$3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

Curso de Probabilidade e Processos Estocásticos

07/04/2003

$1^{\underline{a}}$Questão: Prove que se F é uma função de distribuição então $\forall a \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (F(x+a) - F(x))dx = a.$$

Solução: Para tanto, note que $\forall n \geq 1$

$$\int_{-na}^{na} (F(x+a) - F(x))dx = \int_{na}^{(n+1)a} F(y)dy - \int_{-na}^{-(n-1)a} F(y)dy.$$

De fato decompondo a integral sobre o intervalo $[-na, na]$ como a soma de integrais sobre os intervalos $[-na, -(n-1)a], ..., [(n-1)a, na]$ é facil observar que, utilizando uma mudança de variaveis ($y = x + a$), varios termos irão se cancelar sobrando somente os dois acima escrito. Agora, como F é uma função de distribuição,

$$\int_{na}^{(n+1)a} F(y)dy \to a \text{ e } \int_{-na}^{-(n-1)a} F(y)dy \to 0,$$

quando $n \to +\infty$, o que torna imediato a solução do problema.

$2^{\underline{a}}$Questão: Exer.5 Cap.2 (BJ).

Solução: Usando a definição de probabilidade condicional,

$$P(T > t + s \mid T > t) = \frac{P(T > t + s, T > t)}{P(T > t)}.$$

Mas $[T > t + s, T > t] = [T > t + s]$ pois $[T > t + s] \subseteq [T > t]$. Assim,

$$P(T > t + s \mid T > t) = \frac{P(T > t + s)}{P(T > t)} = \frac{e^{t+s}}{e^t} = e^s = P(T > s).$$

Pergunta: a reciproca é verdadeira?

$3^{\underline{a}}$Questão: Exer.7 Cap.2 (BJ).

Solução: Derivando a função de distribuição é imediato verificar que tal função tem uma densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se } x \in [0,1] \\ 0, & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

4ªQuestão: Exer.11 Cap.2 (BJ).

Solução: Para obtermos tal equação diferencial, note que

$$\begin{aligned} P(T > t + \Delta t) &= P(T > t + \Delta t, T > t) = P(T > t + \Delta t \mid T > t)P(T > t) \\ &= P(T > t) - P(T \leq t + \Delta t \mid T > t)P(T > t). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{P(T > t + \Delta t) - P(T > t)}{\Delta t} = \frac{-P(T \leq t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t} P(T > t)$$

e assim é imediato deduzir que

$$\frac{dP(t)}{dt} = -h(t)P(t).$$

Usando a regra da cadeia para derivação, verifica-se que

$$P(t) = exp(-\int_0^t h(s)ds)$$

é a única solução da equação acima com condição inicial $P(0) = 1$.

5ªQuestão: Exer.16 Cap.2 (BJ).

Solução: Pela definição do modelo, X_t é uma Poisson com parámetro λt. Para saber a distribuição de Y_t note que

$$P(Y_t = k) = \sum_{n \geq k} P(X_t = n, k \text{ particulas dentre as } n \text{ emitidas foram registradas}).$$

Mas, se denotarmos por $A_k^n \equiv [k$ particulas dentre as n emitidas foram registradas$]$, então

$$P(X_t = n, A_k^n) = P(A_k^n \mid X_t = n)P(X_t = n).$$

Pela a hipotese do problema, $P(A_k^n \mid X_t = n)$ é igual a probabilidade de ocorrência de k sucessos em n ensaios de uma Bernoulli com parámetro p. Logo,

$$P(X_t = n, A_k^n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Colocando $m = n - k$ e pondo em evidência os termos que não dependem de n no somatório, verifica-se então que

$$P(Y_t = k) = \frac{(p\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \sum_{m \geq 0} \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}.$$

Mas,

$$\sum_{m\geq 0} \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!} = e^{\lambda t(1-p)}$$

e assim,

$$P(Y_t = k) = \frac{(p\lambda t)^k}{k!} e^{-p\lambda t}.$$

Portanto Y_t é uma Poisson com parámetro $p\lambda t$.