$8^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

Curso de Probabilidade e Processos Estocásticos

24/05/2003

$1^{\underline{a}}$Questão: Exer.3 Cap.5 (BJ).

Solução: Dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $|EX_n - \alpha| < \epsilon/2$ para todo $n \geq n_0$. Assim, para todo $n \geq n_0$

$$[|X_n - \alpha| > \epsilon] \subseteq [|X_n - EX_n| > \epsilon/2].$$

Mas, pela desigualdade de Chebychev para todo $n \geq 1$

$$P(|X_n - EX_n| > \epsilon/2) \leq \frac{4}{\epsilon^2} var(X_n).$$

Portanto, para todo $n \geq n_0$,

$$P(|X_n - \alpha| > \epsilon) \leq \frac{4}{\epsilon^2} var(X_n).$$

Como $var(X_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$ fica imediato concluir que $X_n \to \alpha$ em probabilidade.

$2^{\underline{a}}$Questão: Exer.9 Cap.5 (BJ).

Solução: Defina os eventos $A_n^1 \equiv [X_n > \log n]$ e $A_n^2 \equiv [X_n > 2\log n]$. Então, como X_n tem distribuição exponencial de parâmetro 1,

$$P(A_n^1) = P(X_n > \log n) = e^{-\log n} = \frac{1}{n},$$

e

$$P(A_n^2) = P(X_n > 2\log n) = e^{-2\log n} = \frac{1}{n^2}.$$

Como os eventos A_n^1 para $n \geq 1$ são independentes e $\sum_{n\geq 1} P(A_n) = +\infty$, pelo lema de Borel-Cantelli,

$$P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 1.$$

Contudo $\sum_{n\geq 1} P(A_n^2) < +\infty$, e assim novamente por Borel-Cantelli,

$$P(A_n^2 \text{ infinitas vezes}) = 0.$$

3ª Questão: Exer.18 Cap.5 (BJ).

Solução: Observe que o problema nos define que $X \equiv \{X_n\}_{n\geq 1}$ e $Y \equiv \{Y_n\}_{n\geq 1}$ são independentese identicamente distribuidas. Além disso defini-se

$$Z_n \equiv \theta_n X_n + (1-\theta_n)Y_n,$$

onde $\theta \equiv \{\theta_n\}_{n\geq 1}$ são i.i.d. e independente de X e de Y com

$$P(\theta_n = 1) = 1/2 = P(\theta_n = 0).$$

Desta forma fica simples verificar que $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ é uma familia de variaveis aleatórias i.i.d. e que $EZ_n < +\infty$. Portanto satisfaz as condições da lei forte de Kolmogorov.

4ª Questão: Exer.22 Cap.5 (BJ).

Solução: Note inicilmente que $P(X_{2n} > X_{2n-1})$ é área da região $[0, 2n-1] \times [0, 2n] \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < y\}$, e portanto se definirmos $Y_n \equiv 1_{[X_{2n} > X_{2n-1}]}$ teremos que

$$P(Y_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}.$$

Se estamos interessados no comportamento assintótico de $S_n/n \equiv \sum_{i=1}^{n} Y_n/n$ vejamos que tal sequência satisfaz a lei forte. De fato, $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ são independentes entre si e

$$EY_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}, var(Y_n) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16n^2}.$$

Portanto satisfaz as condições da primeira lei forte de Kolmogorov. Assim com probabilidade 1,

$$\frac{S_n}{n} - \frac{ES_n}{n} \to 0,$$

quando $n \to +\infty$. Contudo

$$\frac{ES_n}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \to \frac{1}{2},$$

quando $n \to +\infty$. Desta forma, com probabilidade 1,

$$\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{2},$$

quando $n \to +\infty$.