$4^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

Curso de Probabilidade e Processos Estocásticos

23/04/2003

$1^{\underline{a}}$Questão: Suponha que X e Y sejam variaveis aleatórias discretas e independentes e que $P(X = n) = P(Y = n) = p(1-p)^n$. Qual é a probabilidade de $X \in B$ dado que $X + Y = n$?

Solução: Prescisamos saber calcular inicialmente $P(X = k \mid X+Y = n)$. Feito isso, então

$$P(X \in B \mid X + Y = n) = \sum_{k \in B \cap \mathbf{N}} P(X = k \mid X + Y = n).$$

Se $0 \leq k \leq n$, por definição e pela independência,

$$P(X = k \mid X+Y = n) = \frac{P(X = k, X + Y = n)}{P(X + Y = n)} = \frac{P(X = k)P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)}.$$

Mas,

$$P(Y = n - X) = \sum_{0 \leq i \leq n} P(Y = n - i, X = i) = \sum_{i \geq 1} P(Y = n - i)P(X = i)$$

$$= \sum_{0 \leq i \leq n} p(1-p)^{n-i} p(1-p)^i = (n+1)p^2(1-p)^n.$$

Como $P(X = k)P(Y = n - k) = p^2(1-p)^n$, fica imediato verificar que

$$P(X = k \mid X + Y = n) = \frac{1}{n+1}.$$

Se $k > n$ é claro que $P(X = k \mid X + Y = n) = 0$.

$2^{\underline{a}}$Questão: Exer.15 Cap.2 (BJ).

Solução: Seja τ o tempo de espera de ocorrência do segundo sucesso em uma sequência de ensaios de variaveis aleatórias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ com distribuição de Bernoulli com parâmetro p. Inicialmente, note que

$$[\tau = k] = [X_k = 1, \text{existe um único } j < k \text{ tal que } X_j = 1].$$

Logo,

$$P(\tau = k) = \sum_{1\leq j\leq k-1} P(X_k = 1, X_i = 0 \forall 1 \leq i \leq k-1 i \neq j, X_j = 1) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2},$$

pois $P(X_k = 1, X_i = 0 \forall 1 \leq i \leq k-1\ i \neq j, X_j = 1) = p^2(1-p)^{k-2}$.

3ª Questão: Exer.17 Cap.2 (BJ).

Solução: Para provar que tal função não pode ser uma distribuição de probabilidade suponha por absurdo que seja. Desta forma, para todo $a < b$ e $c < d$ temos que

$$P(X \in (a,b], Y \in (c,d]) = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) \geq 0.$$

Porém, pela definição de F(e cancelando 1),

$$F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c) = -e^{-(b+d)}+e^{-(b+c)}+e^{-(a+d)}-e^{-(a+c)}.$$

Assim, $P(X \in (a,b], Y \in (c,d]) \geq 0$ se, e somente se

$$e^{-(b+c)} - e^{-(b+d)} \geq e^{-(a+c)} - e^{-(a+d)}$$

que é equivalente a

$$e^{-b}(e^{-c} - e^{-d}) \geq e^{-a}(e^{-c} - e^{-d}).$$

Mas como $c < d$, temos que $(e^{-c} - e^{-d}) > 0$. Por outro lado, como $a < b$, temos que $e^{-a} > e^{-b}$, o que contradiz a equão acima pois cancelando os termo positivo $(e^{-c} - e^{-d})$ em ambos os lados chegariamos a $e^{-b} \geq e^{-a}$.

4ª Questão: Exer.18 Cap.2 (BJ).

Solução: Com as variaveis em questão só assumem valores em $\{1,2,3\}$ precisamos calcular $P(X = i, Y = j)$ para $i, j \in \{1,2,3\}$. Como o sorteio é sem reposição, $P(X = i, Y = i) = 0$. Se $i \neq j$,

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j \mid X = i) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}.$$

Agora, note que $P(X < Y) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 1, Y = 3) + P(X = 2, Y = 3) = 1/2$.

5ª Questão: Exer.22 Cap.2 (BJ).

Solução: Sendo variaveis discretas,

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{x_i \leq x, y_j \leq y} P(X = x_i, Y = y_j).$$

Mas por hipotese $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$, e assim

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{x_i \le x, y_j \le y} P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

Contudo,

$$\sum_{x_i \le x, y_j \le y} P(X = x_i)P(Y = y_j) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) \sum_{y_j \le y} P(Y = y_j)$$

$$= F_X(x)F_Y(y).$$

Para o caso de n variaveis o argumento é inteiramente analogo.

Agora suponha que $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$ para todo $i \in \{1, ..., n-1\}$ e $j \in \{1, ..., m-1\}$. Vejamos que neste caso $P(X = x_n, Y = y_m) = P(X = x_n)P(Y = y_m)$. Inicialmente observe que

$$P(X = x_n, Y = y_m) = P(X = x_n) + P(Y = y_m) - P(X = x_n \text{ ou } Y = y_m).$$

Mas,

$$P(X = x_n \text{ ou } Y = y_m) = 1 - P(X \neq x_n, Y \neq y_m).$$

Por outro lado, usando a hipotese do problema

$$P(X \neq x_n, Y \neq y_m) = \sum_{1 \le i \le n-1} \sum_{1 \le j \le m-1} P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

$$= P(X \neq x_n)P(Y \neq y_m) = 1 - (P(X = x_n) + P(Y = y_m)) - P(X = x_m)P(Y = y_m).$$

Juntando as equações acima fica claro que $P(X = x_n, Y = y_m) = P(X = x_n)P(Y = y_m)$.