PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

PROVA 1 - 30 DE ABRIL DE 2003

1. Sejam A_n, B_n, $n = 1, 2, \ldots$, eventos aleatórios num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.
   (a) Mostre que se $\mathcal{P}(A_n)$ converge para algum $a \in [0,1]$ e $\mathcal{P}(B_n)$ converge para 1, quando $n \to \infty$, então $\mathcal{P}(A_n \cap B_n)$ converge para a quando $n \to \infty$.
   (b) Mostre se a série $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_k)$ converge então
   $$\mathcal{P}\big(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k \big) = 0.$$
2. Uma instalação industrial dispõe de um sistema de segurança defeituoso: o alarme dispara com probabilidade $0,90$ quando há incêndio, e dispara com probabilidade $0,15$ mesmo quando não há incêndio. A probabilidade de que ocorra um incêndio neste tipo de instalação é de $0,05$. Sabendo que o alarme está soando no Corpo de Bombeiros, qual é a probabilidade de que um incêndio esteja realmente ocorrendo ?
3. Duas amostras de material radiativo são observadas, aguardando emissões de energia. Os tempos para emissão são variáveis aleatórias com distribuição exponencial, com parâmetros α e β respectivamente, e as emissões de cada uma das amostras são independentes. Calcule a função de distribuição do tempo até a primeira emissão.
4. Lançamos um dado honesto e em seguida novamente, até que o resultado X_2 seja maior ou igual que o resultado X_1 do lançamento inicial. Calcule
   (a) a função de distribuição marginal da variável X_2.
   (b) a esperança matemática do número de lançamentos necessários.
5. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$.
   (a) Calcule as funções de distribuição das variáveis $X+Y$ e $X-Y$
   (b) Verifique que as variáveis $X + Y$ e $X - Y$ são absolutamente contínuas.