$5^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

Curso de Probabilidade e Processos Estocásticos

29/04/2003

$1^{\underline{a}}$Questão: Exer.28 Cap.2(BJ).

Solução: Para os segmentos de reta $[0, X]$, $[X, Y]$, $[Y, a+b]$ formarem um triângulo devemos ter que

$$X \leq \frac{a+b}{2}, X \geq Y - \frac{a+b}{2}, Y \geq \frac{a+b}{2}.$$

Então, se $A \equiv$ [formar um triângulo] temos que

$$A = [X \leq \frac{a+b}{2}, X \geq Y - \frac{a+b}{2}, Y \geq \frac{a+b}{2}].$$

Assim, sendo $f(x, y)$ a densidade conjunta do vetor aleatório (X, Y), então se $b > a$

$$P(A) = \int_0^a \int_{\frac{a+b}{2}}^{x+\frac{a+b}{2}} f(x,y)dxdy = \int_0^a \int_{\frac{a+b}{2}}^{x+\frac{a+b}{2}} \frac{1}{ab}dxdy.$$

Não é dificil ver que tal integral vale $\frac{a}{2b}$. No caso onde $b < a$ o argumento é inteiramente análogo porém o resultado é $\frac{b}{2a}$.

$2^{\underline{a}}$Questão: Exer.30 Cap.2(BJ).

Solução: Sejam F_{T_i} e f_{T_i} as funções de distribuição e densidade do tempo de vida da máquina i para $i = 1, 2$. Observe que se $X = 1$ representa o evento escolher a máquina 1 e $X = 2$, a máquina 2, então

$$[T \in B] = [T \in B, X = 1] \cup [T \in B, X = 2] == [T_1 \in B, X = 1] \cup [T_2 \in B, X = 2].$$

Desta forma, usando a hipotese de indepêndencia da escolha

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(T_1 \leq t)P(X = 1) + P(T_2 \leq t)P(X = 2) = \frac{F_{T_1}}{2} + \frac{F_{T_2}}{2}.$$

Portanto, a densidade de T é dada por $f_T(t) = \frac{f_{T_1}}{2} + \frac{f_{T_2}}{2}$.

$3^{\underline{a}}$Questão: Exer.34 Cap.2(BJ).

Solução: Defina $B_z^\theta \equiv \{(x,y) \in [\theta - 1/2, \theta + 1/2]^2 \mid x \leq y + z\}$. Então,

$$F_Z(z) = P((X,Y) \in B_z^\theta) = \text{volume}(B_z^\theta).$$

Agora, note que se $z \in [-1,0]$ tal volume é $\frac{(z+1)^2}{2}$ e que se $z \in [0,1]$ é $1 - \frac{(z+1)^2}{2}$. Logo, $f_Z(z) = (1+z)$ se $z \in [-1,0]$ e $f_Z(z) = 1 - z$ se $z \in [0,1]$.

4ªQuestão: Exer.40 Cap.2(BJ).

Solução: A soma de dois processos de Poisson independentes X_1 e X_2, com parámetros λ_1 e λ_2 respectivamente, é sempre um processo de Poisson com parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$(veja o exercício 39).

Para calcular a distribuição de $\min(V,T)$ observe que

$$P(\min(V,T) > t) = P(V > t, T > t) = e^{-15t}e^{-10t},$$

pois T é uma exponencial de parámetro 15 e V é uma exponencial de parámetro 10. Assim fica imediato verificar que $\min(V,T)$ é uma exponencial de parámetro 25.

Para calcular $P(T \leq V)$, defina $B \equiv \{(x,y) \mid x \geq y\}$ e note que

$$P(T \leq V) = P((V,T) \in B) = \int_0^{+\infty} \int_t^{+\infty} 15e^{-15t}10e^{-10s}dtds = \frac{3}{5}$$

(Veja o exercício 36).

5ªQuestão: Exer.45 Cap.2(BJ).

Solução: Para $z > 0$, note que $X + Y = z$ se e somente se $X = [z]$ e $Y = z - [z]$, onde $[z]$ = maior inteiro menor ou igual az. Desta forma,

$$P(X + Y = z) = P(X = [z])P(Y = z - [z]) = \frac{5^{[z]}e^{-5}}{[z]!}(z - [z]).$$

Se $z \leq 0$, note que $P(X + Y = z) = 0$ pois $P(X \leq 0) = P(Y \leq 0) = 0$.