiro

Exemples de estratégias enviadas:

- TIT-FOR-TAT: Coopera na primeira rodade e depois repete a jogada do oponente.
- DOWNING: Usa inferência Bayesiana para compreender o comportamento do oponente e a partir daí tenta maximizar seu próprio ganho.
- JOST: Variação de TFT que ocasionalmente (com certa probabilidade) joga Trair.

O Dilema do Prisioneiro

	Nome	Comp.
1	Anatol Rapoport	4
2	Nicholas Tideman & Paula Chieruzzi	41
3	Rudy Nydegger	23
4	Bernard Grofman	8
5	Martin Schubik	16
6	William Stein & Amnon Rapoport	13
7	James Friedman	13
8	Morton Davis	6
9	James Graaskamp	63
10	Leslia Downing	33
11	Scott Feld	6
12	Johann Joss	5
13	Gordon Tullock	18
14	Name withheld	77
15	RANDOM	5

O Dilema do Prisioneiro

Class.	Nome	Comp.	Pontos
1	Anatol Rapoport	4	504.5
2	Nicholas Tideman & Paula Chieruzzi	41	500.4
3	Rudy Nydegger	23	485.5
4	Bernard Grofman	8	481.9
5	Martin Schubik	16	480.7
6	William Stein & Amnon Rapoport	13	477.8
7	James Friedman	13	473.4
8	Morton Davis	6	471.8
9	James Graaskamp	63	400.7
10	Leslia Downing	33	390.6
11	Scott Feld	6	327.6
12	Johann Joss	5	304.4
13	Gordon Tullock	18	300.5
14	Name withheld	77	282.2
15	RANDOM	5	276.3

O Dilema do Prisioneiro

O Dilema do Prisioneiro

A estratégia vencedora foi TFT. Esta foi a estratégia mais simples enviada.

O Dilema do Prisioneiro

A estratégia vencedora foi TFT. Esta foi a estratégia mais simples enviada.

Das oito primeiras colocadas, todas eram *bondosas*.

O Dilema do Prisioneiro

A estratégia vencedora foi TFT. Esta foi a estratégia mais simples enviada.

Das oito primeiras colocadas, todas eram *bondosas*.

Uma estratégia é *bondosa* se nunca é a primeira a jogar Trair.

O Dilema do Prisioneiro

A estratégia vencedora foi TFT. Esta foi a estratégia mais simples enviada.

Das oito primeiras colocadas, todas eram *bondosas*.

Uma estratégia é *bondosa* se nunca é a primeira a jogar Trair.

Nenhuma das outras estratégias era *bondosa*.

O Dilema do Prisioneiro

A estratégia vencedora foi TFT. Esta foi a estratégia mais simples enviada.

Das oito primeiras colocadas, todas eram *bondosas*.

Uma estratégia é *bondosa* se nunca é a primeira a jogar Trair.

Nenhuma das outras estratégias era *bondosa*.

Se TIT FOR TWO TATS tivesse sido enviada teria sido vencedora.

O Dilema do Prisioneiro

Axelrod organizou um segundo torneio, desta vez com 63 diferentes estratégias.

O Dilema do Prisioneiro

Axelrod organizou um segundo torneio, desta vez com 63 diferentes estratégias.

Ao contrário da primeira rodada o número de iterações não era fixo, no entanto definiu-se uma *probabilidade* de nova iteração $w = .9954$.

O Dilema do Prisioneiro

Axelrod organizou um segundo torneio, desta vez com 63 diferentes estratégias.

Ao contrário da primeira rodada o número de iterações não era fixo, no entanto definiu-se uma *probabilidade* de nova iteração $w = .9954$.

Novamente a estratégia vencedora foi TIT FOR TAT.

O Dilema do Prisioneiro

Axelrod organizou um segundo torneio, desta vez com 63 diferentes estratégias.

Ao contrário da primeira rodada o número de iterações não era fixo, no entanto definiu-se uma *probabilidade* de nova iteração $w = .9954$.

Novamente a estratégia vencedora foi TIT FOR TAT.

Desta vez TIT FOR TWO TATS foi enviada.

O Dilema do Prisioneiro

Axelrod fez um terceiro torneio, com as mesmas estratégias do segundo, mas desta vez simulando um dinâmica ecológica.

O Dilema do Prisioneiro

Axelrod fez um terceiro torneio, com as mesmas estratégias do segundo, mas desta vez simulando um dinâmica ecológica.

Após cada rodada, cada estratégia deixa um número de *descendentes* proporcional ao número de pontos obtidos e a população anteiror.

O Dilema do Prisioneiro

Axelrod fez um terceiro torneio, com as mesmas estratégias do segundo, mas desta vez simulando um dinâmica ecológica.

Após cada rodada, cada estratégia deixa um número de *descendentes* proporcional ao número de pontos obtidos e a população anteiror.

Inicialmente todas as estratégias tinham a mesma população, e a simulação é feita por várias gerações.

O Dilema do Prisioneiro

Axelrod fez um terceiro torneio, com as mesmas estratégias do segundo, mas desta vez simulando um dinâmica ecológica.

Após cada rodada, cada estratégia deixa um número de *descendentes* proporcional ao número de pontos obtidos e a população anteiror.

Inicialmente todas as estratégias tinham a mesma população, e a simulação é feita por várias gerações.

Novamente TFT foi vencedora.

O Dilema do Prisioneiro

Razões *comportamentais* para o sucesso de TFT:

O Dilema do Prisioneiro

Razões *comportamentais* para o sucesso de TFT:

- Bondade: nunca é a primeira a jogar Trair.

O Dilema do Prisioneiro

Razões *comportamentais* para o sucesso de TFT:

- Bondade: nunca é a primeira a jogar Trair.
- Retaliação: joga Trair sempre que o oponente joga Trair.

O Dilema do Prisioneiro

Razões *comportamentais* para o sucesso de TFT:

- Bondade: nunca é a primeira a jogar Trair.
- Retaliação: joga Trair sempre que o oponente joga Trair.
- Perdoar: tem memória curta (1 iteração).

O Dilema do Prisioneiro

Razões *comportamentais* para o sucesso de TFT:

- Bondade: nunca é a primeira a jogar Trair.
- Retaliação: joga Trair sempre que o oponente joga Trair.
- Perdoar: tem memória curta (1 iteração).
- Não é invejosa: não se preocupa com ganhar mais que o oponente, mas sim no valor total.

O Dilema do Prisioneiro

Razões *comportamentais* para o sucesso de TFT:

- Bondade: nunca é a primeira a jogar Trair.
- Retaliação: joga Trair sempre que o oponente joga Trair.
- Perdoar: tem memória curta (1 iteração).
- Não é invejosa: não se preocupa com ganhar mais que o oponente, mas sim no valor total.
- Clareza: os oponentes entendem rapidamente que para ganhar muitos pontos devem jogar Cooperar.

O Dilema do Prisioneiro

Razões *ecológicas* para o sucesso de TFT:

O Dilema do Prisioneiro

Razões *ecológicas* para o sucesso de TFT:

- Robustez: TFT é bem sucedida em *uma variedade de ambientes*.

O Dilema do Prisioneiro

Razões *ecológicas* para o sucesso de TFT:

- Robustez: TFT é bem sucedida em *uma variedade de ambientes*.
- Estabilidade: nenhuma estratégia pode invadir um ambiente dominado por TFT.

O Dilema do Prisioneiro

Razões *ecológicas* para o sucesso de TFT:

- Robustez: TFT é bem sucedida em *uma variedade de ambientes*.
- Estabilidade: nenhuma estratégia pode invadir um ambiente dominado por TFT.
- Viabilidade: a partir de um pequeno número de jogadores com estratégia TFT, estes, colaborando uns com os outros, podem vir a dominar o ambiente.

O Dilema do Prisioneiro

Seja w a probabilidade de existir um próxima iteração.

O Dilema do Prisioneiro

Seja w a probabilidade de existir um próxima iteração.

A probabilidade de existir uma $n+1$-ésima rodada é w^n.

O Dilema do Prisioneiro

Seja w a probabilidade de existir um próxima iteração.

A probabilidade de existir uma $n+1$-ésima rodada é w^n.

O número médio de iterações é dado por

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)w^n(1-w) = \frac{1}{1-w}\,.$$

O Dilema do Prisioneiro

Seja w a probabilidade de existir um próxima iteração.

A probabilidade de existir uma $n+1$-ésima rodada é w^n.

O número médio de iterações é dado por

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)w^n(1-w) = \frac{1}{1-w}\,.$$

A_n é o ganho na n-ésima iteração. O ganho total é

$$A = \sum A_n w^n\,.$$

O Dilema do Prisioneiro

Prop. 1. *Em uma população onde todos usam a estratégia AllD (a estratégia que joga Trair em todas as rodadas) então nenhum mutante isolado pode adotar estratégia melhor.*

O Dilema do Prisioneiro

Prop. 1. *Em uma população onde todos usam a estratégia AllD (a estratégia que joga Trair em todas as rodadas) então nenhum mutante isolado pode adotar estratégia melhor.*

Dem: Se todos jogam AllD qualquer estratégia que inclua cooperação será explorada pela estratégia da maioria.

O Dilema do Prisioneiro

Prop. 2. *Se*

$$
\begin{aligned}
w &\geq \frac{T - R}{T - P}, \\
w &\geq \frac{T - R}{R - S},
\end{aligned}
$$

então em uma população onde todos jogam TFT nenhum mutante isolado pode adotar estratégia melhor.

O Dilema do Prisioneiro

Prop. 2. *Se*

$$
\begin{aligned}
w &\geq \frac{T-R}{T-P}\,,\\
w &\geq \frac{T-R}{R-S}\,,
\end{aligned}
$$

então em uma população onde todos jogam TFT nenhum mutante isolado pode adotar estratégia melhor.

Dem: Como TFT só tem memória de uma rodada, basta comparar com estratégia que joga Trair em todas as rodadas e a que alterna Trair e Cooperar.

O Dilema do Prisioneiro

O ganho de TFT jogando contra si mesma é:

$$\sum Rw^n = \frac{R}{1-w},$$

O Dilema do Prisioneiro

O ganho de TFT jogando contra si mesma é:

$$\sum Rw^n = \frac{R}{1-w}\,,$$

enquanto o ganho de AllD contra TFT é

$$T + \sum Pw^{n+1} = T + \frac{Pw}{1-w}\,,$$

O Dilema do Prisioneiro

O ganho de TFT jogando contra si mesma é:

$$\sum Rw^n = \frac{R}{1-w},$$

enquanto o ganho de AllD contra TFT é

$$T + \sum Pw^{n+1} = T + \frac{Pw}{1-w},$$

e o ganho da estratégia alternante contra TFT é

$$\sum Tw^{2n} + \sum Sw^{2n+1} = \frac{T+wS}{1-w^2}.$$

O Dilema do Prisioneiro

Prop. 3. *Se a estratégia mutante não é capaz de obter resultado melhor contra uma estratégia* bondosa *do que a média obtida pela interação entre os residentes, então nenhum grupo de mutantes poderá obter resultado melhor.*

O Dilema do Prisioneiro

Prop. 3. *Se a estratégia mutante não é capaz de obter resultado melhor contra uma estratégia* bondosa *do que a média obtida pela interação entre os residentes, então nenhum grupo de mutantes poderá obter resultado melhor.*

Dem: Estratégias bondosas ganham R quando jogam umas com as outras. Na interação entre os mutantes o ganho máximo médio é R enquanto na interação entre mutantes e residentes o ganho máximo do mutante também é R (caso contrário o mutante se sairia melhor).

O Dilema do Prisioneiro

Prop. 4. *Se os residentes jogam AllD e um grupo de mutantes de tamanho relativo*

$$p > \frac{P - Sw}{R - Pw - (S + T - P)w}$$

jogando TFT começa a interagir com os residentes, então a estratégia TFT será dominante a longo prazo.

O Dilema do Prisioneiro

Dem: O ganho médio de um estrategista TFT é

$$p\left[T + \frac{P}{1-w}\right] + (1-p)\frac{P}{1-w}\ ,$$

O Dilema do Prisioneiro

Dem: O ganho médio de um estrategista TFT é

$$p\left[T + \frac{P}{1-w}\right] + (1-p)\frac{P}{1-w} \; ,$$

enquanto o ganho médio de um AllD é

$$p\frac{R}{1-w} + (1-p)\left[S + \frac{Pw}{1-w}\right] \; .$$

O Dilema do Prisioneiro

Portanto, apesar de populações homogêneas de AllD e de TFT serem tais que mutantes isolados não podem se sair melhores do que os residentes, é possível para um grupo suficientemente grande de cooperadores que interajam de maneira suficientemente freqüente invadir uma população de não cooperadores. O contrário não é possível.

O Dilema do Prisioneiro

Portanto, apesar de populações homogêneas de AllD e de TFT serem tais que mutantes isolados não podem se sair melhores do que os residentes, é possível para um grupo suficientemente grande de cooperadores que interajam de maneira suficientemente freqüente invadir uma população de não cooperadores. O contrário não é possível.

Assim, é de se esperar que uma população onde os indivíduos interagem com pouca freqüência seja dominada pela estratégia AllD, no entanto quando a interação for freqüente é possível que a estratégia dominante mude para TFT.

O Dilema do Prisioneiro

O valor efetivo do menor aglomerado de cooperadores capaz de vir a dominar uma população inicialmente jogando AllD pode ser menor do que o valor obtido na Proposição 4, pois os cooperadores podem ter uma freqüência de interação interna superior a sua proporção na população.

O Dilema do Prisioneiro

O valor efetivo do menor aglomerado de cooperadores capaz de vir a dominar uma população inicialmente jogando AllD pode ser menor do que o valor obtido na Proposição 4, pois os cooperadores podem ter uma freqüência de interação interna superior a sua proporção na população.

O parâmetro w indica a probabilidade (ou *expectativa*) de reencontro entre dois indivíduos (de mesma ou de diferentes populações). Isto depende, entre outros, de tempo de vida, mobilidade e saúde dos indivíduos.

O Dilema do Prisioneiro

Exemplos de mudança de estratégia:

O Dilema do Prisioneiro

Exemplos de mudança de estratégia:

- *Candida albicans*: vive na superfície do corpo e torna-se perigosa em pessoas doentes ou idosas.

O Dilema do Prisioneiro

Exemplos de mudança de estratégia:

- *Candida albicans*: vive na superfície do corpo e torna-se perigosa em pessoas doentes ou idosas.
- Burkitt lymphoma: vírus oncogênico. Crescimento lento em pacientes saudáveis que se torna devastador quando combinado com malária.

O Dilema do Prisioneiro

Exemplos de mudança de estratégia:

- *Candida albicans*: vive na superfície do corpo e torna-se perigosa em pessoas doentes ou idosas.
- Burkitt lymphoma: vírus oncogênico. Crescimento lento em pacientes saudáveis que se torna devastador quando combinado com malária.
- Doenças crônicas $\times$ infecções agudas.

O Dilema do Prisioneiro

Exemplos de mudança de estratégia:

- *Candida albicans*: vive na superfície do corpo e torna-se perigosa em pessoas doentes ou idosas.
- Burkitt lymphoma: vírus oncogênico. Crescimento lento em pacientes saudáveis que se torna devastador quando combinado com malária.
- Doenças crônicas $\times$ infecções agudas.
- Evolução social: o nível de cooperação tende a ser maior em sociedades menores (maior interação entre indivíduos).

O Dilema do Prisioneiro

Como bacterias conseguem *entender* o padrão de interação?

O Dilema do Prisioneiro

Como bacterias conseguem *entender* o padrão de interação?

- Bacterias são capazes de responder a estímulos químicos presentes no ambiente.

O Dilema do Prisioneiro

Como bacterias conseguem *entender* o padrão de interação?

- Bacterias são capazes de responder a estímulos químicos presentes no ambiente.
- Isto implica que elas são capazer de responder ao que outros organismos estão fazendo.

O Dilema do Prisioneiro

Como bacterias conseguem *entender* o padrão de interação?

- Bacterias são capazes de responder a estímulos químicos presentes no ambiente.
- Isto implica que elas são capazer de responder ao que outros organismos estão fazendo.
- Estas estratégias podem ser herdadas.

O Dilema do Prisioneiro

Como bacterias conseguem *entender* o padrão de interação?

- Bacterias são capazes de responder a estímulos químicos presentes no ambiente.
- Isto implica que elas são capazer de responder ao que outros organismos estão fazendo.
- Estas estratégias podem ser herdadas.
- O comportamento de uma bactéria afeta o comportamento das outras presentes ao redor, da mesma forma que o comportamento das outras afeta o seu comportamento.

O Dilema do Prisioneiro

No caso de animais com estrutura neural complexa o reconhecimento dos outros indivíduos pode ser feito diretamente. Isto não ocorre com bactérias.

O Dilema do Prisioneiro

No caso de animais com estrutura neural complexa o reconhecimento dos outros indivíduos pode ser feito diretamente. Isto não ocorre com bactérias.

Bactérias vivendo em simbiose frequente se relacionam com um único indivíduo.

O Dilema do Prisioneiro

No caso de animais com estrutura neural complexa o reconhecimento dos outros indivíduos pode ser feito diretamente. Isto não ocorre com bactérias.

Bactérias vivendo em simbiose frequente se relacionam com um único indivíduo.

No caso humano o reconhecimento se dá através de observação facial. O cérebro humano tem uma área enorme dedicada ao reconhecimento de faces. Seu mau funcionamento é conhecido como *prosopagnosia* e praticamente não afeta outras funções cerebrais (raciocínio, memória, . . .). Isto certamente está relacionado a evolução de sofisticados padrões de cooperação em sociedade.

As Pombas e os Falcões

As Pombas e os Falcões

Considere o conflito de dois indivíduos por um bem de interesse comum: território, alimento, fêmeas etc.

As Pombas e os Falcões

Considere o conflito de dois indivíduos por um bem de interesse comum: território, alimento, fêmeas etc.

A disputa começa de forma ritual: cada um dos inidivíduos assinalados demonstra seu interesse no prêmio.

As Pombas e os Falcões

Considere o conflito de dois indivíduos por um bem de interesse comum: território, alimento, fêmeas etc.

A disputa começa de forma ritual: cada um dos inidivíduos assinalados demonstra seu interesse no prêmio.

A partir daí duas estratégias são possíveis:

As Pombas e os Falcões

Considere o conflito de dois indivíduos por um bem de interesse comum: território, alimento, fêmeas etc.

A disputa começa de forma ritual: cada um dos inidivíduos assinalados demonstra seu interesse no prêmio.

A partir daí duas estratégias são possíveis:

- Falcão: Aumenta a violência até a vitória ou derrota.

As Pombas e os Falcões

Considere o conflito de dois indivíduos por um bem de interesse comum: território, alimento, fêmeas etc.

A disputa começa de forma ritual: cada um dos inidivíduos assinalados demonstra seu interesse no prêmio.

A partir daí duas estratégias são possíveis:

- Falcão: Aumenta a violência até a vitória ou derrota.
- Pomba: Foge da briga a partir a percepção que o oponente está disposto ao combate.

As Pombas e os Falcões

Considere o conflito de dois indivíduos por um bem de interesse comum: território, alimento, fêmeas etc.

A disputa começa de forma ritual: cada um dos inidivíduos assinalados demonstra seu interesse no prêmio.

A partir daí duas estratégias são possíveis:

- Falcão: Aumenta a violência até a vitória ou derrota.
- Pomba: Foge da briga a partir a percepção que o oponente está disposto ao combate.

É importante perceber que Pomba e Falcões são diferentes estratégias e não diferentes espécies.

As Pombas e os Falcões

Sejam G o ganho em adaptação pela vitória e C o custo da luta.

As Pombas e os Falcões

Sejam G o ganho em adaptação pela vitória e C o custo da luta.

Para qualquer um dos jogadores a matrix de *pay-off* é dada por:

	F	**P**
F	$\frac{1}{2}(G-C)$	G
P	0	$\frac{G}{2}$

As Pombas e os Falcões

Se $G \geq C$ então estamos no caso (*degenerado*) do dilema do prisioneiro.

As Pombas e os Falcões

Se $G \geq C$ então estamos no caso (*degenerado*) do dilema do prisioneiro.

Vamos analisar o caso $G < C$:

As Pombas e os Falcões

Se $G \geq C$ então estamos no caso (*degenerado*) do dilema do prisioneiro.

Vamos analisar o caso $G < C$:

- Uma população de Pombas pode ser invadida por um mutante jogando Falcão.

As Pombas e os Falcões

Se $G \geq C$ então estamos no caso (*degenerado*) do dilema do prisioneiro.

Vamos analisar o caso $G < C$:

- Uma população de Pombas pode ser invadida por um mutante jogando Falcão.
- Inversamente uma população de Falcões pode ser invadida por um mutante do tipo Pomba.

As Pombas e os Falcões

Se $G \geq C$ então estamos no caso (*degenerado*) do dilema do prisioneiro.

Vamos analisar o caso $G < C$:

- Uma população de Pombas pode ser invadida por um mutante jogando Falcão.
- Inversamente uma população de Falcões pode ser invadida por um mutante do tipo Pomba.
- Neste caso diz-se que tanto Pomba como Falcão não são *estratégias evolutivamente estáveis*, ou **ESS**.

As Pombas e os Falcões

Se $G \geq C$ então estamos no caso (*degenerado*) do dilema do prisioneiro.

Vamos analisar o caso $G < C$:

- Uma população de Pombas pode ser invadida por um mutante jogando Falcão.
- Inversamente uma população de Falcões pode ser invadida por um mutante do tipo Pomba.
- Neste caso diz-se que tanto Pomba como Falcão não são *estratégias evolutivamente estáveis*, ou **ESS**.
- Finalmente dizemos que não há ESS puro.

As Pombas e os Falcões

Podemos discutir a existência de ESS mistos.

As Pombas e os Falcões

Podemos discutir a existência de ESS mistos.

Uma estratégia é mista se envolve jogar Pomba ou Falcão com certa probabilidade.

As Pombas e os Falcões

Podemos discutir a existência de ESS mistos.

Uma estratégia é mista se envolve jogar Pomba ou Falcão com certa probabilidade.

Uma estratégia é um ESS se não pode ser invadida por nenhuma outra estratégia.

As Pombas e os Falcões

Seja $\mathcal{W}(\mathrm{I}, \mathrm{J})$ o ganho de um estrategista I (definido a partir das probabilidades de jogar cada uma das estratégias puras) contra uma população jogando J.

As Pombas e os Falcões

Seja $\mathcal{W}(\mathrm{I}, \mathrm{J})$ o ganho de um estrategista I (definido a partir das probabilidades de jogar cada uma das estratégias puras) contra uma população jogando J.

Considere uma população jogando a estratégia I sendo invadida por um pequeno número de mutantes jogando J.

As Pombas e os Falcões

Seja $\mathcal{W}(\mathrm{I}, \mathrm{J})$ o ganho de um estrategista I (definido a partir das probabilidades de jogar cada uma das estratégias puras) contra uma população jogando J.

Considere uma população jogando a estratégia I sendo invadida por um pequeno número de mutantes jogando J.

Para I ser um ESS devemos ter que:

$$\mathcal{W}(\mathrm{J}, \varepsilon\mathrm{J} + (1-\varepsilon)\mathrm{I}) < \mathcal{W}(\mathrm{I}, \varepsilon\mathrm{J} + (1-\varepsilon)\mathrm{I})$$

para toda estratégia $\mathrm{J} \neq \mathrm{I}$ e ε suficientemente pequeno.

As Pombas e os Falcões

Em particular, na equação anterior, se fizermos $\varepsilon \to 0$, temos:

$$\mathcal{W}(\mathrm{J}, \mathrm{I}) \leq \mathcal{W}(\mathrm{I}, \mathrm{I}) \; .$$

As Pombas e os Falcões

Em particular, na equação anterior, se fizermos $\varepsilon \to 0$, temos:

$$\mathcal{W}(\mathrm{J}, \mathrm{I}) \leq \mathcal{W}(\mathrm{I}, \mathrm{I}) \; .$$

A condição acima é uma condição necessária. Vamos aplicá-la ao jogo das Pombas e dos Falcões.

As Pombas e os Falcões

Em particular, na equação anterior, se fizermos $\varepsilon \to 0$, temos:

$$\mathcal{W}(\mathrm{J}, \mathrm{I}) \leq \mathcal{W}(\mathrm{I}, \mathrm{I}) \; .$$

A condição acima é uma condição necessária. Vamos aplicá-la ao jogo das Pombas e dos Falcões.

Seja I a ESS que joga Falcão com probabilidade x e J a estratégia mutante invasora que joga Falcão com probabilidade y.

As Pombas e os Falcões

Em particular, na equação anterior, se fizermos $\varepsilon \to 0$, temos:

$$\mathcal{W}(\mathrm{J}, \mathrm{I}) \leq \mathcal{W}(\mathrm{I}, \mathrm{I}) \; .$$

A condição acima é uma condição necessária. Vamos aplicá-la ao jogo das Pombas e dos Falcões.

Seja I a ESS que joga Falcão com probabilidade x e J a estratégia mutante invasora que joga Falcão com probabilidade y.

Devemos ter $0 < x < 1$ (pois $x = 0$ corresponde a estratégia Pomba e $x = 1$ a Falcão que sabemos não serem ESS). Além disto, $y \neq x$.

As Pombas e os Falcões

$$\mathcal{W}(\mathrm{J},\mathrm{I}) =$$

$$yx\frac{G-C}{2} + y(1-x)G + (1-y)x0 + (1-y)(1-x)\frac{G}{2} =$$

$$\frac{y}{2}(G - xC) - x\frac{G}{2} + \frac{G}{2}\ .$$

As Pombas e os Falcões

$$\mathcal{W}(\mathrm{J},\mathrm{I}) =$$
$$yx\frac{G-C}{2} + y(1-x)G + (1-y)x0 + (1-y)(1-x)\frac{G}{2} =$$
$$\frac{y}{2}(G - xC) - x\frac{G}{2} + \frac{G}{2}\,.$$

$$\mathcal{W}(\mathrm{I},\mathrm{I}) = \frac{x}{2}(G - xC) - x\frac{G}{2} + \frac{G}{2}\,.$$

As Pombas e os Falcões

Pela condição necessária deduzida acima devemos ter

$$(x - y)(xC - G) \leq 0 \, .$$

As Pombas e os Falcões

Pela condição necessária deduzida acima devemos ter

$$(x - y)(xC - G) \leq 0\ .$$

Como $0 < x < 1$ e $y \neq x$, então necessariamente

$$x = \frac{G}{C}\ .$$

As Pombas e os Falcões

Pela condição necessária deduzida acima devemos ter

$$(x - y)(xC - G) \leq 0\ .$$

Como $0 < x < 1$ e $y \neq x$, então necessariamente

$$x = \frac{G}{C}\ .$$

Podemos verificar explicitamente esta condição e concluir que este é uma ESS.

As Pombas e os Falcões

Na discussão acima a probabilidade x admite duas interpretações:

As Pombas e os Falcões

Na discussão acima a probabilidade x admite duas interpretações:

- x é a probabilidade de cada indivíduo jogar F.

As Pombas e os Falcões

Na discussão acima a probabilidade x admite duas interpretações:

- x é a probabilidade de cada indivíduo jogar F.
- x é a fração da população que joga F.

As Pombas e os Falcões

Na discussão acima a probabilidade x admite duas interpretações:

- x é a probabilidade de cada indivíduo jogar F.
- x é a fração da população que joga F.

No primeiro caso temos uma população geneticamente homogênea, onde o gene induz um comportamento probabilistico.

As Pombas e os Falcões

Na discussão acima a probabilidade x admite duas interpretações:

- x é a probabilidade de cada indivíduo jogar F.
- x é a fração da população que joga F.

No primeiro caso temos uma população geneticamente homogênea, onde o gene induz um comportamento probabilistico.

No segundo caso temos um *polimorfismo*, onde convivem na população genes para as duas estratégias puras.

As Pombas e os Falcões

Vamos estudar o caso do polimorfismo.

As Pombas e os Falcões

Vamos estudar o caso do polimorfismo.

Neste caso todos os indivíduos jogam apenas P ou F.

As Pombas e os Falcões

Vamos estudar o caso do polimorfismo.

Neste caso todos os indivíduos jogam apenas P ou F.

O ganho de um estrategista P é

$$x0 + (1-x)\frac{G}{2} = (1-x)\frac{G}{2} = \frac{(C-G)G}{2C} \ .$$

As Pombas e os Falcões

Vamos estudar o caso do polimorfismo.

Neste caso todos os indivíduos jogam apenas P ou F.

O ganho de um estrategista P é

$$x0 + (1-x)\frac{G}{2} = (1-x)\frac{G}{2} = \frac{(C-G)G}{2C}\ .$$

O ganho de um estrategista F é

$$x\frac{G-C}{2} + (1-x)G = \frac{(C-G)G}{2C}\ .$$

As Pombas e os Falcões

Portanto o ganho das duas estratégias é idêntico no ESS. Ou seja, não há vantagem evolutiva em adotar qualquer uma das estratégias possíveis para uma população em ESS.

As Pombas e os Falcões

Neste caso, no entanto, não faz sentido falar em um mutante invasor com uma estratégia distinta. Como há apenas duas estratégias, a pergunta relevante é: *caso mude a fração de estrategistas **F** de x para x', com x' um valor próximo de x, será que a dinâmica ecológica subjacente será capaz de trazer o sistema de volta ao equilíbrio?*

As Pombas e os Falcões

Neste caso, no entanto, não faz sentido falar em um mutante invasor com uma estratégia distinta. Como há apenas duas estratégias, a pergunta relevante é: *caso mude a fração de estrategistas* ***F*** *de* x *para* x', *com* x' *um valor próximo de* x, *será que a dinâmica ecológica subjacente será capaz de trazer o sistema de volta ao equilíbrio?*

Para o caso de apenas duas estratégias puras possíveis a resposta é **SIM**. Ou seja, com apenas duas estratégias puras possíveis a estratégia mista que define o ESS corresponde numericamente à fração de um determinado gene na população quando apenas os comportamentos puros são permitidos.

As Pombas e os Falcões

Um parêntese: para que servem os homens?

As Pombas e os Falcões

Um parêntese: para que servem os homens?

Considere duas estratégias reprodutivas:

As Pombas e os Falcões

Um parêntese: para que servem os homens?

Considere duas estratégias reprodutivas:

- Produzir apenas descendentes Machos.

As Pombas e os Falcões

Um parêntese: para que servem os homens?

Considere duas estratégias reprodutivas:

- Produzir apenas descendentes Machos.
- Produzir apenas descendentes Fêmeas.

As Pombas e os Falcões

Uma estratégia I produz uma fração x de descendentes machos (e consequentemente $1 - x$ de fêmeas). Suponha que I é ESS e suponha um mutante de estratégia I' produzindo uma fração x' de machos.

As Pombas e os Falcões

Uma estratégia I produz uma fração x de descendentes machos (e consequentemente $1-x$ de fêmeas). Suponha que I é ESS e suponha um mutante de estratégia I' produzindo uma fração x' de machos.

Dado que o número de descendentes na primeira geração é independente da estratégia, o *fitness* será medido pelo número de descendentes da segunda geração.

As Pombas e os Falcões

Uma estratégia I produz uma fração x de descendentes machos (e consequentemente $1 - x$ de fêmeas). Suponha que I é ESS e suponha um mutante de estratégia I' produzindo uma fração x' de machos.

Dado que o número de descendentes na primeira geração é independente da estratégia, o *fitness* será medido pelo número de descendentes da segunda geração.

Suponha a população em equilíbrio com um total N de indivíduos, sendo xN machos e $(1 - x)N$ fêmeas.

As Pombas e os Falcões

Uma estratégia I produz uma fração x de descendentes machos (e consequentemente $1 - x$ de fêmeas). Suponha que I é ESS e suponha um mutante de estratégia I' produzindo uma fração x' de machos.

Dado que o número de descendentes na primeira geração é independente da estratégia, o *fitness* será medido pelo número de descendentes da segunda geração.

Suponha a população em equilíbrio com um total N de indivíduos, sendo xN machos e $(1 - x)N$ fêmeas.

Desta forma cada macho é pai de $1/(xN)$ filhos e cada fêmea é mãe de $1/((1 - x)N)$ filhas.

As Pombas e os Falcões

O número de netos (multiplicado por N) de I' em uma população de estrategistas I é

$$\mathcal{W}(\mathrm{I}', \mathrm{I}) = \frac{x'}{x} + \frac{1 - x'}{1 - x} = x'(\frac{1}{x} - \frac{1}{1 - x}) + \frac{1}{1 - x} \; .$$

As Pombas e os Falcões

O número de netos (multiplicado por N) de I' em uma população de estrategistas I é

$$\mathcal{W}(\mathrm{I}', \mathrm{I}) = \frac{x'}{x} + \frac{1-x'}{1-x} = x'(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}) + \frac{1}{1-x} \,.$$

- Consideremos que $0 < x < 1$, pois $x = 0$ ou $x = 1$ levaria a imediata extinção.

As Pombas e os Falcões

O número de netos (multiplicado por N) de I’ em uma população de estrategistas I é

$$\mathcal{W}(\mathrm{I}', \mathrm{I}) = \frac{x'}{x} + \frac{1-x'}{1-x} = x'(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}) + \frac{1}{1-x}\,.$$

- Consideremos que $0 < x < 1$, pois $x = 0$ ou $x = 1$ levaria a imediata extinção.
- Se $x < 1/2$, o *fitness* é decrescente, logo qualquer estratégia com $x' > x$ seria capaz de invadir o ambiente.

As Pombas e os Falcões

O número de netos (multiplicado por N) de I' em uma população de estrategistas I é

$$\mathcal{W}(\mathrm{I}', \mathrm{I}) = \frac{x'}{x} + \frac{1 - x'}{1 - x} = x'(\frac{1}{x} - \frac{1}{1 - x}) + \frac{1}{1 - x} \, .$$

- Consideremos que $0 < x < 1$, pois $x = 0$ ou $x = 1$ levaria a imediata extinção.
- Se $x > 1/2$, qualquer estratégia com $x' < x$ pode invadir o ambiente.

As Pombas e os Falcões

O número de netos (multiplicado por N) de I' em uma população de estrategistas I é

$$\mathcal{W}(\mathrm{I}', \mathrm{I}) = \frac{x'}{x} + \frac{1-x'}{1-x} = x'(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}) + \frac{1}{1-x} .$$

- Consideremos que $0 < x < 1$, pois $x = 0$ ou $x = 1$ levaria a imediata extinção.
- Portanto o único valor estável possível é $x = 1/2$. Para verificar que este é um ESS deve-se voltar a definição.

As Pombas e os Falcões

Darwin já levantava a questão que acabamos de analisar: a prevalência da razão sexual $1/2$ em populações animais.

As Pombas e os Falcões

Darwin já levantava a questão que acabamos de analisar: a prevalência da razão sexual $1/2$ em populações animais.

É do conhecimento dos fazendeiros que uma população com muitas fêmeas e poucos machos se reproduz mais rapidamente do que uma população com razão 1 para 1.

As Pombas e os Falcões

Darwin já levantava a questão que acabamos de analisar: a prevalência da razão sexual $1/2$ em populações animais.

É do conhecimento dos fazendeiros que uma população com muitas fêmeas e poucos machos se reproduz mais rapidamente do que uma população com razão 1 para 1.

Isto coloca um pouco de luz no debate sobre se a seleção natural atua sobre *grupos* ou sobre *indivíduos*.

As Pombas e os Falcões

Darwin já levantava a questão que acabamos de analisar: a prevalência da razão sexual $1/2$ em populações animais.

É do conhecimento dos fazendeiros que uma população com muitas fêmeas e poucos machos se reproduz mais rapidamente do que uma população com razão 1 para 1.

Isto coloca um pouco de luz no debate sobre se a seleção natural atua sobre *grupos* ou sobre *indivíduos*.

No caso do jogo de falcões e pombas, a distribuição de falcões e pombas que maximiza o *fitness* do grupo se dá quando todos os indivíduos jogam Pombas.

As Pombas e os Falcões

Esta diferença fica mais clara se pensarmos que num duelo entre duas Pombas o perdedor do debate perde T devido ao tempo gasto no combate.

As Pombas e os Falcões

Esta diferença fica mais clara se pensarmos que num duelo entre duas Pombas o perdedor do debate perde T devido ao tempo gasto no combate.

Desta forma a matriz de ganho é dada por

	F	**P**
F	$\frac{1}{2}(G-C)$	G
P	0	$\frac{G-T}{2}$

As Pombas e os Falcões

Podemos calcular o ESS (quando o ganho de ambas as estratégias é idêntico):

$$x\frac{G-C}{2} + (1-x)G = x0 + (1-x)\frac{G-T}{2}\ ,$$

As Pombas e os Falcões

Podemos calcular o ESS (quando o ganho de ambas as estratégias é idêntico):

$$x\frac{G-C}{2}+(1-x)G = x0+(1-x)\frac{G-T}{2}\,,$$

ou seja $x=(G+T)/(C+T)$.

As Pombas e os Falcões

Podemos calcular o ESS (quando o ganho de ambas as estratégias é idêntico):

$$x\frac{G-C}{2} + (1-x)G = x0 + (1-x)\frac{G-T}{2} \,,$$

ou seja $x = (G+T)/(C+T)$.

A fração para o qual a adaptação média é maxima é dada pelo x que maximiza

$$x^2\frac{G-C}{2} + x(1-x)G + (1-x)^2\frac{G-T}{2} = -x^2\frac{C+T}{2} + 2xT + \frac{G-T}{2} \,,$$

As Pombas e os Falcões

Podemos calcular o ESS (quando o ganho de ambas as estratégias é idêntico):

$$x\frac{G-C}{2} + (1-x)G = x0 + (1-x)\frac{G-T}{2}\ ,$$

ou seja $x = (G+T)/(C+T)$.

A fração para o qual a adaptação média é maxima é dada pelo x que maximiza

$$x^2\frac{G-C}{2} + x(1-x)G + (1-x)^2\frac{G-T}{2} = -x^2\frac{C+T}{2} + 2xT + \frac{G-T}{2}\ ,$$

ou seja, $x = 2T/(C+T)$.

As Pombas e os Falcões

Os modelos até agora apresentados eram simétricos em relação ao status de cada jogador.

As Pombas e os Falcões

Os modelos até agora apresentados eram simétricos em relação ao status de cada jogador.

Vamos agora incluir assimetrias do tipo: Se *isto* então *aquilo*.

As Pombas e os Falcões

Os modelos até agora apresentados eram simétricos em relação ao status de cada jogador.

Vamos agora incluir assimetrias do tipo: Se *isto* então *aquilo*.

Considere que cada jogador pode estar em dois possíveis estados na disputa: Dono ou Invasor.

As Pombas e os Falcões

Os modelos até agora apresentados eram simétricos em relação ao status de cada jogador.

Vamos agora incluir assimetrias do tipo: Se *isto* então *aquilo*.

Considere que cada jogador pode estar em dois possíveis estados na disputa: Dono ou Invasor.

Considere uma estratégia, dita Burguesa, do tipo:

As Pombas e os Falcões

Os modelos até agora apresentados eram simétricos em relação ao status de cada jogador.

Vamos agora incluir assimetrias do tipo: Se *isto* então *aquilo*.

Considere que cada jogador pode estar em dois possíveis estados na disputa: Dono ou Invasor.

Considere uma estratégia, dita Burguesa, do tipo:

- Se Dono então Falcão.

As Pombas e os Falcões

Os modelos até agora apresentados eram simétricos em relação ao status de cada jogador.

Vamos agora incluir assimetrias do tipo: Se *isto* então *aquilo*.

Considere que cada jogador pode estar em dois possíveis estados na disputa: Dono ou Invasor.

Considere uma estratégia, dita Burguesa, do tipo:

- Se Dono então Falcão.
- Se Invasor então Pomba.

As Pombas e os Falcões

A matriz de ganho é dada por:

	F	**P**	**B**
F	$\frac{1}{2}(G-C)$	G	$\frac{1}{4}(3G-C)$
P	0	$\frac{1}{2}G$	$\frac{1}{4}G$
B	$\frac{1}{4}(G-C)$	$\frac{3}{4}G$	$\frac{1}{2}G$

As Pombas e os Falcões

A matriz de ganho é dada por:

	F	**P**	**B**
F	$\frac{1}{2}(G-C)$	G	$\frac{1}{4}(3G-C)$
P	0	$\frac{1}{2}G$	$\frac{1}{4}G$
B	$\frac{1}{4}(G-C)$	$\frac{3}{4}G$	$\frac{1}{2}G$

Propriedades:

As Pombas e os Falcões

A matriz de ganho é dada por:

	F	**P**	**B**
F	$\frac{1}{2}(G-C)$	G	$\frac{1}{4}(3G-C)$
P	0	$\frac{1}{2}G$	$\frac{1}{4}G$
B	$\frac{1}{4}(G-C)$	$\frac{3}{4}G$	$\frac{1}{2}G$

Propriedades:

- Se $G > C$, então a única ESS é F.

As Pombas e os Falcões

A matriz de ganho é dada por:

	F	**P**	**B**
F	$\frac{1}{2}(G - C)$	G	$\frac{1}{4}(3G - C)$
P	0	$\frac{1}{2}G$	$\frac{1}{4}G$
B	$\frac{1}{4}(G - C)$	$\frac{3}{4}G$	$\frac{1}{2}G$

Propriedades:

- Se $G > C$, então a única ESS é F.
- Se $G < C$, então a única ESS é B.

As Pombas e os Falcões

Exemplos:

As Pombas e os Falcões

Exemplos:

- Abelhas italianas $\times$ abelhas caucasianas, em disputa por açúcar (Kalmus, 1941).

As Pombas e os Falcões

Exemplos:

- Abelhas italianas $\times$ abelhas caucasianas, em disputa por açúcar (Kalmus, 1941).
- Babuínos Hamadrias, em relação às fêmeas (Kummer, Götz & Angst's, 1974).

As Pombas e os Falcões

Exemplos:

- Borboleta *Pararge aegeria*, em disputa por um lugar ao Sol (Davies, 1978), borboleta *Papilio zelicaon* por território (Gilbert) e pavão *Inachis io* por localidades de desova (Baker, 1972) perfazem conflituos ganhos pelo anterior proprietário. Caso esta condição não seja clara, há violência.

As Pombas e os Falcões

Exemplos:

- Borboleta *Pararge aegeria*, em disputa por um lugar ao Sol (Davies, 1978), borboleta *Papilio zelicaon* por território (Gilbert) e pavão *Inachis io* por localidades de desova (Baker, 1972) perfazem conflituos ganhos pelo anterior proprietário. Caso esta condição não seja clara, há violência.
- Em casos em que o dano resultante da luta é baixo, ou seja $G > C$, como em alguns sapos, verifica-se desrepeito pela posse (no caso, de fêmeas).

As Pombas e os Falcões

Um paradoxo: considere a estratégia X dada por:

As Pombas e os Falcões

Um paradoxo: considere a estratégia X dada por:

- Se Dono, então Pomba.

As Pombas e os Falcões

Um paradoxo: considere a estratégia X dada por:

- Se Dono, então Pomba.
- Se Invasor, então Falcão.

As Pombas e os Falcões

Um paradoxo: considere a estratégia X dada por:

- Se Dono, então Pomba.
- Se Invasor, então Falcão.

No jogos F— P—X, com $G < C$, X é um ESS.

As Pombas e os Falcões

Um paradoxo: considere a estratégia X dada por:

- Se Dono, então Pomba.
- Se Invasor, então Falcão.

No jogos F— P—X, com $G < C$, X é um ESS.

Isto ocorre na aranha mexicana *Oecibus civitas*, que desenvolve um estranho padrão de comportamento: cada aranha ocupa um pequeno orifício. Quando uma aranha tenta entrar em um orifício já ocupado, imediatamente a residente sai de seu lugar e começa a procurar um novo alojamento, deslocando a aranha residente. Tal procedimento continua até que se retorne a uma nova configuração estável.

As Pombas e os Falcões

Por que este comportamento é tão raro?

As Pombas e os Falcões

Por que este comportamento é tão raro?

Considere o jogo F— P—B —X.

As Pombas e os Falcões

Por que este comportamento é tão raro?

Considere o jogo F— P—B —X.

Caso $G < C$, tanto B como X são ESS. No entanto B pode invadir uma população apenas de F e P, mas X não pode invadir esta mesma população.

As Pombas e os Falcões

Por que este comportamento é tão raro?

Considere o jogo F— P—B —X.

Caso $G < C$, tanto B como X são ESS. No entanto B pode invadir uma população apenas de F e P, mas X não pode invadir esta mesma população.

Em outras palavras: apesar de X ser um ESS, a princípio esta não pode invadir certos ambientes possíveis.

As Pombas e os Falcões

O que dizer então das aranhas mexicanas?

As Pombas e os Falcões

O que dizer então das aranhas mexicanas?

Considere que o bem em disputa tem valor G para o dono e g para o invasor.

As Pombas e os Falcões

O que dizer então das aranhas mexicanas?

Considere que o bem em disputa tem valor G para o dono e g para o invasor. Assim a matriz de ganho é dada por

	F	**P**	**B**	**X**
F	$\frac{1}{4}(G+g-2C)$	$\frac{1}{2}(G+g)$	$\frac{1}{4}(2G+g-C)$	$\frac{1}{4}(G+2g-C)$
P	0	$\frac{1}{4}(G+g)$	$\frac{1}{4}G$	$\frac{1}{4}g$
B	$\frac{1}{4}(G-C)$	$\frac{1}{4}(2G+g)$	$\frac{1}{2}G$	$\frac{1}{4}(G+g-C)$
X	$\frac{1}{4}(g-C)$	$\frac{1}{4}(G+2g)$	$\frac{1}{4}(G+g-C)$	$\frac{1}{2}g$

As Pombas e os Falcões

Em geral uma pequena diferença em $G - g > 0$ faz com que a bacia de atração da estratégia B seja muito maior que a da X.

As Pombas e os Falcões

Outro tipo de assimetria importante em disputas é dada pelas caracteristicas intrínsicas de cada indivíduo. Por exemplo, o *tamanho* é um dado importante (o *maior* tem maiores chances na disputa).

As Pombas e os Falcões

Outro tipo de assimetria importante em disputas é dada pelas caracteristicas intrínsicas de cada indivíduo. Por exemplo, o *tamanho* é um dado importante (o *maior* tem maiores chances na disputa).

Incluimos uma nova estratégia A que diz

As Pombas e os Falcões

Outro tipo de assimetria importante em disputas é dada pelas caracteristicas intrínsicas de cada indivíduo. Por exemplo, o *tamanho* é um dado importante (o *maior* tem maiores chances na disputa).

Incluimos uma nova estratégia A que diz

- Se Maior então Falcão.

As Pombas e os Falcões

Outro tipo de assimetria importante em disputas é dada pelas caracteristicas intrínsicas de cada indivíduo. Por exemplo, o *tamanho* é um dado importante (o *maior* tem maiores chances na disputa).

Incluimos uma nova estratégia A que diz

- Se Maior então Falcão.
- Se Menor então Pomba.

As Pombas e os Falcões

Outro tipo de assimetria importante em disputas é dada pelas caracteristicas intrínsicas de cada indivíduo. Por exemplo, o *tamanho* é um dado importante (o *maior* tem maiores chances na disputa).

Incluimos uma nova estratégia A que diz

- Se Maior então Falcão.
- Se Menor então Pomba.

Então o jogo F— P—A tem um único ESS dado por A.

As Pombas e os Falcões

É frequente que disputas entre animais sejam resolvidas pelo tamanho sem luta (ex.: sapo *Bufo bufo*).

As Pombas e os Falcões

É frequente que disputas entre animais sejam resolvidas pelo tamanho sem luta (ex.: sapo *Bufo bufo*).

Frequentemente o tamanho não é a caracteristica mais importante e é comum que tal seja exibida ostensivamente de forma a deixar claro quem será o vencedor da luta e assim evitá-la sem prejuizos as partes.

As Pombas e os Falcões

Exemplos:

As Pombas e os Falcões

Exemplos:

- Cervo (*Cervus elaphus*) (Clutton-Brock & Albon, 1979).

As Pombas e os Falcões

Exemplos:

- Cervo (*Cervus elaphus*) (Clutton-Brock & Albon, 1979).
- Exibição de dentes caninos no babuíno *Papio anubius* (Packer, 1977).

As Pombas e os Falcões

Exemplos:

- Cervo (*Cervus elaphus*) (Clutton-Brock & Albon, 1979).
- Exibição de dentes caninos no babuíno *Papio anubius* (Packer, 1977).
- Peso de aranhas *Agenelopsis aperta*.

Jogos Assimétricos

Jogos Assimétricos

Até agora supusemos que a matriz de ganho de ambos os participantes era a mesma.

Jogos Assimétricos

Até agora supusemos que a matriz de ganho de ambos os participantes era a mesma.

Vamos considerar agora que ambos os jogadores têm papéis fixos e portanto matrizes de ganho distintas, A e B.

Jogos Assimétricos

Até agora supusemos que a matriz de ganho de ambos os participantes era a mesma.

Vamos considerar agora que ambos os jogadores têm papéis fixos e portanto matrizes de ganho distintas, A e B.

O jogo será dito *assimétrico* se $A \neq B$.

Jogos Assimétricos

Típicos exemplos de jogos assimétricos são:

Jogos Assimétricos

Típicos exemplos de jogos assimétricos são:

- Conflito de gerações.

Jogos Assimétricos

Típicos exemplos de jogos assimétricos são:

- Conflito de gerações.
- Conflito de sexos.

Jogos Assimétricos

Típicos exemplos de jogos assimétricos são:

- Conflito de gerações.
- Conflito de sexos.
- Conflito entre indivíduos de diferentes espécies.

Jogos Assimétricos

Típicos exemplos de jogos assimétricos são:

- Conflito de gerações.
- Conflito de sexos.
- Conflito entre indivíduos de diferentes espécies.
- Conflito entre genes de um mesmo indivíduo.

Jogos Assimétricos

Típicos exemplos de jogos assimétricos são:

- Conflito de gerações.
- Conflito de sexos.
- Conflito entre indivíduos de diferentes espécies.
- Conflito entre genes de um mesmo indivíduo.
- Conflito entre genes nucleares e genes citoplasmático (mitocondriais, plasmídeos,. . .)

Jogos Assimétricos

Consideremos o conflito entre machos e fêmeas.

Jogos Assimétricos

Consideremos o conflito entre machos e fêmeas.

Este se dá pois macho e fêmea são indivíduos geneticamente não relacionados que têm um interesse comum: a produção de descendentes.

Jogos Assimétricos

Consideremos o conflito entre machos e fêmeas.

Este se dá pois macho e fêmea são indivíduos geneticamente não relacionados que têm um interesse comum: a produção de descendentes.

Exemplo: genes controlando o crescimento embrionário (experiência feita em ratos). Colocando dois genes de origem paterna, o embrião cresce mais do que o normal; com genes de origem materna acontece o contrário.

Jogos Assimétricos

Consideremos o conflito entre machos e fêmeas.

Este se dá pois macho e fêmea são indivíduos geneticamente não relacionados que têm um interesse comum: a produção de descendentes.

Exemplo: genes controlando o crescimento embrionário (experiência feita em ratos). Colocando dois genes de origem paterna, o embrião cresce mais do que o normal; com genes de origem materna acontece o contrário.

Exemplo extremo: em algumas espécies (ex: aranha australiana *Latrodectus hasselti*) a fêmea devora o macho após a cópula.

Jogos Assimétricos

Em geral é necessário um gasto de energia (e portanto uma perda de descendência potencial) no ato de cuidar da prole.

Jogos Assimétricos

Em geral é necessário um gasto de energia (e portanto uma perda de descendência potencial) no ato de cuidar da prole.

Cada um dos pais pode tentar minimizar sua perda de tempo e energia deixando o trabalho de cuidar da prole para o parceiro.

Jogos Assimétricos

Em geral é necessário um gasto de energia (e portanto uma perda de descendência potencial) no ato de cuidar da prole.

Cada um dos pais pode tentar minimizar sua perda de tempo e energia deixando o trabalho de cuidar da prole para o parceiro.

Em geral está em situação privilegiada aquele que pode abandonar a prole primeiro.

Jogos Assimétricos

Em geral é necessário um gasto de energia (e portanto uma perda de descendência potencial) no ato de cuidar da prole.

Cada um dos pais pode tentar minimizar sua perda de tempo e energia deixando o trabalho de cuidar da prole para o parceiro.

Em geral está em situação privilegiada aquele que pode abandonar a prole primeiro.

A rigor a fêmea já parte de uma situação de desvantagem, pois o custo necessário para a produção de óvulos é maior que para a produção de espermatozóides.

Jogos Assimétricos

Suponhamos, como exemplo, o caso de animais com fertilização interna (na fêmea).

Jogos Assimétricos

Suponhamos, como exemplo, o caso de animais com fertilização interna (na fêmea).

Neste caso o macho pode abandonar a fêmea mesmo antes do nascimento e procurar outras parceiras, de forma a maximizar sua descendência.

Jogos Assimétricos

Suponhamos, como exemplo, o caso de animais com fertilização interna (na fêmea).

Neste caso o macho pode abandonar a fêmea mesmo antes do nascimento e procurar outras parceiras, de forma a maximizar sua descendência.

Uma contra-estratégia possível para a fêmea é adotar um longo período de corte, ou seja, adiar ao máximo a cópula, de forma a impedir ao macho conseguir uma segunda parceira (devido ao fim do período de acasalamento).

Jogos Assimétricos

Com isto passa a ser uma estratégia maximizadora para o macho ajudar na criação da prole, aumentando a sobrevivênica de sua descendência.

Jogos Assimétricos

Com isto passa a ser uma estratégia maximizadora para o macho ajudar na criação da prole, aumentando a sobrevivênica de sua descendência.

Se o machos se tornarem participantes em relação a prole, não há sentido em ter uma corte longa.

Jogos Assimétricos

Com isto passa a ser uma estratégia maximizadora para o macho ajudar na criação da prole, aumentando a sobrevivênica de sua descendência.

Se o machos se tornarem participantes em relação a prole, não há sentido em ter uma corte longa.

Na ausência de corte longa, é vantajoso aos machos abandonarem a fêmea.

Jogos Assimétricos

Suponha as seguintes estratégias:

Jogos Assimétricos

Suponha as seguintes estratégias:

Para os machos:

Jogos Assimétricos

Suponha as seguintes estratégias:

Para os machos:

- Cafajeste: abandona a parceira logo após a cópula.

Jogos Assimétricos

Suponha as seguintes estratégias:

Para os machos:

- Cafajeste: abandona a parceira logo após a cópula.
- Fiel: ajuda na criação dos filhotes.

Jogos Assimétricos

Suponha as seguintes estratégias:

Para os machos:

- Cafajeste: abandona a parceira logo após a cópula.
- Fiel: ajuda na criação dos filhotes.

Para as fêmeas:

Jogos Assimétricos

Suponha as seguintes estratégias:

Para os machos:

- Cafajeste: abandona a parceira logo após a cópula.
- Fiel: ajuda na criação dos filhotes.

Para as fêmeas:

- Recatada: exige um longo período de corte antes da cópula.

Jogos Assimétricos

Suponha as seguintes estratégias:

Para os machos:

- Cafajeste: abandona a parceira logo após a cópula.
- Fiel: ajuda na criação dos filhotes.

Para as fêmeas:

- Recatada: exige um longo período de corte antes da cópula.
- Apressada: aceita a cópula sem corte.

Jogos Assimétricos

Considere os seguintes valores:

Jogos Assimétricos

Considere os seguintes valores:

- G: ganho por descendência bem sucedida.

Jogos Assimétricos

Considere os seguintes valores:

- G: ganho por descendência bem sucedida.
- C: investimento dos pais.

Jogos Assimétricos

Considere os seguintes valores:

- G: ganho por descendência bem sucedida.
- C: investimento dos pais.
- E: custo associado a uma longa corte.

Jogos Assimétricos

As matrizes de ganho, neste caso, são:

Jogos Assimétricos

As matrizes de ganho, neste caso, são:

Para os machos:

	R	**A**
C	0	G
F	$G-E-C/2$	$G-C/2$

Jogos Assimétricos

As matrizes de ganho, neste caso, são:

Para os machos:

	R	**A**
C	0	G
F	$G - E - C/2$	$G - C/2$

Para as fêmeas:

	C	**F**
R	0	$G - E - C/2$
A	$G - C$	$G - C/2$

Jogos Assimétricos

Considerando que cada um dos jogadores maximiza seu ganho, então o *equilíbrio de Nash* é dado por

Jogos Assimétricos

Considerando que cada um dos jogadores maximiza seu ganho, então o *equilíbrio de Nash* é dado por

- Os machos jogando C com probabilidade

$$p = \frac{E}{E + C - G} .$$

Jogos Assimétricos

Considerando que cada um dos jogadores maximiza seu ganho, então o *equilíbrio de Nash* é dado por

- Os machos jogando C com probabilidade

$$p = \frac{E}{E + C - G}\,.$$

- As fêmeas jogando R com probabilidade

$$q = \frac{C}{2(G - E)}\,.$$

Jogos Assimétricos

Considerando que cada um dos jogadores maximiza seu ganho, então o *equilíbrio de Nash* é dado por

- Os machos jogando C com probabilidade

$$p = \frac{E}{E + C - G} \ .$$

- As fêmeas jogando R com probabilidade

$$q = \frac{C}{2(G - E)} \ .$$

Este equilíbrio não é estável: uma perturbação gera ciclos e não traz o sistema de volta ao equilíbrio.

Dinâmica

Até agora fizemos uma análise essencialmente estática, obtendo ESS, equilíbrios de Nash etc, mas não analisamos como as freqüências de cada comportamento evoluem no tempo.

Dinâmica

Até agora fizemos uma análise essencialmente estática, obtendo ESS, equilíbrios de Nash etc, mas não analisamos como as freqüências de cada comportamento evoluem no tempo.

Para isto é necessário incluir uma regra dinâmica.

Dinâmica

Até agora fizemos uma análise essencialmente estática, obtendo ESS, equilíbrios de Nash etc, mas não analisamos como as freqüências de cada comportamento evoluem no tempo.

Para isto é necessário incluir uma regra dinâmica.

Vamos começar a formalizar do ponto de vista matemáticos as idéias até agora apresentadas.

Dinâmica

- Cada jogo consiste de N *estratégias puras* R_1, R_2, $\cdots$, R_N.

Dinâmica

- Cada jogo consiste de N *estratégias puras* R_1, R_2, $\cdots$, R_N.
- Cada jogador pode adotar *estratégias mistas*, definidas por um vetor $\vec{p} = (p_1, \cdots, p_N)$ que significa que esta adota a estratégia R_i com probabilidade p_i.

Dinâmica

- Cada jogo consiste de N *estratégias puras* R_1, R_2, $\cdots$, R_N.
- Cada jogador pode adotar *estratégias mistas*, definidas por um vetor $\vec{p} = (p_1, \cdots, p_N)$ que significa que esta adota a estratégia R_i com probabilidade p_i.
- A matriz $N \times N$ de ganho $\mathbf{U}$, onde u_{ij} é o ganho de um R_i-estrategista contra um R_j-estrategista é chamada *matriz de ganho*.

Dinâmica

- Cada jogo consiste de N *estratégias puras* R_1, R_2, $\cdots$, R_N.
- Cada jogador pode adotar *estratégias mistas*, definidas por um vetor $\vec{p} = (p_1, \cdots, p_N)$ que significa que esta adota a estratégia R_i com probabilidade p_i.
- A matriz $N \times N$ de ganho $\mathbf{U}$, onde u_{ij} é o ganho de um R_i-estrategista contra um R_j-estrategista é chamada *matriz de ganho*.
- Portanto um $\vec{p}$-estrategista contra um $\vec{q}$-estrategista tem um ganho esperado de

$$\vec{p} \cdot \mathbf{U}\vec{q}\,.$$

Dinâmica

- Seja $\vec{\beta}(\vec{q})$ a melhor estratégia contra $\vec{q}$, isto é, o vetor que maximiza a função $\vec{p} \mapsto \vec{p} \cdot \mathbf{U}\vec{q}$.

Dinâmica

- Seja $\vec{\beta}(\vec{q})$ a melhor estratégia contra $\vec{q}$, isto é, o vetor que maximiza a função $\vec{p} \mapsto \vec{p} \cdot \mathrm{U}\vec{q}$.
- Uma estratégia $\vec{p}$ é dita um *equilíbrio de Nash* se for a melhor estratégia contra si própria, ou seja

$$\vec{p} = \vec{\beta}(\vec{p}) \ .$$

Dinâmica

- Seja $\vec{\beta}(\vec{q})$ a melhor estratégia contra $\vec{q}$, isto é, o vetor que maximiza a função $\vec{p} \mapsto \vec{p} \cdot \mathrm{U}\vec{q}$.
- Uma estratégia $\vec{p}$ é dita um *equilíbrio de Nash* se for a melhor estratégia contra si própria, ou seja

$$\vec{p} = \vec{\beta}(\vec{p}) \ .$$

- Todo jogo nas condições acima posui (pelo menos um) equilíbrio de Nash.

Dinâmica

- Uma estratégia $\hat{p}$ é um ESS se ela é imune a invasões por mutantes raros, ou seja se para todo $\vec{p} \neq \hat{p}$ e ε suficientemente pequeno

$$\vec{p} \cdot \mathbf{U}(\varepsilon\vec{p} + (1-\varepsilon)\hat{p}) < \hat{p} \cdot \mathbf{U}(\varepsilon\vec{p} + (1-\varepsilon)\hat{p}) \, .$$

Dinâmica

- Uma estratégia $\hat{p}$ é um ESS se ela é imune a invasões por mutantes raros, ou seja se para todo $\vec{p} \neq \hat{p}$ e ε suficientemente pequeno

$$\vec{p} \cdot \mathbf{U}(\varepsilon\vec{p} + (1-\varepsilon)\hat{p}) < \hat{p} \cdot \mathbf{U}(\varepsilon\vec{p} + (1-\varepsilon)\hat{p}) \; .$$

- A condição acima pode ser re-escrita da seguinte forma:

Dinâmica

- Uma estratégia $\hat{p}$ é um ESS se ela é imune a invasões por mutantes raros, ou seja se para todo $\vec{p} \neq \hat{p}$ e ε suficientemente pequeno

$$\vec{p} \cdot \mathbf{U}(\varepsilon\vec{p} + (1-\varepsilon)\hat{p}) < \hat{p} \cdot \mathbf{U}(\varepsilon\vec{p} + (1-\varepsilon)\hat{p}) \; .$$

- A condição acima pode ser re-escrita da seguinte forma:
  (condição de equilíbrio)
  $\vec{p} \cdot \mathbf{U}\hat{p} \leq \hat{p} \cdot \mathbf{U}$.

Dinâmica

- Uma estratégia $\hat{p}$ é um ESS se ela é imune a invasões por mutantes raros, ou seja se para todo $\vec{p} \neq \hat{p}$ e ε suficientemente pequeno

$$\vec{p} \cdot \mathbf{U}(\varepsilon\vec{p} + (1-\varepsilon)\hat{p}) < \hat{p} \cdot \mathbf{U}(\varepsilon\vec{p} + (1-\varepsilon)\hat{p}) \; .$$

- A condição acima pode ser re-escrita da seguinte forma:
  (condição de equilíbrio)
  $\vec{p} \cdot \mathbf{U}\hat{p} \leq \hat{p} \cdot \mathbf{U}$.
  (condição de estabilidade)
  se $\vec{p} \neq \hat{p}$ e $\vec{p} \cdot \mathbf{U}\hat{p} = \hat{p} \cdot \mathrm{U}\vec{p}$ então $\vec{p} \cdot \mathrm{U}\vec{p} < \hat{p} \cdot \mathrm{U}\vec{p}$.

Dinâmica

- Suponha que que existem n tipos de comportamento (possíveis estratégias) na população, $E_1, \cdots, E_n$, com freqüências $x_1, \cdots, x_n$.

Dinâmica

- Suponha que que existem n tipos de comportamento (possíveis estratégias) na população, $E_1, \cdots, E_n$, com freqüências $x_1, \cdots, x_n$.
- O *fitness* de cada tipo E_i depende da composição total da população, ou seja, $f_i = f_i(\vec{x})$.

Dinâmica

- Suponha que que existem n tipos de comportamento (possíveis estratégias) na população, $E_1, \cdots, E_n$, com freqüências $x_1, \cdots, x_n$.
- O *fitness* de cada tipo E_i depende da composição total da população, ou seja, $f_i = f_i(\vec{x})$.
- O estado da população é dado por um vetor $\vec{x}(t) = (x_1, \cdots, x_n)$ tal que $\sum_i x_i = 1$.

Dinâmica

- Suponha que que existem n tipos de comportamento (possíveis estratégias) na população, $E_1, \cdots, E_n$, com freqüências $x_1, \cdots, x_n$.
- O *fitness* de cada tipo E_i depende da composição total da população, ou seja, $f_i = f_i(\vec{x})$.
- O estado da população é dado por um vetor $\vec{x}(t) = (x_1, \cdots, x_n)$ tal que $\sum_i x_i = 1$.
- A variação do tamanho relativo de população adotando a estratégia E_i, $\dot{x}_i/x_i$, é dada pela taxa de sucesso relativo da estratégia E_i .

Dinâmica

- Tentativamente escrevemos

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = \text{fitness de} E_i - \text{fitness medio da populacao} \; .$$

Dinâmica

- Tentativamente escrevemos

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = \text{fitness de} E_i - \text{fitness medio da populacao} \; .$$

- Definimos

$$\bar{f}(\vec{x}) = \sum_i x_i f_i(\vec{x})$$

Dinâmica

- Tentativamente escrevemos

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = \text{fitness de} E_i - \text{fitness medio da populacao} \, .$$

- Definimos

$$\bar{f}(\vec{x}) = \sum_i x_i f_i(\vec{x})$$

- e escrevemos a *equação do replicador:*

$$\dot{x}_i = x_i\big(f_i(\vec{x}) - \bar{f}(\vec{x})\big) \, .$$

Dinâmica

- Tentativamente escrevemos

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = \text{fitness de} E_i - \text{fitness medio da populacao} \; .$$

- Definimos

$$\bar{f}(\vec{x}) = \sum_i x_i f_i(\vec{x})$$

- e escrevemos a *equação do replicador:*

$$\dot{x}_i = x_i(f_i(\vec{x}) - \bar{f}(\vec{x})) \; .$$

- A equação acima mantem a propriedade de $\sum_i x_i = 1$.

Dinâmica

Suponha

$$f_i(\vec{x}) = (\mathbf{A}\vec{x})_i \; .$$

Dinâmica

Suponha

$$f_i(\vec{x}) = (\mathbf{A}\vec{x})_i \ .$$

Então a dinâmica do replicador é dada por

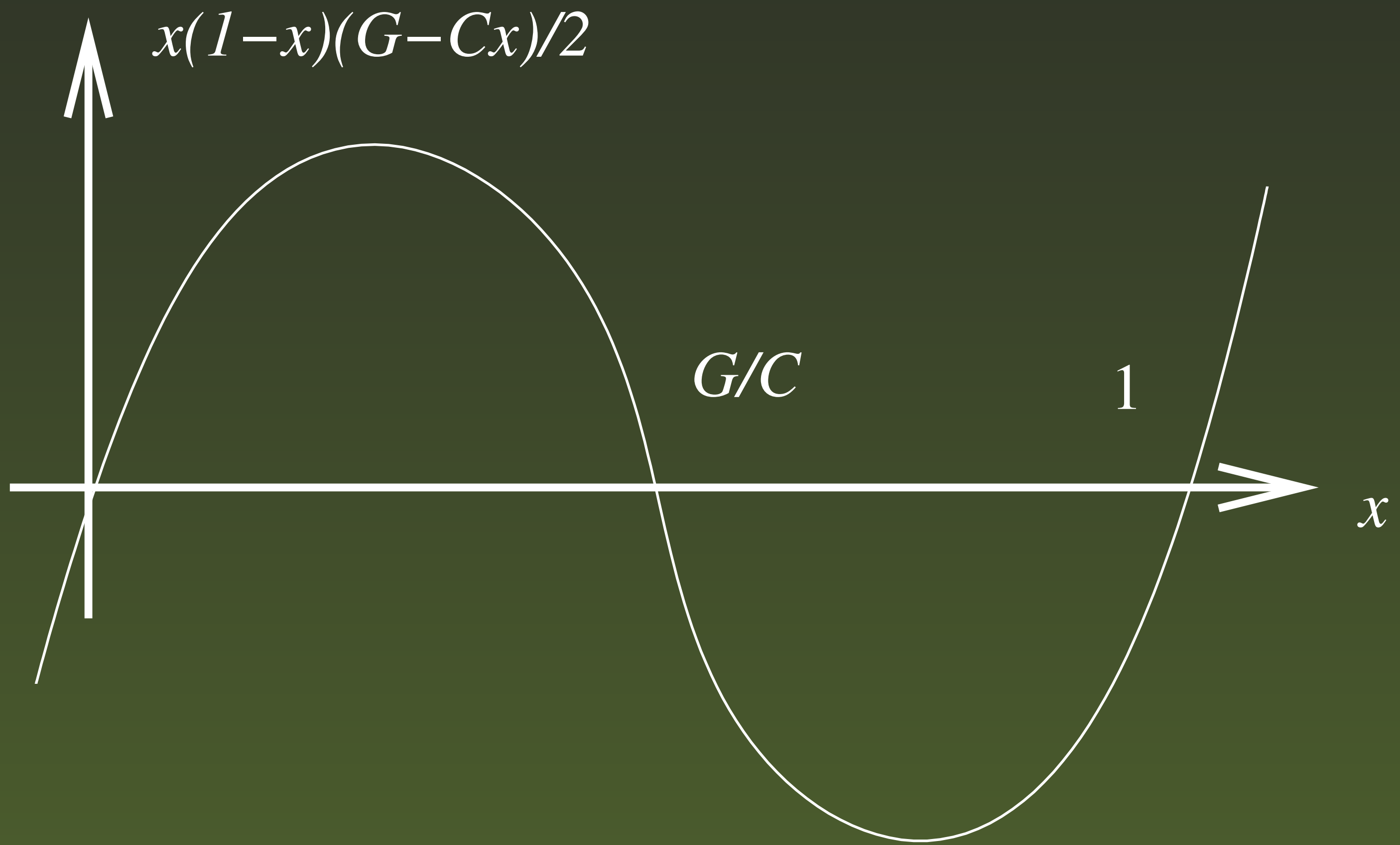
$$\dot{x}_i = x_i((\mathbf{A}\vec{x})_i - \vec{x} \cdot \mathbf{A}\vec{x}) \ .$$

Dinâmica

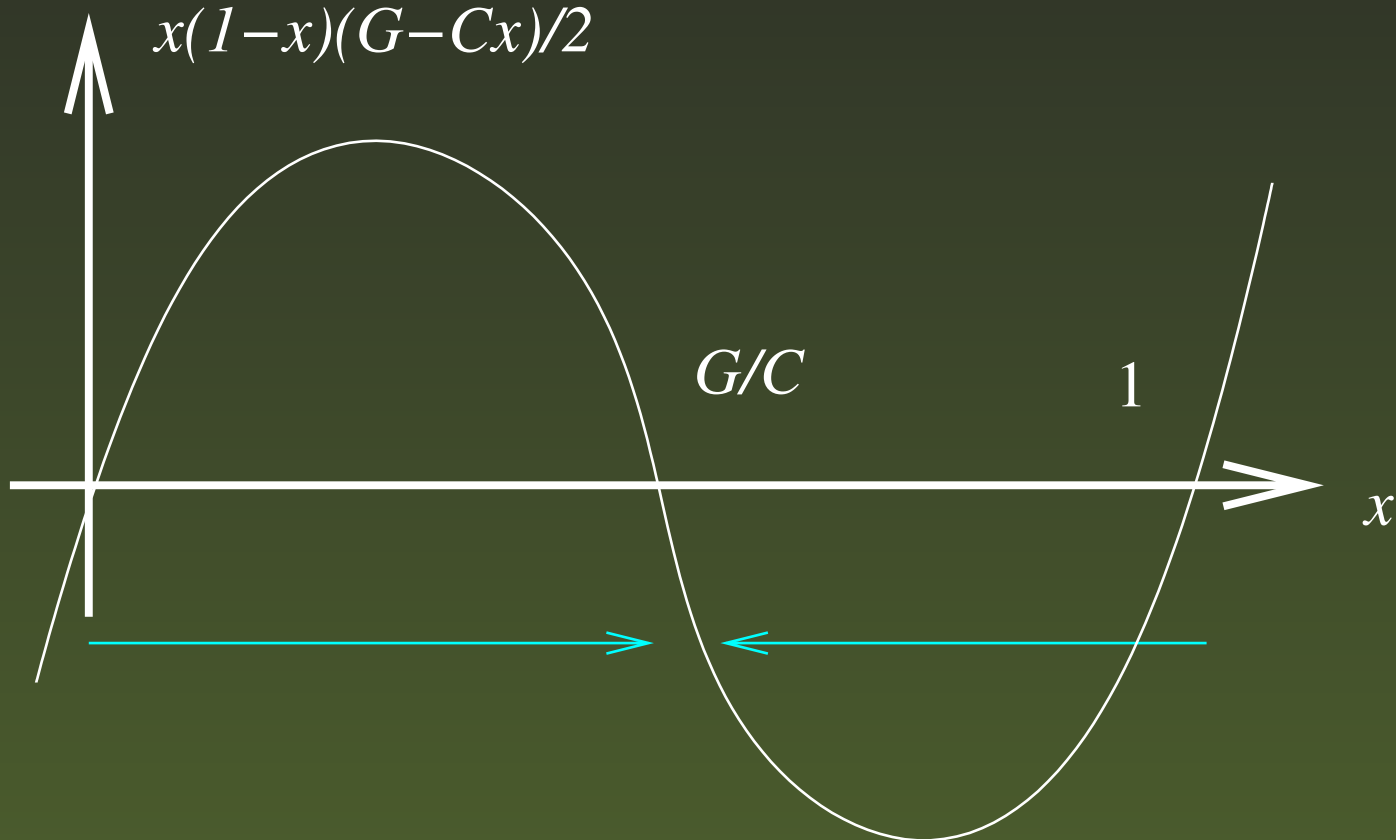
Voltemos ao jogos das pombas e dos falcões. Seja x a fração da população jogando F. Então a dinâmica do replicador é:

$$\dot{x} = \frac{1}{2}x(1 - x)(G - Cx) \; .$$

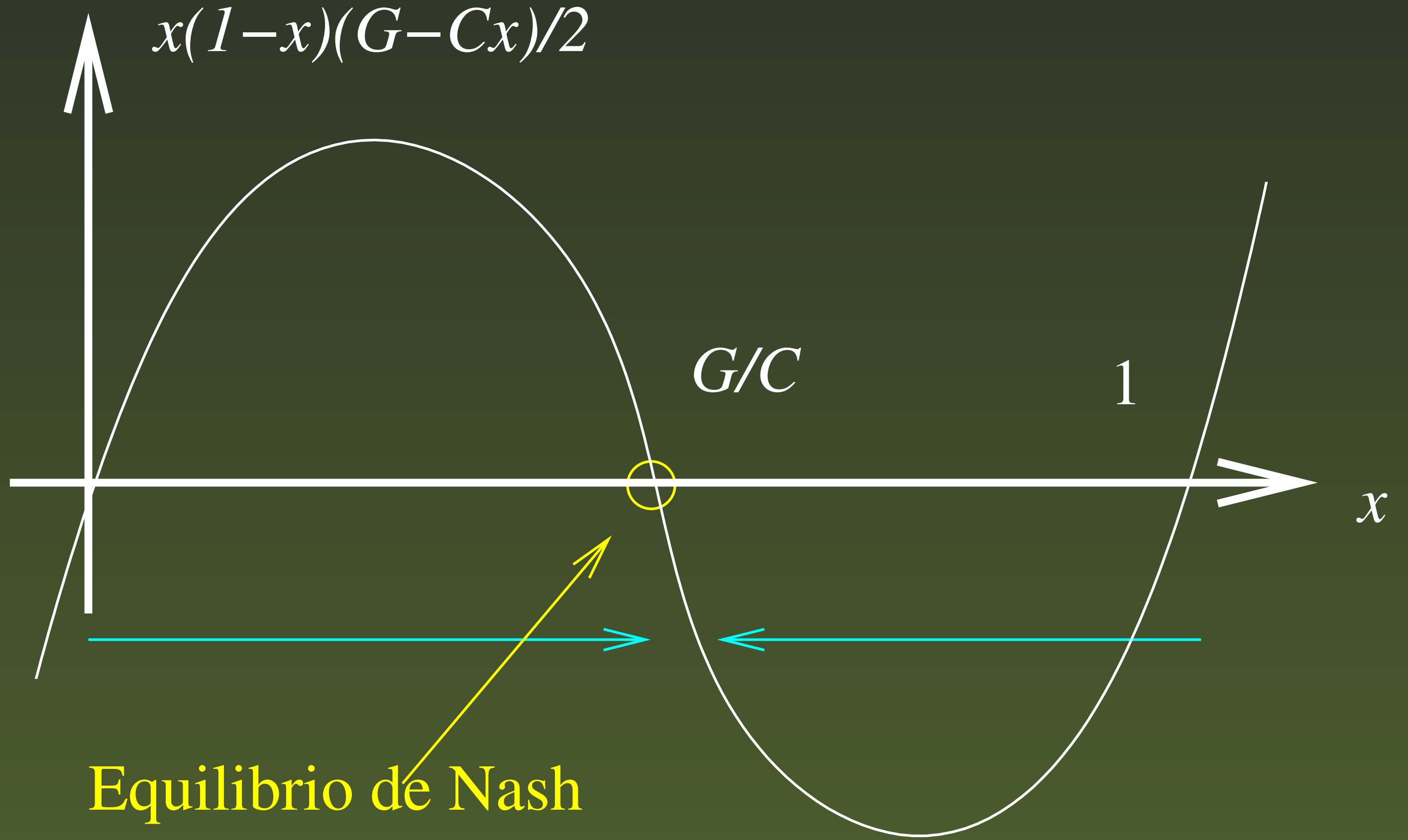
Dinâmica



Dinâmica



Dinâmica



Dinâmica

Existem muitos outros tipos de dinâmica além da do replicador, mas que não serão tratadas.

Conclusões

Além de dinâmica populacional, existem muitas outras áreas onde a teoria de jogos tem sido aplicada:

Conclusões

Além de dinâmica populacional, existem muitas outras áreas onde a teoria de jogos tem sido aplicada:

- Economia.

Conclusões

Além de dinâmica populacional, existem muitas outras áreas onde a teoria de jogos tem sido aplicada:

- Economia.
- Evolução nas relações humanas, em particular na evolução da cooperação.

Conclusões

Além de dinâmica populacional, existem muitas outras áreas onde a teoria de jogos tem sido aplicada:

- Economia.
- Evolução nas relações humanas, em particular na evolução da cooperação.
- Evolução da linguagem.

Conclusões

Além de dinâmica populacional, existem muitas outras áreas onde a teoria de jogos tem sido aplicada:

- Economia.
- Evolução nas relações humanas, em particular na evolução da cooperação.
- Evolução da linguagem.
- . . .

Conclusões

No momento é na Teoria dos Jogos que residem as maiores esperanças de uma visão unificada, matemática da teoria da evolução.