

1ª Lista de Exercícios

Curso de Probabilidade e Processos Estocásticos

22/03/2003

1ª Questão: Sejam $\{A_n\}_{n \geq 1}$ e $\{B_n\}_{n \geq 1}$ duas seqüências de eventos tais que $A_n \uparrow A$ e $B_n \downarrow B$. Prove que $P(A_n) \uparrow P(A)$ e $P(B_n) \downarrow P(B)$.

Solução: Dizer que $A_n \uparrow A$ (respectivamente $B_n \downarrow B$) significa dizer que $A_n \subseteq A_{n+1}$ ($B_{n+1} \subseteq B_n$) para todo $n \geq 1$ e $\cup_{n \geq 1} A_n = A$ ($\cap_{n \geq 1} B_n = B$). Dizer que $P(A_n) \uparrow P(A)$ ($P(B_n) \downarrow P(B)$) significa dizer que $P(A_n) \leq P(A_{n+1})$ ($P(B_{n+1}) \leq P(B_n)$) para todo $n \geq 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P(B)$).

Desta forma, por $A_n \subseteq A_{n+1}$ deduzimos que $P(A_n) \leq P(A_{n+1})$. Além disso, definindo $C_n \equiv (A - A_n)$ temos que $C_n \downarrow \emptyset$ e $P(C_n) = P(A) - P(A_n)$ por $A = \cup_{n \geq 1} A_n$. Logo, pela continuidade no vazio, $P(C_n) \rightarrow 0$ e assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} (P(A) - P(A_n)) = 0$. Com isso é imediato concluir que $P(A_n)$ converge para $P(A)$.

No outro caso é só observar que se $B_n \downarrow B$ então $B_n^c \uparrow B^c$, permitindo deduzirmos como corolário do caso anterior que $P(B_n^c) \uparrow P(B^c)$. Mas $P(B_n) = 1 - P(B_n^c)$ e $P(B) = 1 - P(B^c)$, e destarte $P(B_n) \downarrow P(B)$.

2ª Questão: Exer.2 Cap.1 (BJ).

Solução: Observe que se definirmos $C_n \equiv \cup_{i=1}^n A_i$ então $C_n \uparrow C = \cup_{i \geq 1} A_i$. Desta forma, $P(C_n) \uparrow P(C)$. Mas $P(C_n) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) \leq \sum_{i \geq 1} P(A_i)$. Logo, $P(\cup_{i \geq 1} A_i) = P(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) \leq \sum_{i \geq 1} P(A_i)$.

3ª Questão: Exer.5 Cap.1 (BJ).

Solução: Note que $P(A_n \cap B_n) = P(A_n) + P(B_n) - P(A_n \cup B_n)$. Como $P(A_n) \rightarrow 1$ e $P(A_n) \leq P(A_n \cup B_n) \leq 1$, então $P(A_n \cup B_n) \rightarrow 1$. Assim, $(P(A_n \cap B_n) - P(B_n)) = (P(A_n) - P(A_n \cup B_n)) \rightarrow 0$. Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n \cap B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = p$.

4ª Questão: Exer.12 Cap.1 (BJ).

Solução: Exibir um modelo probabilístico para um experimento significa exibir um espaço amostral Ω que descreva os possíveis valores registrados pela medição. Como em ambos os casos, tanto sorteio com reposição como sem reposição, o numero de reis registrados pode ser qualquer um entre $\{1, 2, 3, 4\}$ definimos então para ambos os casos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Desta

forma, o proximo passo conciste em dar probabilidades para cada átomo $\{i\}$ onde $i = 1, 2, 3, 4$. No caso de espaços de probabilidade com espaço amostral finito $\Omega = \{1, \dots, j\}$, para definir a probabilidade que descreve o modelo é suficiente descrever-la sobre os subconjuntos da forma $\{i\}$ com $i = 1, \dots, j$. Em nosso caso temos que para ambos experimentos,

$$P(\{i\}) = P([\text{registra-se } k \text{ reis}], k = 1, 2, 3, 4.$$

Defina os seguintes eventos; $B_i = [\text{registrou-se um rei no sorteio } i]$ e $A_i = B_i^c$. Então

$$[\text{registra-se } k \text{ reis}] = \bigcup_{i_1, \dots, i_k} \bigcap_{j \neq i_1, \dots, i_k} A_j \bigcap_{l=1}^k B_{i_l}.$$

Agora vejamos o caso onde o sorteio é feito com reposição. Denote por P_c como a probabilidade que descreve o experimento onde o sorteio é feito com reposição. Neste caso para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, A_i é independente de A_j, B_j para todo $j \neq i$. Assim

$$P_c\left(\bigcap_{j \neq i_1, \dots, i_k} A_j \bigcap_{l=1}^k B_{i_l}\right) = \prod_{j \neq i_1, \dots, i_k} P_c(A_j) \prod_{l=1}^k P_c(B_{i_l}).$$

Como os eventos $\bigcap_{j \neq i_1, \dots, i_k} A_j \bigcap_{l=1}^k B_{i_l}$ são disjuntos

$$P_c(\{k\}) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \prod_{j \neq i_1, \dots, i_k} P_c(A_j) \prod_{l=1}^k P_c(B_{i_l}).$$

Mas para todo $k = 1, 2, 3, 4$ temos que $\prod_{j \neq i_1, \dots, i_k} P_c(A_j) \prod_{l=1}^k P_c(B_{i_l}) = \left(\frac{4}{52}\right)^k \times \left(\frac{48}{52}\right)^{4-k}$. Assim

$$P(\{k\}) = C_k^4 \left(\frac{4}{52}\right)^k \times \left(\frac{48}{52}\right)^{4-k}$$

onde C_k^4 é o número de combinações de k uns em 4 casas.

Para o caso de sorteios sem reposição necessitamos da seguinte equação: para todo A_1, \dots, A_n , $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$. Denote por P_s como a probabilidade que descreve o experimento onde o sorteio é feito sem reposição. Deixarei como exercício verificar usando a fórmula acima que

$$P\left(\bigcap_{j \neq i_1, \dots, i_k} A_j \bigcap_{l=1}^k B_{i_l}\right) = \frac{4 \times \dots \times (4 - (k - 1)) \times 48 \dots \times (48 - (4 - (k - 1)))}{52 \times \dots \times 49}.$$

$$\text{Assim } P(\{k\}) = C_k^4 \left(\frac{4 \times \dots \times (4 - (k - 1)) \times 48 \dots \times (48 - (4 - (k - 1)))}{52 \times \dots \times 49}\right).$$