$7^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

Curso de Probabilidade e Processos Estocásticos

23/05/2003

$1^{\underline{a}}$Questão: Exer.16 Cap.3 (BJ).

Solução: Sabemos que se $Y = e^X$, então

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dF_X(x),$$

onde $F_X(x) = P(X \leq x)$. Contudo, neste caso

$$\frac{dF_X}{dx}(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2},$$

e assim

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dF_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+e^{-x})^2} dx.$$

Usando uma mudança de variavel do tipo $y = e^{-x}$ obtemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+e^{-x})^2} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{y(1+y)^2} dy.$$

Porém, $1/y(1+y)^2 = 1/y - 1/(1+y) - 1/(1+y)^2$. Desta forma,

$$\int_{1/n}^{n} \frac{1}{y(1+y)^2} dy = 2\log(n) - \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \to +\infty,$$

quando $n \to +\infty$. Portanto $EY = +\infty$.

$2^{\underline{a}}$Questão: Exer.20 Cap.3 (BJ).

Solução: Se uma variavel aleatória X é limitada então exista uma constante $C > 0$ tal que

$$P(|X| \leq C) = 1.$$

Logo, para todo $k \geq 0$

$$E(|X|^k) = E(|X|^k 1_{[|X| \leq C]} \leq C^k,$$

e portanto X possui momentos finitos de toda ordem.

No caso em que $X = 1_A$ com A um evento aleatório, note que $1_A^k = 1_A$ para todo $k \geq 0$ e assim $E(1_A^k) = E(1_A) = P(A)$.

3ªQuestão: Exer.22 Cap.3 (BJ).

Solução: Primeiro, observe que $var(T) = E(T^2) - (ET)^2$ e que se $P(T < 0) = 0$ então

$$E(T^k) = k \int_0^{+\infty} P(T > t) t^{k-1} dt.$$

Desta forma, se $P(T > t) = ae^{-\lambda t} + (1-a)e^{-\xi t}$ obtemos que

$$ET = a \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt + (1-a) \int_0^{+\infty} e^{-\xi t} dt$$

$$= \frac{a}{\lambda} + \frac{1-a}{\xi}.$$

Analogamente,

$$E(T^2) = a \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t dt + \int_0^{+\infty} e^{-\xi t} t dt$$

$$= \frac{2a}{\lambda^2} + \frac{2(1-a)}{\xi^2}.$$

Desta forma fica imediato calcular $var(T) = E(T^2) - (ET)^2$.

4ªQuestão: Exer.30 Cap.3 (BJ).

Solução: Se X é uma variavel aleatória com distribuição $b(n,p)$ então

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k},$$

se $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Para outros valores de k, $P(X = k) = 0$. Sejam X_i para $i = 1, ..., n$ variaveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com

$$P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = 0).$$

Defina $H_k^n \equiv \{(x_1, ..., x_n) \mid x_i \in \{0,1\}, \sum_{i=1}^n x_i = k\}$, isto é, o conjunto de n digitos em $\{0,1\}$ cuja a soma da k. Agora defina $Y \equiv \sum_{i=1}^n X_i$. Enão

$$P(Y = k) = P(\cup_{x \in H_k^n} [(X_1, ..., X_n) = x]) = \sum_{x \in H_k^n} P((X_1, ..., X_n) = x).$$

Mas para todo $x \in H_k^n$, $P((X_1, ..., X_n) = x) = p^k (1-p)^{n-k}$. Além disso a cardinalidade de H_k^n é exatamente $n!/k!(n-k)!$ e portanto

$$P(Y = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Desta forma é imediato verificar que Y é uma $b(n,p)$.

5ª Questão: Exer.34 Cap.3 (BJ).

Solução: Defina $X_1 \equiv \min\{X, Y\}$ e $X_2 \equiv \max\{X, Y\}$. Assim,

$$\rho \equiv \rho_{X_1, X_2} = \frac{E(X_1 X_2) - EX_1 EX_2}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}}.$$

Observe que,

$$EX_1 = \frac{1}{3}, EX_2 = \frac{2}{3}, E(X_1 X_2) = EXEY = \frac{1}{4},$$

e portanto $E(X_1 X_2) - EX_1 EX_2 = \frac{1}{36}$. Como $\sigma^2_{X_1} = \sigma^2_{X_2} = \frac{1}{18}$, fica imediato conferir que

$$\rho = \frac{1}{2}.$$