PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

PROVA FINAL - 09 DE DEZEMBRO DE 2003

1. Sejam A_n, $n = 1, 2, \ldots$, eventos aleatórios num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Mostre que se a série $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_k)$ converge então o evento

$$B = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ pertence a infinitos eventos } A_k\}$$

tem probabilidade zero.

2. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme em $[0, 1]$. Defina

$$Y = \max\{X_1\,, X_2\} - \min\{X_1\,, X_2\}.$$

Mostre que a variável Y é absolutamente contínua e calcule a sua função de densidade.

3. Considere um ponto (X_1, X_2) selecionado aleatoriamente, com distribuição uniforme, na região do plano indicada na figura.

PSfrag replacements

R

1

-1

(a) Determine a função de densidade conjunta $\mathcal{F}_{X_1,X_2}(a_1, a_2)$ de X_1 e X_2 no domínio $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$.
(b) Diga, justificando, se X_1 e X_2 são independentes.

4. Lançamos um dado honesto uma vez e anotamos o resultado X_1. Em seguida lançamos o mesmo dado sucessivamente, até que o resultado X_2 alcançado seja menor ou igual que X_1.
(a) Calcule a esperança do número total de lançamentos.
(b) Defina covariância (em geral) e calcule $\operatorname{cov}(X_1, X_2)$.

5. Sejam $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que cada X_n tem distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $Z_n = X_{2n} - X_{2n-1}$.
(a) Calcule a esperança e a variância de Z_n.
(b) A sequência $\frac{1}{\sqrt{n}}(Z_1 + \cdots + Z_n)$ converge em distribuição para uma distribuição normal. Explique o que esta frase significa, e justifique-a.