$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

Curso de Probabilidade e Processos Estocásticos

31/03/2003

$1^{\underline{a}}$Questão: Exerc.8 Cap.1 (BJ).

Solução: Um possivel espaço amostral seria $\Omega \equiv \{(x_n) \mid x_n \in \{2, ..., 12\} \forall n \geq 1\}$ onde cada x_n é interpretado como o resultado do n-ésimo lançamento. Como a principio não sabemos quantos lançamentos serão necessários para terminar o jogo precisamos considerar sequências infinitas. Note que a princípio não sabemos sequer se o jogo terminará em algum momento. Veremos que como uma consequência do lema de Borel-Cantelli, com probabilidade 1 o jogo termina em tempo finito.

Se representarmos por $[x_k = i] \equiv \{(x_n) \mid x_k = i\}$(leia o conjunto das sequências com k-ésimo termo igual a i) então

$$P(x_k = 2) = P(x_k = 12) = \frac{1}{6^2}, P(x_k = 3) = P(x_k = 11) = \frac{2}{6^2},$$
$$P(x_k = 4) = P(x_k = 10) = \frac{3}{6^2}, P(x_k = 5) = P(x_k = 9) = \frac{4}{6^2},$$
$$P(x_k = 8) = P(x_k = 6) = \frac{5}{6^2}, P(x_k = 7) = \frac{6}{6^2}.$$

Assim para calcularmos a probabilidade de vitória, defina o evento $A \equiv$ [ocorrência de vitória] e observe que $A = \cup_{n \geq 1} A_n$, onde

$$A_n \equiv [\text{ocorrência de vitória no n-ésimo lançamento}].$$

Desta forma,

$$P(A_1) = P(x_1 = 7) + P(x_1 = 11) \text{ e}$$
$$P(A_n) = \sum_{k=4,5,6,8,9,10} P(x_1 = k, x_2 \neq k \text{ ou } 7, ..., x_{n-1} \neq k \text{ ou } 7, x_n = k).$$

Mas, a probabilidade no lado direito do somatório é igual a

$$P(x_1 = k)P(x_n = k) \sum_{2 \geq j_i \leq 12, j_i \neq k \text{ ou } 7, i=2,...,n-1} P(x_2 = j_2)...P(x_{n-1} = j_{n-1})$$

que por sua vez é igual a

$$P(x_1 = k)^2 (\sum_{2 \geq i \leq 12, i \neq k \text{ ou } 7} P(x_1 = k))^{n-2}.$$

O cálculo do resultado exato é deixado a cargo do leitor.

2ª Questão: Exerc.20 Cap.1 (BJ).

Solução: Se definirmos os eventos $A \equiv$ [Fluminense ganha o jogo] e $B \equiv$ [chove neste dia] então o problema nos fornece que

$$P(B) = 0,5 \ , \ P(A \mid B) = 0,4 \text{ e } P(A \mid B^c) = 0,6.$$

Logo para sabermos $P(B \mid A)$ devemos usar a fórmula de Bayes dada por

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)}.$$

As contas ficam a cargo do leitor.

3ª Questão: Exerc.21 Cap.1 (BJ).

Solução: Se definirmos os eventos $A \equiv$ [Pedro escreve a carta], $B \equiv$ [o correio não a perde] e $C \equiv$ [o carteiro a entrega] então o problema nos fornece que

$$P(A) = 0,8 \ , \ P(B \mid A) = 0,9 \text{ e } P(C \mid A \cap B) = 0,9.$$

Assim para sabermos $P(A^c \mid C^c)$ devemos usar a fórmula de Bayes novamente.

$$P(A^c \mid C^c) = \frac{P(C^c \mid A^c)P(A^c)}{P(C^c \mid A^c)P(A^c) + P(C^c \mid A)P(A)}.$$

Note que $P(C^c \mid A^c) = 1$ e assim para exprimirmos o valor exato de $P(A^c \mid C^c)$ só necessitamos saber o valor exato de $P(C^c \mid A)$. Para tanto,

$$P(C^c \mid A) = P(C^c \cap B \mid A) + P(C^c \cap B^c \mid A).$$

Mas pelo exercício seguinte

$$P(C^c \cap B \mid A) = P(C^c \mid A \cap B)P(B \mid A), P(C^c \cap B^c \mid A) = P(C^c \mid A \cap B^c)P(B^c \mid A).$$

As contas ficam a cargo do leitor.

4ª Questão: Prove e interprete a igualdade;

$$P(A \mid B \cap C)P(B \mid C) = P(A \cap B \mid C).$$

Solução: De fato,

$$P(A \mid B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \frac{P(C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(A \cap B \mid C)}{P(B \mid C)}.$$

Esta igualdade é uma generalização do caso onde $C = \Omega$.

5ª Questão: Exerc.22 Cap.1 (BJ).

Solução: 1. [ocorrência de nenhumA_k] $= \cap_{1\leq k\leq n} A_k^c$,

$$\text{logo, } P(\text{ocorrência de nenhum} A_k) = \prod_{1\leq k\leq n} (1-p_k).$$

2. [ocorrência de pelo menos umA_k] $= (\cap_{1\leq k\leq n} A_k^c)^c$,

$$\text{logo, } P(\text{ocorrência de pelo menos um} A_k) = 1 - \prod_{1\leq k\leq n} (1-p_k).$$

3. [ocorrência de exatamente um dosA_k] $= \cup_{1\leq j\leq n} A_i \cap_{k\neq i} A_k^c$,

$$\text{logo, } P(\text{ocorrência de exatamente um dos} A_k) = \sum_{1\leq j\leq n} p_i \prod_{k\neq i} (1-p_k).$$

4. [ocorrência de exatamente dois dosA_k] $= \cup_{1\leq i<j\leq n} A_i \cap A_j \cap_{k\neq i,j} A_k^c$,

$$\text{logo, } P(\text{ocorrência de exatamente dois dos} A_k) = \sum_{1\leq i<j\leq n} p_i p_j \prod_{k\neq i,j} (1-p_k).$$

5. [ocorrência de todos osA_k] $= \cap_{1\leq k\leq n} A_k$,

$$\text{logo, } P(\text{ocorrência de todos os} A_k] = \prod_{1\leq k\leq n} p_k.$$

6. [ocorrência de no máximo $n-1$ dosA_k] $= (\cap_{1\leq k\leq n} A_k)^c$

$$\text{logo, } P(\text{ocorrência de no máximo } n-1 \text{ dos} A_k) = 1 - \prod_{1\leq k\leq n} p_k.$$

6ª Questão: Exerc.25 Cap.1 (BJ).

Solução: Considere uma região A de volume V no espaço e seja A uma região disjunta de A e com volume ΔV. Denote por $E_k(A\cup A)$ como o evento de achar exatamente k estrelas na região $A \cup A$‘. Então tal evento occorre se, e somente se, uma das seguintes condições ocorre:

1. Encontram-se exatamente k estrelas em A e nenhuma estrela em A;
2. Encontram-se exatamente $k-1$ estrelas em A e exatamente 1 estrela em A;
3. Encontram-se exatamente $k-i$ estrelas em A e exatamente i estrelas em A‘ para $2 \leq i \leq k$.

Defindo por B_i como o evento explicitado pela condição (i) acima definida para i=1,2,3, pelas hipoteses do problema temos que:

$$P(B_1) = P_k(V)(1-\lambda\Delta V - o(\Delta V));$$

$$P(B_2) = P_{k-1}(V)\lambda\Delta V + o(\Delta V);$$

$$P(B_3) = o(\Delta V),\text{onde } \frac{o(\Delta V)}{\Delta V} \to 0 \text{ quando } \Delta V \to 0.$$

Desta forma, como os eventos B_i são dijuntos, é imediato notar que

$$\frac{dP_k(V)}{dV} = -\lambda P_k(V) + \lambda P_{k-1}(V).$$

Assim fica a cargo do leitor verificar que

$$P_k(V) = e^{-\lambda V}\frac{(\lambda V)^k}{k!}$$

é a única solução para o sistema de equações acima descrito.

7ª Questão: Exerc.29 Cap.1 (BJ).

Solução: Para analizarmos esta problema denote por

$$E_n \equiv [\text{a população conter exatamente } n \text{ elementos}].$$

Observe que para $\Delta t > 0$, o sistema se encontra no estado E_n no tempo $t + \Delta t$ se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:

1. No tempo t o sistema se encontra no estado E_n e não ocorre mudança entre t e $t + \Delta t$;
2. No tempo t o sistema se encontra no estado E_{n-1} e ocorre $E_{n-1} \to E_n$ entre t e $t + \Delta t$;
3. No tempo t o sistema se encontra no estado E_{n+1} e ocorre $E_{n+1} \to E_n$ entre t e $t + \Delta t$;
4. Ocorre mais de uma mudança entre t e $t + \Delta t$;

Denote como λ_n a taxa de transição correspondente a mudança $E_n \to E_{n+1}$ e por μ_n a taxa de transição correspondente a mudança $E_n \to E_{n-1}$. Como nâo há interação entre os elementos , e eles morrem ou se dividem independentemente, $\lambda_n = n\lambda$ e $\mu_n = n\mu$. Defindo por A_i como o evento explicitado pela condição (i) acima definida para i=1,2,3,4, pelas hipoteses do problema temos que:

$$P(A_1) = P_n(t)(1 - \lambda_n\Delta t - \mu_n\Delta t) + o(\Delta t);$$

$$P(A_2) = \lambda_{n-1}\Delta t P_{n-1}(t) \text{ e } P(A_3) = \mu_{n+1}\Delta t P_{n+1}(t) + o(\Delta t);$$

$$P(A_4) = o(\Delta t),\text{onde } \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \to 0 \text{ quando } \Delta t \to 0.$$

Desta forma, como os eventos A_i são dijuntos, é imediato notar que

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t).$$

Supondo que $\lambda = \mu = 1$ e $P_1(0) = 1$ é simples verificar (basta derivar) que

$$P_0(t) = \frac{t}{t+1} \text{ e } P_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(t+1)^{n+1}}, n = 1, 2, ...$$

é uma solução do sistema de equações acima descrito. Assim é intuitivo que a probabilidade de que em algum momento a população esteja extinta seja dado pelo limite quando $t \to +\infty$ de $P_0(t)$ que de neste caso é 1.

8ª Questão: O lema de Borel-Cantelli. Seja $\{A_n\}$ uma sequência de eventos aleatórios. Defina o evento

$$[\text{ocorrência de } A_n \text{ infinitas vezes}] \equiv \limsup A_n.$$

onde $\limsup A_n \equiv \cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} A_k$. Desta forma,

Se $\sum_{n\geq 1} P(A_n) < \infty$, então $P(A_n \text{ infinitas vezes }) = 0$.

Se $\sum_{n\geq 1} P(A_n) = +\infty$ e os A_n são independentes, então $P(A_n \text{ infinitas vezes }) = 1$.

Solução: Para provar a primeira parte, note que se $\sum_{n\geq 1} P(A_n) < +\infty$ então $\sum_{k\geq n} P(A_k) \to 0$ quando $n \to +\infty$. Contudo,

$$[A_n \text{ infinitas vezes }] \subseteq \bigcup_{k\geq n} A_k \forall n \geq 1,$$

logo

$$P(A_n \text{ infinitas vezes }) \leq P(\bigcup_{k\geq n} A_k) \leq \sum_{k\geq n} P(A_k) \to 0$$

quando $n \to +\infty$. Portanto $P(A_n \text{ infinitas vezes }) = 0$.

Para provar a segunda parte note que, $[A_n \text{ infinitas vezes }] = \cap_{n\geq 1} B_n$ onde $B_n = \cup_{k\geq n} A_k$, e portanto é suficiente provarmos que $P(B_n) = 1 \forall n \geq 1$(a interceção enumeravel de conjuntos com probabilidade total possui probabilidade total). Para tanto observe que

$$B_n^c \subseteq \cap_{n\leq k\leq n+m} A_k^c.$$

Assim para todo m,

$$1 - P(B_n) = P(B_n^c) \leq P(\cap_{n\leq k\leq n+m} A_k^c) = \prod_{n\leq k\leq n+m} (1 - P(A_k)).$$

Como $1 - x \leq e^{-x}$ para $x \in [0, 1]$, temos que

$$1 - P(B_n) \leq exp(-\sum_{n\leq k\leq n+m} P(A_k)) \to 0$$

quando $m \to +\infty$. Logo, $P(B_n) = 1 \forall n$.

9ª Questão: Mostre que na 1ª questão o jogo termina, com probabilidade 1, em tempo finito.

Solução: Note que a princípio pode acontecer uma sequência de lançamentos onde o jogo nunca encerra, por exemplo: $(4, 5, 5, 5, 5, ...)$. Mas como uma consequência do lema de Borel-Cantelli veremos que o conjunto de sequências que não permitem o termino do jogo tem probabilidade 0. De fato, defina como A o conjunto de tais sequências. Note que se $x \in A$ então x não tem digito algum com valor 7. Assim se B é conjunto de sequências que não possuem digitos com valor 7 temos que $A \subseteq B$. Agora se definimos como C_n o conjunto de sequências que possuem o digito 7 na n-ésima casa, vemos pelo problema 1 que tais eventos são independentes e

$$\sum_{n\geq 1} P(C_n) = +\infty.$$

Logo, pelo lema de Borel-Cantelli, $P(C_n \text{ infinitas vezes}) = 1$. Mas

$$A \subseteq B \subseteq [C_n \text{ infinitas vezes}]^c,$$

e destarte

$$P(A) \leq P(B) \leq P([C_n \text{ infinitas vezes}]^c) = 1 - P([C_n \text{ infinitas vezes}]) = 0.$$