$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

Curso de Probabilidade e Processos Estocásticos

22/03/2003

$1^{\underline{a}}$Questão: Sejam $\{A_n\}_{n\geq 1}$ e $\{B_n\}_{n\geq 1}$ duas sequências de eventos tais que $A_n \uparrow A$ e $B_n \downarrow B$. Prove que $P(A_n) \uparrow P(A)$ e $P(B_n) \downarrow P(B)$.

Solução: Dizer que $A_n \uparrow A$ (respectivamente $B_n \downarrow B$) significa dizer que $A_n \subseteq A_{n+1}$ ($B_{n+1} \subseteq B_n$) para todo $n \geq 1$ e $\cup_{n\geq 1} A_n = A$ ($\cap_{n\geq 1} B_n = B$). Dizer que $P(A_n) \uparrow P(A)$ ($P(B_n) \downarrow P(B)$) significa dizer que $P(A_n) \leq P(A_{n+1})$ ($P(B_{n+1}) \leq P(B_n)$) para todo $n \geq 1$ e $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$ ($\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(B)$).

Desta forma, por $A_n \subseteq A_{n+1}$ deduzimos que $P(A_n) \leq P(A_{n+1})$. Além disso, definindo $C_n \equiv (A - A_n)$ temos que $C_n \downarrow \emptyset$ e $P(C_n) = P(A) - P(A_n)$ por $A = \cup_{n\geq 1} A_n$. Logo, pela continuidade no vazio, $P(C_n) \to 0$ e assim, $\lim_{n\to\infty}(P(A) - P(A_n)) = 0$. Com isso é imediato concluir que $P(A_n)$ converge para $P(A)$.

No outro caso é só observar que se $B_n \downarrow B$ então $B_n^c \uparrow B^c$, permitindo deduzirmos como corolário do caso anterior que $P(B_n^c) \uparrow P(B^c)$. Mas $P(B_n) = 1 - P(B_n^c)$ e $P(B) = 1 - P(B^c)$, e destarte $P(B_n) \downarrow P(B)$.

$2^{\underline{a}}$Questão: Exer.2 Cap.1 (BJ).

Solução: Observe que se definirmos $C_n \equiv \cup_{i=1}^n A_i$ então $C_n \downarrow C = \cup_{n\geq 1} A_n$. Desta forma, $P(C_n) \uparrow P(C)$. Mas $P(C_n) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i)$. Logo, $P(\cup_{i\geq 1} A_i) = P(C) = \lim_{n\to\infty} P(C_n) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i)$.

$3^{\underline{a}}$Questão: Exer.5 Cap.1 (BJ).

Solução: Note que $P(A_n \cap B_n) = P(A_n) + P(B_n) - P(A_n \cup B_n)$. Como $P(A_n) \to 1$ e $P(A_n) \leq P(A_n \cup B_n) \leq 1$, então $P(A_n \cup B_n) \to 1$. Assim, $(P(A_n \cap B_n) - P(B_n)) = (P(A_n) - P(A_n \cup B_n)) \to 0$. Logo, $\lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = p$.

$4^{\underline{a}}$Questão: Exer.12 Cap.1 (BJ).

Solução: Exibir um modelo probabilistico para um experimento significa exibir um espaço amostral Ω que descreva os possives valores registrados pela medição. Como em ambos os casos, tanto sorteio com reposição como sem reposição, o numero de reis registrados pode ser qualquer um entre $\{1, 2, 3, 4\}$ definimos então para ambos os casos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Desta forma, o proximo passo conciste em dar probabilidades para cada átomo $\{i\}$ onde $i = 1, 2, 3, 4$. No caso de espaç0s de probabilidade com espaço amostral finito $\Omega = \{1, ..., j\}$, para definir a probabilidade que descreve o modelo é suficiente descrever-la sobre os subconjuntos da forma $\{i\}$ com $i = 1, ..., j$. Em nosso caso temos que para ambos experimentos,

$$P(\{i\}) = P([\text{registra-se } k \text{ reis}]), k = 1, 2, 3, 4.$$

Defina os seguintes eventos; B_i = [registrou-se um rei no sorteio i] e $A_i = B_i^c$. Então

$$[\text{registra-se } k \text{ reis}] = \bigcup_{i_1<...<i_k} \bigcap_{j\neq i_1,...,i_k} A_j \bigcap_{l=1}^{k} B_{i_l}.$$

Agora vejamos o caso onde o sorteio é feito com reposição. Denote por P_c como a probabilidade que descreve o experimento onde o sorteio é feito com reposição. Neste caso para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, A_i é independente de A_j, B_j para todo $j \neq i$. Assim

$$P_c(\bigcap_{j\neq i_1,...,i_k} A_j \bigcap_{l=1}^{k} B_{i_l}) = \prod_{j\neq i_1,...,i_k} P_c(A_j) \prod_{l=1}^{k} P_c(B_{i_l}).$$

Como os eventos $\bigcap_{j\neq i_1,...,i_k} A_j \bigcap_{l=1}^{k} B_{i_l}$ são dijuntos

$$P_c(\{k\}) = \sum_{i_1<...<i_k} \prod_{j\neq i_1,...,i_k} P_c(A_j) \prod_{l=1}^{k} P_c(B_{i_l}).$$

Mas para todo $k = 1, 2, 3, 4$ temos que $\prod_{j\neq i_1,...,i_k} P_c(A_j) \prod_{l=1}^{k} P_c(B_{i_l}) = (\frac{4}{52})^k \times (\frac{48}{52})^{4-k}$. Assim

$$P(\{k\}) = C_k^4 (\frac{4}{52})^k \times (\frac{48}{52})^{4-k}$$

onde C_k^4 é o número de combinações de k uns em 4 casas.

Para o caso de sorteios sem reposição necessitamos da seguinte equação: para todo $A_1, ..., A_n$, $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)...P(A_n \mid A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$. Denote por P_s como a probabilidade que descreve o experimento onde o sorteio é feito sem reposição. Deixarei como exercício verificar usando a fórmula acima que

$$P(\bigcap_{j\neq i_1,...,i_k} A_j \bigcap_{l=1}^{k} B_{i_l}) = \frac{4 \times ... \times (4-(k-1)) \times 48... \times (48-(4-(k-1)))}{52 \times ... \times 49}.$$

Assim $P(\{k\}) = C_k^4 (\frac{4\times...\times(4-(k-1))\times 48...\times(48-(4-(k-1)))}{52\times...\times 49})$.