PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

PROVA 2 - 2 DE JUNHO DE 2003

1. Uma carta é retirada de um baralho de 52 cartas, e depois reposta. Em seguida este procedimento é repetido, embaralhando a cada vez, até que a primeira carta volte a sair. Calcule a esperança e a variância do número N de retiradas.
2. Sejam $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que cada X_n tem distribuição uniforme no intervalo $[0, n]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja Z_n a variável aleatória que toma valor 1 se $X_{2n} > 1 + X_{2n-1}$ e toma valor zero no caso contrário.
   (a) Calcule a esperança e a variância de Z_n.
   (b) Justifique que a sequência $\frac{1}{n}(Z_1 + \cdots + Z_n)$ tem limite quase certo quando $n \to \infty$ e ache esse limite.
3. Sejam X e Y variáveis aleatórias com variâncias finitas. Mostre que se as variáveis aleatórias $X + Y$ e $X - Y$ são independentes então $\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{Var}\,(Y)$.
4. Sejam $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ variáveis aleatórias independentes com $\mathcal{P}(X_n = 0) = \mathcal{P}(X_n = 1) = 1/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Ache μ e σ tais que
$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_n - n\mu) \leq a\right) \to \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$
para todo $a \in \mathbb{R}$, justificando a convergência.
5. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme em $[0, 1]$. Defina
$$Y = \max\{X_1, X_2\} \quad \text{e} \quad Z = \min\{X_1, X_2\}.$$
   (a) Mostre que as variáveis Y e Z têm funções de densidade dadas por $f_Y(a) = a^2$ e $f_Z(a) = 2a - a^2$, se $a \in [0, 1]$, e $f_Y(a) = f_Z(a) = 0$, se $a \notin [0, 1]$.
   (b) Calcule a covariância $\mathrm{Cov}\,(Y, Z)$.